CCP PSI 1
un corrigé.

1 Cas d'une matrice à coefficients constants.

1.1 Posons $X(t) = e^{\lambda t}V$. X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $X'(t) = \lambda e^{\lambda t}V$. Ainsi $X'(t) - AX(t) = e^{\lambda t}(\lambda V - AV)$. L'exponentielle ne s'annulant pas $X'(t) - AX(t) = 0$ équivaut à $AV = \lambda V$. V étant non nul, ceci s'exprime en disant que V est vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

1.2.1 La calculatrice (autorisée) permet de trouver des vecteurs propres. On a

$$A\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a ainsi trouvé quatre valeurs propres. Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, il ne saurait en exister d'autre (on travaille en dimension 4) et ces sous-espaces propres sont des droites vectorielles dont les vecteurs trouvés ci-dessus forment des bases.
La question précédente nous donne quatre solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ qui sont

$$X_1(t) = e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_2(t) = e^{-it}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_4(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'indépendance des quatre vecteurs propre donne celle des fonctions X_k (si $\sum \lambda_k X_k = 0$, on se ramène à une combinaison des vecteurs en appliquant en 0). (X_1, X_2, X_3, X_4) est donc un système fondamental de solutions de (E_0). La solution générale de (E_0) est une combinaison linéaire des X_k et donc du type

$$X(t) = c_1 e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-it}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les c_k étant des complexes arbitraires.

1.2.2 En développant le produit matriciel, on obtient les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1'(t) = & & -x_2(t) & +x_3(t) & -x_4(t) & +te^t \\ x_2'(t) = & & 2x_2(t) & & & +e^t \\ x_3'(t) = & & x_2(t) & +x_3(t) & & \\ x_4'(t) = & x_1(t) & -x_2(t) & +x_3(t) & & -te^t \end{array}\right.$$

Comme dans le cas complexe, pour résoudre (E_0), il suffit de trouver quatre solutions réelles indépendantes. On a déjà deux solutions X_3 et X_4. Le système étant à coefficients réels les parties réelle et imaginaire de X_1 sont aussi solutions. Ce sont les fonctions

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Il est quasi immédiat que (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) forme une famille libre et donc une base de S_0. Pour résoudre (E) il suffit alors de trouver une solution particulière. Un calcul au brouillon (en procédant dans l'ordre indiqué par l'énoncé mais en se contentant pour chaque équation de trouver UNE solution) nous amène à poser $Y(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -te^t \\ (-t+1)e^t \end{pmatrix}$ do,t il est facile de vérifier qu'elle est solution de (E). Finalement, la solution générale est du type

$$\begin{pmatrix} -c_1\sin(t) + c_2\cos(t) + (t-1)e^t \\ c_3e^{2t} - e^t \\ c_3e^{2t} + c_4e^t - te^t \\ c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_4e^t + (-t+1)e^t \end{pmatrix}$$

Pour touver la solution au problème de Cauchy avec $X(0) = (-1,-1,-1,0)$, on à un système à résoudre dont les inconnues sont les c_i. Le calcul au brouillon donne la solution

$$X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)t^t \\ -e^t \\ (-t-1)e^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

2 Matrice résolvante.

2.1 $Y = \Phi_{t_0}^{-1}(V)$ est l'unique élément de S_0 tel que $Y(t_0) = V$. Par définition, on a donc $Y = X$. Ainsi,

$$\Phi_t \circ \Phi_{t_0}(V) = \Phi_t(X) = X(t)$$

2.2.1 La matrice deΦ_{t_0} dans les bases $(X_1, \dots, X_n)$ et $(C_1, \dots, C_n)$ est la matrice carrées d'ordre n dont la colonne j est l'expression de $\Phi_{t_0}(X_j) = X_j(t_0)$ dans la base $(C_1, \dots, C_n)$. Cette dernière base étant la base canonique, la matrice en question est $W(t_0)$.

2.2.2 D'après les propriétés des représentations matricielles, o,n a

$$\begin{aligned} R(t,t_0) &= \text{Mat}(\Phi_{t_0}, (X_i), (C_i))\,(\text{Mat}(\Phi_t, (X_i), (C_i)))^{-1} \\ &= \text{Mat}(\Phi_{t_0}, (X_i), (C_i))\text{Mat}(\Phi_t^{-1}, (C_i), (X_i)) \\ &= \text{Mat}(\Phi_{t_0} \circ \Phi_t^{-1}, (C_i), (C_i)) \end{aligned}$$

et cette matice ne dépend pas du choix des X_i.

2.3.1 Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Notons X l'unique élément de S_0 tel que $X(t_0) = V$. La question **2.1** indique que pour tout $t \in I$, $X(t) = R(t,t_0)V$. En dérivant cette relation, on obtient $X'(t) = R'(t,t_0)V$ pour tout $t \in I$. Comme $X'(t) = A(t)X(t) = A(t)R(t,t_0)V$, on a donc $A(t)R(t,t_0)V = R'(t,t_0)V$. Ceci étant vrai pour tout V, les matrices $A(t)R(t,t_0)$ et $R'(t,t_0)$ sont égales (les applications linéaires canoniquement associées l'étant) :

$$R'(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$$

On remarque que l'on a justifié que $X(t) = R(t,t_0)V$ est la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$ (il ne s'agit pas d'une déduction mais c'est au contraire ce qui nous a permis d'obtenir le premier résultat).

2.3.2 Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Notons X l'unique élément de S_0 tel que $X(t_0) = V$. On a (question précédente)

$$R(t_2,t_1)R(t_1,t_0)V = R(t_2,t_1)X(t_1)$$

La question précédente indique encore que $Y(t) = R(t,t_1)X(t_1)$ est l'unique élément de S_0 tel que $Y(t_1) = X(t_1)$. Comme X convient, on a (par unicité) $Y = X$. Ainsi

$$R(t_2,t_1)X(t_1) = X(t_2)$$

Enfin, la question précédente donne aussi $R(t_2, t_0)V = X(t_2)$.
En combinant les résultats précédents, on a donc $R(t_2, t_0)V = R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)V$. Ceci étant vrai pour tout V on obtient (comme en question précédente)

$$R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)$$

En particulier $R(t_0, t_0) = R(t_0, t)R(t, t_0)$ (prendre $t_2 = t_0$ et $t_1 = t$). Mais, par définition, $R(t_0, t_0) = I_n$. Ainsi, $R(t, t_0)$ est inversible et

$$R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$$

2.4.1 On a $X'(t) = R'(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)R(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t)$. Comme X est solution de (E) on en déduit que

$$A(t)X(t) + B(t) = A(t)R(t, t_0)V(t) + R(t, t_0)V'(t) = A(t)X(t) + R(t, t_0)V'(t)$$

On a ainsi montré que

$$R(t, t_0)V'(t) = B(t)$$

2.4.2 Avec **2.3.2** on a donc $V'(t) = R(t, t_0)^{-1}B(t) = R(t_0, t)B(t)$. Par théorème fondamental, $W : t \mapsto \int_t^{t_0} R(t_0, u)B(u)\, du$ est une primitive sur l'intervalle I de la fonction continue $u \mapsto R(t_0, u)B(u)$. Comme on vient de voir que V est une autre de ces primitives, V et W sont égales à une constante additive près. Or $V(t_0) = X(t_0)$ (car $R(t_0, t_0) = I_n$) et $W(t_0) = 0$. La constante est donc $X(t_0)$ et on a

$$V(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u)\, du$$

2.4.3 *Les deux questions précédentes correspondent à une recherche par conditions nécessaire. Comme on cherche UNE solution particulière, c'est la réciproque qui nous intéresse. En imposant, arbitrairement, $X(t_0) = 0$ dans la formule précédente, on est amenés à poser $Y(t) = R(t, t_0)\int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u)\, du$. Par linéarité du passage à l'intégrale, ceci revient à choisir $Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, u)B(u)\, du = \int_{t_0}^t R(t, u)B(u)\, du$. Ceci explique la formule de l'énoncé.*
Avec **2.3.2** et par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, t_0)R(t_0, u)B(u)\, du = R(t, t_0)\int_{t_0}^t R(t_0, u)B(u)\, du = R(t, t_0)W(t)$$

Comme à la question précédente, W est une primitive sur I de $u \mapsto R(t_0, u)B(u)$. On peut donc dériver la relation précédente pour obtenir

$$Y'(t) = R'(t, t_0)W(t) + R(t, t_0)W'(t) = A(t)R(t, t_0)W(t) + R(t, t_0)R(t_0, t)B(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

et Y est donc solution de (E).

3 Une application de la résolvante

3.1.1 On raisonne par conditions nécessaires. Soit P un polynôme non nul solution, m son degré et a_m son coefficient dominant. Dans $X(X-1)P''+3P'-6P$, le coefficient de X^m est $(m^2-m-6)a_m$. Comme $a_m \neq 0$, on en déduit que $m = 3$. Il existe donc a, b, c, d tels que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et alors $X(X-1)P'' + 3P' - 6P = (3a - 4b)X^2 + (4b - 6c)X + 3c - 6d$. La nullité de ce polynôme donne $4b = 3a = 6c = 12d$ et les seuls polynômes envisageables sont ceux du type

$$d(4X^3 + 3X^2 + 2X + 1)$$

On vérifie, réciproquement, que ces polynômes sont solution de (e_0). La contrainte $P(0) = 1$ donne

$$P = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$

3.1.2 On a $Q'(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$ et $Q''(t) = \frac{6}{(1-t)^4}$. En injectant ces expressions dans (e_0) on obtient que Q est solution de (e_0) sur $]-1,1[$.

3.1.3 *La structure logique de l'énoncé n'est pas lumineuse. Il s'agit de faire un raisonnement par conditions nécessaires puis de faire une réciproque.*

Supposons que y soit solution DSE de (e). Il existe alors des réels a_k et un réel $R > 0$ tel que

$$\forall t \in]-R,R[,\ y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k,\ y'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}t^k,\ y''(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}t^k$$

En réinjectant dans l'équation, on obtient

$$\forall t \in]-R,R[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k-3)(k+2)a_k - (k+1)(k-3)a_{k+1}\right) t^k = 0$$

Par unicité du DSE de la fonction nulle, on a donc

$$\forall k \geq 0,\ (k+1)(k-3)a_{k+1} = (k-3)(k+2)a_k$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{3\},\ a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1} a_k$$

Réciproquement, soit (a_n) une suite vérifiant les relations précédentes. Une récurrence immédiate donne

$$\forall k \geq 4,\ a_k = \frac{k+1}{5} a_4$$

- Si $a_4 \neq 0$ alors $\forall n \geq 4,\ a_n \neq 0$. Si $x > 0$, $\forall k \geq 4,\ \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = \frac{|x|(k+2)}{k+1} \to |x|$ quand $k \to +\infty$. Par règle de D'Alembert, $\sum(a_n x^n)$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. Le rayon de convergence de $\sum(a_n x^n)$ vaut $R = 1$ et la somme de la série est, par construction, solution de (e_0) sur $]-1,1[$.
- Si $a_4 = 0$ alors $\forall k \geq 4,\ a_k = 0$. $\sum(a_k x^k)$ est de rayon de convergence infini et la somme de la série est, par construction, solution de (e_0) sur $\mathbb{R}$. Cette somme est $a_0 P$ et est non nulle si et seulement si $a_0 \neq 0$.

L'expression générale des solutions DSE est ainsi

$$y(t) = \frac{a_4}{5} \sum_{k \geq 4} (k+1)t^k + a_0 P(t)$$

Notons que $Q(t)$ est la dérivée de $\frac{1}{1-t}$ et que l'on a donc $Q(t) = \sum_{k\geq 0}(k+1)t^k$. Pour $a_4 = 0$ et $a_0 = 1$, on retrouve la solution P alors que pour $a_4 = 5$ et $a_0 = 1$, on retrouve la solution Q.

3.2.1 On a immédiatement

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \ \text{ avec } \ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \ \text{ et } \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$

3.2.2 Avec les formules de Cramer, on obtient

$$W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0 g_0' - f_0' g_0} \begin{pmatrix} g_0' & -g_0 \\ -f_0' & f_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$R(t,t_0) = W(t)W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0 g_0' - f_0' g_0} \begin{pmatrix} f g_0' - g f_0' & g f_0 - f g_0 \\ f' g_0' - g' f_0' & g' f_0 - f' g_0 \end{pmatrix}$$

3.3.1 On a ici

$$a(t) = \frac{3}{t(t-1)},\ b(t) = -\frac{6}{t(t-1)},\ \varphi(t) = \frac{20t^4}{t(t-1)}$$

et les formules deviennent

$$A(t) = \frac{1}{t(t-1)}\begin{pmatrix} 0 & t(t-1) \\ 6 & -3 \end{pmatrix},\ B(t) = \frac{1}{t(t-1)}\begin{pmatrix} 0 \\ 20t^4 \end{pmatrix}$$

3.3.2 On a

$$\det(W(u)) = P(u)Q'(u) - P'(u)Q(u) = -\frac{20u^3}{(u-1)^3}$$

$$Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4}{(1-t)^2(1-u)^2}$$

3.3.3 On a cette fois

$$R(t,u)B(u) = \frac{1}{u(u-1)\det(W(u))}\begin{pmatrix} ? & Q(t)P(u) - P(t)Q(u) \\ ? & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 20u^4 \end{pmatrix}$$

et seule le première coordonnée de cette matrice nous intéresse ce qui explique que les coefficients non importants sont notés ?. Avec la question précédente, on obtient

$$R(t,u)B(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-t)^2}(4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) \\ ? \end{pmatrix}$$

On en déduit que la première coordonnée de $X(t) = \int_{t_0}^t R(t,u)B(u)\ du$ vaut

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2}\int_{t_0}^t (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\ du$$

Or, X est solution de (E) sur $]0,1[$ (question **2.4.3**) et donc y est solution de (e) sur $]0,1[$. Les quantités écrites existant (intégrales de fonctions continues sur les segments), on a aussi

$$\forall t \in]0,1[,\ y(t) = \frac{1}{(1-t)^2}\int_0^t (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\ du + cQ(t)\ \text{ avec }\ c = \int_{t_0}^0 (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\ du$$

Comme Q est solution de l'équation homogène, on a donc $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}\int_0^t (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\ du$ qui est encore solution de (e) sur $]0,1[$. Cette solution s'écrit, après calcul

$$y_0(t) = \frac{2t^5(5t-6)}{3(t-1)^2}$$

Raisonnons une dernière fois par conditions nécessaires pour trouver les solutions de (e) sur $[0,1[$.

- Si y convient alors y est solution sur $]0,1[$. Sur $]0,1[$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe donc des constantes a et b telles que

  $$\forall t \in]0,1[,\ y(t) = \frac{2t^5(5t-6)}{3(t-1)^2} + aP(t) + bQ(t)$$

  Par continuité de y et du second membre, l'expression rets valable en 0.
- Réciproquement, pour tout choix de a et b, la fonction définie par $y(t) = \frac{2t^5(5t-6)}{3(t-1)^2} + aP(t) + bQ(t)$ est de classe C^2 sur $[0,1[$. Elle vérifie l'équation sur $]0,1[$ et, par continuité, elle la vérifie aussi en 0.

On a ainsi trouvé l'expression générale d'une solution sur $[0,1]$. $y(0) = y'(0) = 0$ impose $a+b = 0$. La solution générale au problème de Cauchy proposé est ainsi

$$y(t) = \frac{2t^5(5t-6)}{3(t-1)^2} + a(P(t) - Q(t))$$