Corrigé du concours communs polytechniques 2011-Filière MP

EXERCICE 1

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. $\dfrac{2}{(n+1)^2-1}\dfrac{n^2-1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $R=1$.

Q2. On a $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$. Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n-1}x^n$, et $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n+1}x^n$ ont pour rayon de convergence $R=1$. Soit $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ on a :

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^{n+1} - \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^{n-1} \\
&= -x\ln(1-x) - \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n \\
&= -x\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{x} - x\right)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Et pour $x=0$, on a $S(0)=0$.

Q3. $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $S(x) = \left(\dfrac{1}{x}-x\right)\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1+x}{x}(1-x)\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{3}{2}$.

Remarque, La série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{2}{n^2-1}x^n$, converge normalement sur $[-1,1]$, car la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{2}{n^2-1}$ est convergente, donc $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{2}{n^2-1}x^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{2}{n^2-1}$, conclusion : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 2

Q1. Les applications $x \longmapsto 2x$, $x \longmapsto -3$ sont continues sur $]0,+\infty[$, de plus $\forall x \in]0,+\infty[$, $2x \neq 0$, donc si S_H désigne l'ensemble des solutions de $2xy' - 3y = 0$, alors $S_H = \left\{x \longmapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. La méthode de la variation de la constante donne $\lambda'(x) = \dfrac{1}{2x^2}$, on prend $\lambda(x) = \dfrac{-1}{2x}$, ainsi l'ensemble des solutions de E sur $]0,+\infty[$ est $\left\{x \longmapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Q2. Si y est solution de E sur $[0,+\infty[$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,+\infty[$, $y(x) = \lambda x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$
La fonction y est solution de E sur $[0,+\infty[$, donc en particulier elle sera dérivable en 0, et $x \longmapsto \sqrt{x}$ ne l'est pas en 0 à droite, donc l'ensemble des solutions sur $[0,+\infty[$ est vide.

PROBLÈME

Remarque : Pour ne pas confondre l'ensemble F et la fonction F, de préférence on désigne par G la fonction définie par $G(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. cela étant.

Q1. **Questions préliminaire**

a/ Si f est positive sur $[a, +\infty[$ alors il y'a équivalence entre les propositions (i) et (ii).

b/ Si non $(i) \Longrightarrow (ii)$ seulement. Pour plus de détail voir la question 10) a) et b).

PARTIE I : Exemples et propriétés

Q2. a/ • Tout d'abord $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

• l'application $t \longmapsto 0$ est un élément de E, donc $E \neq \emptyset$.

• Soient $(f, g, \lambda) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$ et $x > 0$ alors $t \longmapsto f(t) + \lambda g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ de plus $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)\mathrm{e}^{-xt} + \lambda g(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant |f(t)\mathrm{e}^{-xt}| + |\lambda||g(t)\mathrm{e}^{-xt}|$, et $t \longmapsto |f(t)\mathrm{e}^{-xt}| + |\lambda||g(t)\mathrm{e}^{-xt}|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par comparaison $x \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt} + \lambda g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^+$. Donc $f + \lambda g \in E$.

b/ • Il est évident que $F \subset E$ car $t \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

• L'application $x \longmapsto 0$ est un élément de F, donc $F \neq \emptyset$.

• Soient $(f, g, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}$, $\exists M_1, M_2$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ |f(x)| \leqslant M_1$ et $|g(x)| \leqslant M_2$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ |f(x) + \lambda g(x)| \leqslant M_1 + |\lambda| M_2$ et $f + \lambda g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $f + \lambda g \in F$.

c/ Soit $f \in E$, montrons que $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, soit donc $x > 0$ l'application $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est convergente, ainsi $\mathcal{L}(f)$ est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

La linéarité de $\mathcal{L}$ est évidente.

Q3. a/ $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \dfrac{1}{x}$.

b/ h_λ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x > 0$; $\mathrm{e}^{-(x+\lambda)t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en 0 la fonction $t \rightarrow \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}$ est continue $[0, 1]$ donc $h_\lambda \in E$, de plus $\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x + \lambda}$.

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$, $t^n \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, donc $\exists A > 0$, $\forall t \geqslant A$; $t^n \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \leqslant 1$, donc $t^n \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$.

• g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

• On a $\dfrac{x}{2} > 0$, et $f \in E$, donc $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par comparaison l'application $t \longmapsto t^n \mathrm{e}^{-xt} f(t) = g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $g_n \in E$.

Q5. **Transformée de Laplace d'une dérivée** f est croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, donc $f' \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$, donc pour montrer que $f' \in E$, il suffit de montrer que $A \longmapsto \int_0^A f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

Soit $A \geqslant 0$ et $x > 0$, $\int_0^A f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = f(A)\mathrm{e}^{-xA} - f(0) + x\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

L'application $A \longmapsto \int_0^A f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $A \to +\infty$ car $f \in E$ et f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $f(A)\mathrm{e}^{-xA} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par suite $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Q6. **Régularité d'une transformée de Laplace**

a/ Soit $x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$, posons $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, t) \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

• $\forall x > 0$; $t \longmapsto g(x, t)$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $f \in E$.

• $\forall t \geqslant 0$; $x \longmapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de plus $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-xt} = -g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}$, or $g_1 \in E$, donc $x \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

• Soit $\alpha > 0$. On a $\forall x \in [\alpha, +\infty[; \forall t \geqslant 0$; $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant |tf(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}|$, et $t \longmapsto tf(t)\mathrm{e}^{-\alpha t} = g_1(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$.

b/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la propriété suivante : $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,+\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$. Montrons P_n par récurrence : Pour $n=1$ c'est la question 6 a).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que la propriété est vraie à l'ordre n, montrons la propriété P_{n+1}.
Puisque $g_n \in E$ en appliquant 6 a) $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, donc $\mathcal{L}(f)^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n+1)} = -(-1)^n\mathcal{L}(f_n)$ où $f_n : t \longmapsto tg_n(t) = t^{n+1}f(t) = g_{n+1}(t)$ et le résultat en découle, et $\forall x>0;\ \mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)(x)$.

PARTIE II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Q7. a/ Soit $M>0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|f(t)| \leqslant M$, donc $\forall x>0, |\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \dfrac{M}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

b/ f' est bornée et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $f' \in F$, de la question précédente, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f')(x) = 0$.
$f \in F$, donc bornée et de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut appliquer la question 5) puisque $F \subset E$, par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

Q8. **Théorème de la valeur finale**

a/ • f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
• $\exists A>0$ tel que $\forall t \geqslant A$; $|f(t)-\ell| \leqslant 1$, donc f est bornée sur $[A,+\infty[$, f est continue sur $[0,A]$ qui est compact donc f est bornée aussi sur $[0,A]$ si on pose $M_1 = \sup\limits_{[A,+\infty[} |f(t)|$ et $M_2 = \sup\limits_{[0,A]} |f(t)|$ et $M = \max(M_1,M_2)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}^+; |f(t)| \leqslant M$. Ainsi $f \in F$.

b/ Le changement $a_n t = x$ de variable dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t$ et le fait que $\forall n \in \mathbb{N};\ a_n \geqslant 0$ donne le résultat.

c/ • $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = \mathrm{e}^{-x}\ell$ car $\dfrac{x}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$
• L'application $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ell$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
• De la question précédente f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc $\exists M>0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+;\ |f(t)| \leqslant M$, ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ |h_n(x)| \leqslant M\mathrm{e}^{-x}$, et l'application $t \longmapsto M\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
• On peut appliquer le théorème de convergence dominée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t = \ell\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t = \ell$.

d/ La suite $(a_n\mathcal{L}(f)(a_n))_n$ admet une limite en $0 \in \overline{]0,+\infty[}$ et ceci pour toute suite $(a_n)_n$ qui converge vers 0, alors de la caractérisation séquentielle de la limite, l'application $x \longmapsto x\mathcal{L}(f)(x)$ admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.
Si $\ell \neq 0$, alors $x\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ell$, ainsi $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$.

Q9. a/ On a $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ R(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$, f étant continue donc R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+;\ R'(x) = -f(x)$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$ donc R est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $R \in F \subset E$.
Soit $x>0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} R'(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.
Si $B>0$, alors $\displaystyle\int_0^B R'(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = R(B)\mathrm{e}^{-xB} - R(0) + x\int_0^B R(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \xrightarrow[B\to+\infty]{} -R(0) + x\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$
D'où $\forall x>0;\ \mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$

b/ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$, donc $\exists A>0$ tel que $\forall t \geqslant A$, $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x\mathcal{L}(R)(x)| \\ &\leqslant x\int_0^A |R(t)|e^{-xt}dt + x\int_A^{+\infty} |R(t)|e^{-xt}dt \\ &\leqslant x\int_0^A |R(t)|dt + x\varepsilon\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \\ &\leqslant x\int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon \end{aligned}$$

c/ $\exists\alpha > 0$, $\forall x \in]-\alpha,\alpha[$; $x\displaystyle\int_0^A |R(t)|dt \leqslant \varepsilon$. donc $\forall x \in]-\alpha,\alpha[$; $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant 2\varepsilon$. ainsi $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = R(0)$.

Q10. a/ En prenant $x \longmapsto 1 - \cos x$ comme primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ alors, posons $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, f est continue sur $\mathbb{R}^+$, de plus

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt \\ &= \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $t \longmapsto 1-\cos t$ est bornée sur $[1,+\infty[$, de plus $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par conséquent G admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

b/ Le changement de variable $t = n\pi + u$, donne :

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u+n\pi}du \\ &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin u du \\ &\geqslant \frac{2}{(n+1)\pi} \end{aligned}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(n+1)\pi}$ est divergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ aussi, par suite l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt$ est divergente. Alors la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

c/

$$\begin{aligned} \int_0^X (\sin t)e^{-xt}dt &= \operatorname{Im}\int_0^X e^{it}e^{-xt}dt \\ &= \operatorname{Im}\int_0^X e^{(i-x)t}dt \\ &= \operatorname{Im}\frac{1}{i-x}\left(e^{(i-x)X} - 1\right) \\ &= \frac{-1}{1+x^2}\left(e^{-xX}(x\sin X + \cos X) - 1\right) \end{aligned}$$

$\forall x > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$; $|(\sin t)e^{-xt}| \leqslant e^{-xt}$ et $e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, par comparaison $t \longmapsto (\sin t)e^{-xt}$ qui est continue en 0 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus en faisant tendre X vers $+\infty$ dans la formule précédente on obtient : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-xt}dt = \frac{1}{1+x^2}$

d/ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, bornée sur $[1,+\infty[$, donc f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et $e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ alors $f \in E$

De la question **6)** $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$.

Soit $x > 0$, $\mathcal{L}(f)'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}$

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \lambda - \arctan x$

La question **7)** donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$, donc $\lambda = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

De la question **9)** on a montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \ell$,

D'après la question **10.*b*)** fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc on ne peut pas appliquer le résultat de **9.**

Mais dans la démonstration de **9.** on a utiliser seulement le fait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$ et ceci est vrai ici même si f n'est pas intégrable.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}}$.

Fin de l'épreuve

Lycée technique TAZA