E3A 2012 - MP - Maths A

Partie I

1. La fonction $x \longmapsto x$ (fonction polynôme) et l'exponentielle (somme de série entière de rayon de convergence infini) sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, leur produit l'est donc aussi.

2. Pour $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x \geq 0 \iff x \geq -1$. Donc

- sur $]-\infty, -1]$, f décroît de 0 (croissances comparées) à $f(-1) = -1/e$;
- sur $[-1, +\infty[$, f croît de $-1/e$ à $+\infty$.

3.

4. Voir le tableau de variation ; l'intervalle image est $[-1/e, +\infty[$.

5. Il suffit de lire le paragraphe suivant, et de prendre pour g la réciproque de la bijection décrite en 4. Puisque f est continue, g l'est ; et, puisque f est de classe C^∞, et que f' ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$, g est de classe C^∞ sur $f(]-1, +\infty[) =]-1/e, +\infty[$.

Partie II

1. Par définition de g, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on a $g(a) = b$ si et seulement si $f(b) = a$ et $b \in [-1, +\infty[$. En appliquant cela à $(a, b) = (0, 0)$ (respectivement $(-1/e, -1)$, respectivement $(e, 1)$), on obtient $g(0) = 0$ (respectivement $g(-1/e) = -1$, respectivement $g(e) = 1$).

2. Il suffit de dériver la relation $g(x)e^{g(x)} = x$; on obtient, pour tout $x \in]-1/e, +\infty[$, $\quad g'(x)\big(1 + g(x)\big)e^{g(x)} = 1 \quad$ soit $\quad g'(x) = \dfrac{e^{-g(x)}}{1 + g(x)}$.

3. Le graphe s'obtient à partir du graphe de la restriction de f à $[-1, +\infty[$ par symétrie par rapport à la droite $y = x$.

La fonction g est continue en $-1/e$, donc $g(x)$ tend vers -1 quand x tend vers $-1/e$, et $g(x) \geq -1$ par définition de g. Par suite, g' a pour limite $+\infty$ en $-1/e$ et, par continuité de g, $\dfrac{g(x) - g(-1/e)}{x + 1/e}$ a pour limite $+\infty$ en $-1/e$ (théorème dit de prolongement de la dérivée). La **courbe représentative** de g a donc une tangente verticale en $-1/e$, et la **fonction** g n'est pas dérivable en $-1/e$.

4. Par définition, g est une bijection de $[-1/e, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$, croissante en tant que réciproque d'une fonction croissante (ou en utilisant 2). Elle a donc pour limite $\sup g([-1/e, +\infty[) = +\infty$ en $+\infty$.

On en déduit que $\dfrac{g(x)}{x} = e^{-g(x)}$ a pour limite 0 en $+\infty$; la courbe admet donc une direction asymptotique horizontale. Puisque g n'a pas de limite finie en $+\infty$, la courbe n'a pas d'asymptote horizontale, il s'agit donc d'une branche parabolique de direction horizontale.

5. (a) Puisque g est continue, on a, pour tout $x \in]-1/e, +\infty[$, $h(u) = \int_0^u g(t)\,dt$. Le changement de variable $x = g(t)$, soit $t = f(x)$, qui ne pose pas de problème puisque g est un C^1-difféomorphisme, donne alors

$$h(u) = \int_{g(0)}^{g(u)} x f'(x)\,dx = \int_0^{g(u)} (x^2 + x)e^x\,dx = \big[(x^2 - x + 1)e^x\big]_{x=0}^{g(u)}$$

En tenant compte de $g(u)e^{g(u)} = u$, cela donne $h(u) = \big(g(u)^2 - g(u) + 1\big)e^{g(u)} - 1 = ug(u) - u + e^{g(u)} - 1$.

(b) Les fonctions g et h sont continues en $-1/e$, donc

$$\int_{-1/e}^0 g(t)\,dt = -\lim_{u \to -1/e} h(u) = -\big(g(-1/e)^2 - g(-1/e) + 1\big)e^{g(-1/e)} - 1 = 1 - 3e^{-1}$$

Partie III

1. Si $c = 1$, une récurrence immédiate donne $u_n = 1$ pour tout n.

2. Soit φ la fonction $x \longmapsto c^x = e^{x \ln c}$. Cette fonction est continue sur $\mathbf{R}$. Puisque $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour tout n, on obtient donc, en passant à la limite dans cette relation, $\ell = e^{\ell \ln c}$.

On en déduit : $f(-\ell \ln c) = (-\ell \ln c)e^{-\ell \ln c} = \dfrac{-\ell \ln c}{\ell} = -\ln c$.

D'autre part, on a $u_0 = c < e^{1/e} < e$; et, si l'on suppose $u_n \leq e$ à un rang n, alors $u_{n+1} = e^{u_n \ln c} \leq e^{e \times (1/e)} \leq e$. Donc $u_n \leq e$ pour tout n, et donc $\ell \leq e$. Par suite, $\ell \ln c = \ln \ell \leq 1$, et donc $-\ell \ln c \geq -1$.

Puisque $f(-\ell \ln c) = -\ln c$ et $-\ell \ln c \geq -1$, on a $g(-\ln c) = -\ell \ln c$ par définition de g, ce qui fournit la relation demandée.

3. (a) Puisque $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$, on a $\sqrt{2}^1 \leq \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}^2$ soit $u_0 \leq u_1 \leq 2$.

(b) Considérons de nouveau $\varphi : x \longmapsto \sqrt{2}^x = e^{x \ln \sqrt{2}}$. Puisque $\sqrt{2} \geq 1$, cette fonction est croissante ; elle vérifie de plus $\varphi(2) = 2$.

Supposons qu'on ait, à un rang n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, ce qui est vrai pour $n = 0$ d'après (a). Alors $\varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1} \leq \varphi(2)$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$; autrement dit, la même relation est vraie au rang $n + 1$. Par récurrence, la suite est donc bien croissante et majorée par 2.

(c) Dans ces conditions, on sait que la suite converge, vers une limite $\ell \leq 2$.

D'autre part, on a $f(-\ln 2) = -\ln 2 e^{-\ln 2} = -\dfrac{\ln 2}{2} = -\ln \sqrt{2} = -\ln c$; et $-\ln 2 \geq -1$. Par définition de g, on a donc $g(-\ln c) = -\ln 2$.

La question 2 donne alors : $\ell = \dfrac{-g(-\ln c)}{\ln c} = \dfrac{\ln 2}{\ln \sqrt{2}} = 2$.

4. (a) La fonction w est clairement strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et a pour limites 1 en 0 et 0 en $+\infty$.

(b) Notons déjà que $w(1/e) = e^{-1} = 1/e$. Le tableau de variations indique donc que $w(]0, 1/e]) = [1/e, +\infty[$ et $w([1/e, +\infty[) =]0, 1/e]$.

D'autre part, on a ici $\ln c = -e$, donc $u_{n+1} = w(u_n)$ pour tout n. Notons z la fonction $w \circ w$; les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vérifient alors la récurrence $v_{n+1} = z(v_n)$.

Les remarques précédentes montrent que l'intervalle $]0, 1/e]$ est stable par z. Puisque $u_0 = 1/e^e$ est dans cet intervalle, tous les termes de la suite (u_{2n}) le sont donc aussi. De même, $u_1 = w(u_0)$ appartient à $[1/e, +\infty[$, stable par z, donc tous les termes de la suite (u_{2n+1}) sont dans cet intervalle.

Enfin, puisque w est décroissante, la fonction z est croissante ; les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc monotones, le sens de variation dépendant de leurs deux premiers termes respectifs, ce qui finit d'établir les points i. et ii.

D'autre part, on a $\ln(u_2) = -eu_1 = -e \times e^{-eu_0} = -\exp(1 - e^{1-e})$ et $\ln(u_0) = -e$. On a donc clairement $-\ln(u_2) < -\ln(u_0)$, soit $u_2 > u_0$.

La suite (u_{2n}) est donc croissante. Puisque $u_{2n+1} = w(u_{2n})$ pour tout n, et que w est décroissante, la suite (u_{2n+1}) est donc décroissante.

Ces deux suites étant respectivement majorée et minorée par $1/e$, elles sont donc toutes deux convergentes, leurs limites étant des points fixes de la fonction d'itération z. De plus, la suite (u_{2n}) est majorée par $1/e < 1$, et la suite (u_{2n+1}) est majorée par $u_1 = \exp(-eu_0) < 1$, ces deux points fixes sont donc nécessairement dans $[0, 1]$.

Or, l'énoncé affirme que $x \longmapsto z(x) - x$ est strictement décroissante sur cet intervalle, donc s'y annule au plus une fois ; z n'y a donc qu'un point fixe. Les deux suites ont donc la même limite ℓ, et donc (u_n) a pour limite ℓ. Enfin, on a vu que $1/e$ est point fixe de w, donc aussi de z, et $1/e$ appartient à $[0, 1]$: la limite est donc $1/e$.

Partie IV

1. (a) Avec $u_n = (1 + 1/n)^n$, on a $\ln u_n = n \ln(1 + 1/n) \sim n \times (1/n) = 1$ quand n tend vers $+\infty$, donc $u_n = \exp(\ln u_n)$ a pour limite e.

(b) Avec $a_n = n^{n-1}/n!$ pour $n \geq 1$, on a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e$, donc la série entière S a pour rayon de convergence $1/e$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$v_n = \ln \frac{(n+1)!}{n!} + (n+1) - n + (n+1)\ln(n+1) - n\ln n + \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n} = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) - 1$$
$$= \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(n^{-3})\Big) - 1$$
$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o(n^{-2}) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o(n^{-2}) - 1$$

donc finalement $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

Par suite, $v_n = O(n^{-2})$, et donc $\sum v_n$ converge. Classiquement, la suite $\ln u_n$ est donc convergente ; soit ℓ sa limite. La suite (u_n) est donc convergente de limite $L = e^{\ell}$; on notera que $L > 0$.

On a alors, pour $n \geq 1$, $\dfrac{n^{n-1}}{e^n n!} = \dfrac{1}{u_n}\cdot\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{Ln\sqrt{n}}$ puisque $L \neq 0$.

(b) On en déduit que $\dfrac{n^{n-1}}{e^n n!} = O(n^{-3/2})$ donc que la série converge.

(c) Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = R = e^{-1}$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $\left|\dfrac{n^{n-1}}{n!}z^n\right| = \dfrac{n^{n-1}}{e^n n!}$; d'après (b), la série entière converge donc absolument en z, et donc converge en z.

Partie V - A

1. Soit h dans $\mathcal{E}_R$; alors $h = \psi^0 h$ avec $0 \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathcal{E}_R$, donc $h \in \mathcal{L}_R$; par suite $\mathcal{E}_R \subset \mathcal{L}_R$, et donc en particulier $\mathcal{L}_R \neq \emptyset$.

Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{L}_R$; soient n_1, n_2 dans $\mathbf{N}$ et h_1, h_2 dans $\mathcal{E}_R$ vérifiant $f_i = \psi^{n_i}h_i$ pour $i \in \{1,2\}$; soit $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$. En supposant par exemple $n_1 \leq n_2$, on a alors, pour $x \in\,]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$[\lambda f_1 + \mu f_2](x) = \frac{\lambda x^{n_2-n_1}h_1(x) + \mu h_2(x)}{x^{n_2}}$$

et la fonction au numérateur appartient à $\mathcal{E}_R$ puisque $n_2 - n_1 \in \mathbf{N}$; donc $\mathcal{L}_R$ est stable par combinaisons linéaires, et donc est un sous-espace de $\mathcal{K}_R$.

2. Posons $h = \psi^n a$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathcal{E}_R$. Il existe une suite (b_n) telle que $a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ pour $x \in\,]-R,R[\setminus \{0\}$, et donc, toujours pour $x \in\,]-R,R[\setminus \{0\}$, $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{k-n} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \alpha_i(h)x^i$ avec $\alpha_i(h) = b_{i+n}$ si $i \geq -n$, et $\alpha_i(h) = 0$ pour $i < -n$, d'où l'existence de la famille cherchée.

Supposons maintenant déterminés deux telles familles (α_i) et (β_i) indexées par $\mathbf{Z}$. On peut choisir $p \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha_i = \beta_i = 0$ pour $i < -p$; on a alors, pour $x \in\,]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$h(x) = \sum_{i=-p}^{+\infty} \alpha_i x^i = \sum_{i=-p}^{+\infty} \beta_i x^i \quad \text{d'où} \quad x^p h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k-p} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{k-p} x^k$$

Par unicité du développement en série entière, on a alors $\alpha_{k-p} = \beta_{k-p}$ pour tout $k \geq 0$, donc $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$; on a donc unicité de la famille cherchée.

3. Soient h_1 et h_2 dans $\mathcal{L}_R$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$. Pour tout $x \in\,]-R,R[\setminus \{0\}$, on a alors $\lambda h_1 + \mu h_2 = \sum_{i\in\mathbf{Z}}\big(\lambda\alpha_i(h_1) + \mu\alpha_i(h_2)\big)x^i$, et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers négatifs i tels que $\lambda\alpha_i(h_1) + \mu\alpha_i(h_2) \neq 0$. Par unicité de la décomposition, on a donc, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $\lambda\alpha_i(h_1) + \mu\alpha_i(h_2) = \alpha_i(\lambda h_1 + \mu h_2$. Donc, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, α_i est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_R$.

D'autre part, si $h \in \mathcal{E}_R$, alors sa décomposition sous la forme du 2. est en fait son développement en série entière, avec donc des coefficients nuls pour $i < 0$, et donc en particulier α_{-1} est bien nulle sur $\mathcal{E}_R$.

4. Posons $h = \psi^n a$ avec $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathcal{E}_R$. Alors, pour tout $x \in\,]-R,R[\setminus \{0\}$, $h'(x) = \dfrac{xa'(x) - na(x)}{x^{n+1}}$. La fonction $x \longmapsto xa'(x) - na(x)$ étant clairement dans $\mathcal{E}_R$, la fonction h' est bien dans $\mathcal{L}_R$.

De plus, ce calcul et le raisonnement du 2 montrent que $\alpha_{-1}(h')$ est le coefficient de x^n dans le développement en série entière de $xa'(x) - na(x)$. Or, si $a(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} b_k x^k$, alors ce coefficient vaut $nb_n - nb_n = 0$, et donc $\alpha_{-1}(h') = 0$.

5. (a) Pour $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$, on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$. La première forme montre que f'/f est dans $\mathcal{L}_R$, la deuxième donne $\alpha_0(f'/f) = \alpha_{-1}(f'/f) = 1$, les autres coefficients $\alpha_i(f'/f)$ étant tous nuls.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$, on a $\dfrac{1}{f(x)^n} = \dfrac{e^{-nx}}{x^n}$. La fonction $x \longmapsto e^{-nx}$ étant clairement développable en série entière sur $\mathbf{R}$, $1/f^n$ est bien dans $\mathcal{L}_R$. De plus, pour $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{f(x)^n} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i n^i x^{i-n}}{i!} = \sum_{k=-n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n} n^{k+n}}{(k+n)!} x^k$$

Donc, pour $k \in \mathbf{Z}$, $\alpha_k(1/f^n) = \dfrac{(-1)^{k+n} n^{k+n}}{(k+n)!}$ si $k \geq -n$, et $\alpha_k(1/f^n) == 0$ sinon.

Partie V - B

1. On a $c_0 = g(0) = 0$ et $c_1 = g'(0) = e^{-g(0)}/(1 + g(0))$ d'après **II**.2., donc $c_1 = 1$.

2. On a $f(0) = 0$; en prenant $\varepsilon = 1/2e$ dans la définition de la continuité de f en 0, on obtient R vérifiant les conditions imposées.

3. Pour tout $x \in]-R, R[$ et tout $i \in \mathbf{N}$, on a $|c_i f(x)^i| \leq |c_i|(1/2e)^i$. Or la série entière $\sum c_i x^i$ converge sur $]-1/e, 1/e[$, son rayon de convergence est donc au moins égal à $1/e$; puisque $0 < 1/2e < 1/e$, la série $\sum c_i (1/2e)^i$ converge absolument, d'où la convergence normale sur $]-R, R[$ de la série $\sum c_i f^i$. De plus, par définition de la série $\sum c_i x^i$, on a pour tout x $\quad \sum_{i\geq 0} c_i f(x)^i = g\big(f(x)\big) = x$.

4. La série tronquée $\sum_{i\geq n} c_i x^i$ converge pour $x \in]-1/e, 1/e[$; la série entière $\displaystyle\sum_{i\geq n} \frac{c_i x^i}{x^n} = \sum_{k\geq 0} c_{n+k} x^k$ converge donc aussi sur cet intervalle. Le raisonnement de la question 3 donne donc encore la convergence normale, donc uniforme, sur $]-R, R[$, de la série $\sum_{k\geq 0} c_{n+k} f^k = \sum_{i\geq n} c_i f^{i-n}$.

5. (a) La convergence normale s'établit comme en 3. Toujours d'après 3, la somme de cette série est la fonction $\phi - \sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i$.

Les fonctions f^i sont des produits de fonctions développables en série entière sur $\mathbf{R}$, donc sont elles-mêmes développables en série entière en particulier sur $]-R, R[$. La somme de la série est donc bien développable en série entière sur $]-R, R[$, comme combinaison linéaire de telles fonctions.

(b) Supposons donc $U(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i x^i$ sur $]-r, r[$, avec $r > 0$ et au moins un γ_i non nul. Soit p le plus petit indice vérifiant $\gamma_p \neq 0$; on peut alors écrire $U(x) = x^p \sum_{k\geq 0} \gamma_{k+p} x^k$ sur $]-a, a[$.

La série entière qui figure dans cette expression définit une fonction continue sur $]-a, a[$, qui a donc pour limite $\gamma_p \neq 0$ en 0 ; par suite, $U(x)$ équivaut à $\gamma_p x^p$ en 0.

Donc, si $U(x)/x^n$ a une limite finie en 0, forcément $n \leq p$, et donc, par définition de p, les coefficients γ_k pour $k \leq n-1$ sont tous nuls.

Prenons $U = \sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^i$, la fonction étudiée en (a). D'après la question 4, on peut écrire $U = f^n \times b$, avec $b = \sum_{i=n}^{+\infty} c_i f^{i-n}$, la série convergeant uniformément sur $]-R, R[$. Les fonctions $c_i f^{i-n}$ étant continues sur cet intervalle, la fonction b l'est donc aussi ; donc U/f^n a pour limite $b(0)$ en 0. Mais $f(x)^n$ équivaut à x^n en 0, donc $U(x)/x^n$ a aussi pour limite $b(0)$ en 0 ; les hypothèses précédentes sont bien vérifiées, on peut donc conclure que les coefficients de x^k dans la série entière de U sont nuls pour $k \leq n-1$.

Il existe donc une suite (d_n) telle que $U(x) = \sum_{i=n}^{+\infty} c_i f(x)^i = \sum_{k=n}^{+\infty} d_k x^k$ sur $]-R, R[$. On en déduit

$$\forall x \in]-R, R[\quad \sum_{i=n}^{+\infty} c_i f(x)^{i-n} = \frac{U(x)}{f(x)^n} = e^{-nx} \sum_{k=n}^{+\infty} d_k x^{k-n} = e^{-nx} \sum_{j=0}^{+\infty} d_{j+n} x^j$$

et cette dernière fonction est développable en série entière sur $]-R,R[$, en tant que produit de deux fonctions ayant la même propriété.

(c) Il suffit de multiplier l'égalité $\sum_{i\geq 0} c_i f(x)^i = x$ par $f'(x)/f(x)^{n+1}$, bien défini puisque $x \neq 0$ et donc $f(x) \neq 0$.

(d) Le (b), appliqué avec $n+1$ au lieu de n, montre que la fonction $x \longmapsto \sum_{i=n+1}^{+\infty} c_i f^{i-n-1}(x)$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, et donc que son produit par f' l'est aussi ; cette fonction est donc dans $\mathcal{L}_R$, et son coefficient α_{-1} vaut 0 d'après **V-A**.3.

Pour $i \leq n-1$, la fonction $f' \cdot f^{i-n-1}$ est la dérivée de $\dfrac{1}{i-n} \cdot f^{i-n} : x \longmapsto \dfrac{e^{-(n-i)x}}{x^{n-i}}$, et cette dernière fonction est clairement dans $\mathcal{L}_R$. Par suite, la question **V-A**.4. montre que $f' \cdot f^{i-n-1}$ est dans $\mathcal{L}_R$, et que son coefficient α_{-1} est nul.

Enfin, la question **V-A**.5. montre que $\alpha_{-1}(f'/f) = 1$. On vérifie immédiatement que $\phi f'/f^{n+1}$ est bien dans $\mathcal{L}_R$. La linéarité de α_{-1}, jointe au résultat de la question (c), donne alors bien $c_n = \alpha_{-1}(\phi f'/f^{n+1})$.

(e) On obtient facilement $\left(\dfrac{\phi}{f^n}\right)' = \dfrac{1}{f^n} - \dfrac{n\phi f'}{f^{n+1}}$. Les fonctions impliquées appartiennent toutes à $\mathcal{L}_R$. Toujours par linéarité de α_{-1} et grâce à **V-A**.4., on en déduit $\alpha_{-1}\left[\left(\dfrac{\phi}{f^n}\right)'\right] = 0 = \alpha_{-1}\left(\dfrac{1}{f^n}\right) - n\alpha_{-1}\left(\dfrac{\phi f'}{f^{n+1}}\right)$, donc

$$c_n = \alpha_{-1}\left(\frac{1}{nf^n}\right)$$

Le **V-A**.5.(b) donne alors, pour tout $n \geq 2$, $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n^{n-1}}{n(n-1)!} = (-1)^{n-1}\dfrac{n^{n-1}}{n!}$.

6. La relation précédente étant aussi vraie pour $n = 1$, on a donc, pour $|x| < 1/e$,

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(-x)^n = S(-x)$$