Corrigé de E3A 2012 PC math A

Première partie

1. On calcule $AX_M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2x-2y-z \\ 2(2x-2y-z) \\ -2(2x-2y-z)\end{pmatrix}$ puis ${}^tX_MAX_M = \frac{1}{9}(2x-2y-z)(x+2y-2z)$. On a donc ${}^tX_MAX_M = 0 \Leftrightarrow (2x-2y-z)(x+2y-2z) = 0 \Leftrightarrow 2x-2y-z=0$ ou $x+2y-2z=0$.

   S est donc la réunion de deux plans qui sont perpendiculaires puisque leurs vecteurs normaux de coordonnées $(2,-2,-1)$ et $(1,2,-2)$ sont orthogonaux.

2. (a) On vérifie que les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.
   $A\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(\vec{e}_1)=0$. De même $A\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(\vec{e}_2)=0$. Enfin $A\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}$ donc $f(\vec{e}_3)=\vec{e}_1$.

   (b) La matrice de f dans la base C est donc égale à U. A est donc semblable à U avec pour matrice de passage $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&2&-1\end{pmatrix}$. On a bien $U=P^{-1}AP$ avec P orthogonale puisque c'est la matrice de passage de la base canonique à la base C orthonormale.

   (c) La matrice U est triangulaire. Elle admet 0 comme valeur propre triple. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et serait donc égale à 0. Ce n'est pas le cas donc A, semblable à U, n'est pas diagonalisable.

   (d) (i) $X_M = PX_{M'}$.
   (ii) ${}^tX_MAX_M = {}^tX_{M'}{}^tPAPX_{M'} = {}^tX_{M'}P^{-1}APX_{M'} = {}^tX_{M'}UX_{M'} = x'z'$ puisque ${}^tP=P^{-1}$. Le point M de coordonnées (x',y',z') dans R' est donc dans S si et seulement si $x'z'=0$.
   $x'=0$ est l'équation du plan $(Oy'z')$ et $z'=0$ celle du plan $(Ox'y')$. S est bien la réunion de deux plans perpendiculaires.

3. (a) Le rang de f est égal au rang de U donc égal à 1. $U^2=0$ donc $f\circ f=0$.

   (b) Si $\vec{v}$ a pour coordonnées (x,y,z) dans la base canonique, alors $f(\vec{v})$ a pour coordonnées $AX_M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2x-2y-z\\2(2x-2y-z)\\-2(2x-2y-z)\end{pmatrix} = \frac{2x-2y-z}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $f(\vec{v}) = \frac{2x-2y-z}{3}\vec{e}_1$. On peut donc prendre par exemple: $\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{e}_1$ et $\varphi(\vec{v}) = 2x-2y-z$.

Deuxième partie

1. (a) $v_{n+1}+2w_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_n+2w_n)$. La suite (v_n+2w_n) est donc une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Son premier terme vaut $v_0+2w_0=0$. On en déduit que pour tout $n\geqslant 0$: $v_n+2w_n=0$.

   (b) $u_{n+1}+3w_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_n+2w_n)=0$. On a donc $u_n+3w_n=0$ pour tout $n\geqslant 1$.

   (c) Avec le (a) et le (b) on déduit pour $n\geqslant 1$: $w_{n+1}=\frac{1}{4}(-3w_n+2w_n-w_n) = -\frac{1}{2}w_n$. La suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_1=\frac{1}{4}(-1-2+1)=-\frac{1}{2}$. On en déduit pour $n\geqslant 1$: $w_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^n$.
   D'où $v_n=-2(-\frac{1}{2})^n$ et $u_n=-3(-\frac{1}{2})^n$.
   Les trois suites convergent donc vers 0.

2. (a) La définition des trois suites donne: $M=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-2&0&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

   (b) $\det(M-\lambda I_3) = \det(\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3-4\lambda&1&-1\\-2&-4\lambda&-2\\1&-1&-1-4\lambda\end{pmatrix}) = \frac{1}{4^3}\begin{vmatrix}-3-4\lambda&-4\lambda-2&4\lambda+2\\-2&-4\lambda-2&0\\1&0&-4\lambda-2\end{vmatrix}$ par les opérations $C_2\leftarrow C_2+C_1$ et $C_3\leftarrow C_3-C_1$.

Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3$ on obtient $\det(M - \lambda I_3) = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4\lambda - 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4\lambda - 2 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{16}(4\lambda + 2)^2$. Les valeurs propres de M sont 0 (simple) et $-\frac{1}{2}$ (double).

$MX = -\frac{1}{2}X \iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \iff x - y + z = 0$. Le sous-espace propre associé à $-\frac{1}{2}$ est de dimension 2 et a pour base $\vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (1, 0, -1)$.

$MX = 0 \iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \iff z = -x$ et $y = 2x$. Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension 1 et a pour base $\vec{u}_3 = (1, 2, -1)$.

M est donc diagonalisable, semblable à $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) On en déduit $X_n = M^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$ d'où $Y_n = P^{-1}X_n = D^nY_0 = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n a \\ (-\frac{1}{2})^n b \\ 0 \end{pmatrix}$ si $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Par suite Y_n a pour limite le vecteur nul, X_n aussi et on retrouve que les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ convergent vers 0.

Troisième partie

1. f est une application de E dans E, linéaire puisque $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = u(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\vec{a} = \lambda u(\vec{x})\vec{a} + \mu u(\vec{y})\vec{a} = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$.

   $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ car u n'étant pas l'application nulle, il existe $\vec{x}$ tel que $u(\vec{x}) \neq 0$. Comme $\vec{a} \neq 0$, le rang de f est égal à 1.

2. (a) $f(\vec{x}) = 0 \iff u(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} \in \mathrm{Ker}(u)$. Comme u est une forme linéaire non nulle, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - 1 \geqslant 1$. 0 est donc bien valeur propre de f, le sous-espace propre est $\mathrm{Ker}(u)$ de dimension $n - 1$.

   (b) De $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ on déduit $\vec{x} = \frac{1}{\lambda}u(\vec{x})\vec{a}$ donc $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$. De $f(\vec{a}) = u(\vec{a})\vec{a}$ on déduit $\lambda = u(\vec{a})$.

   (c) Premier cas: $u(\vec{a}) = 0$. f a pour seule valeur propre 0, le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(u)$ de dimension $n - 1$. f n'est donc pas diagonalisable.

   Deuxième cas: $u(\vec{a}) \neq 0$. f a deux valeurs propre, 0 et $u(\vec{a})$. Le sous-espace propre associé à 0 est $\mathrm{Ker}(u)$ de dimension $n-1$, celui associé à $u(\vec{a})$ est $\mathrm{Vect}(\vec{a})$ de dimension 1. f est donc diagonalisable.

   (d) f est diagonalisable si et seulement si $u(\vec{a}) \neq 0$.

3. (a) Montrons par récurrence sur $p \geqslant 1$ la propriété $P(p)$: $f^p(\vec{x}) = u(\vec{x})(u(\vec{a}))^{p-1}\vec{a}$. $P(1)$ est vérifiée par définition de f.

   Supposons $P(p)$ vraie. $f^{p+1}(\vec{x}) = f(f^p(\vec{x})) = u(\vec{x})(u(\vec{a}))^{p-1}f(\vec{a}) = u(\vec{x})(u(\vec{a}))^p\vec{a}$ puisque $f(\vec{a}) = u(\vec{a})\vec{a}$. Donc $P(p+1)$ est vraie.

   (b) f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme Q scindé à racines simples tel que $Q(f) = 0$.

   (c) Si $u(\vec{a}) = 0$, $f^2(\vec{x}) = f(u(\vec{x})\vec{a}) = u(\vec{x})f(\vec{a}) = u(\vec{x})u(\vec{a})\vec{a} = 0$. On a donc $f^2 = 0$. Si f était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle sa matrice serait diagonale D avec $D^2 = 0$, donc on aurait $D = 0$ et f serait nul, ce qui est exclu puisque f a pour rang 1. f n'est donc pas diagonalisable.

   (d) Si $u(\vec{a}) \neq 0$, on a d'après le (a) pour $p = 2$: $f^2(\vec{x}) = u(\vec{x})u(\vec{a})\vec{a} = u(\vec{a})f(\vec{x})$ pour tout vecteur $\vec{x}$. On en déduit que $f^2 - u(\vec{a})f = 0$. Le polynôme $Q = X^2 - u(\vec{a})X = X(X - u(\vec{a}))$ est scindé à racines simples et vérifie $Q(f) = 0$. f est donc diagonalisable.

4. $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(\vec{b})$ avec $\vec{b} \neq 0$. On peut donc définir une application v de E dans $\mathbb{R}$ par $g(\vec{x}) = v(\vec{x})\vec{b}$. Montrons que v est linéaire. D'une part, $g(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = v(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\vec{b}$. D'autre part, $g(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) =$

$\lambda g(\vec{x}) + \mu g(\vec{y}) = (\lambda v(\vec{x}) + \mu v(\vec{y}))\vec{b}$. Puisque $\vec{b} \neq 0$ on déduit que $v(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda v(\vec{x}) + \mu v(\vec{y})$. v est donc une forme linéaire, non nulle (sinon on aurait $g = 0$).

5. $g^2(\vec{x}) = v(\vec{x})g(\vec{b}) = v(\vec{x})v(\vec{b})\vec{b}$. Si $g^2 \neq 0$ on a donc $v(\vec{b}) \neq 0$. En utilisant le résultat du 2.(c) on déduit que g est diagonalisable de valeurs propres 0 (d'ordre $n-1$) et $v(\vec{b})$ d'ordre 1. On obtient la matrice diagonale demandée avec $\alpha = v(\vec{b})$.

6. (a) On peut compléter une famille libre de E par des vecteurs de E pour obtenir une base de E.
   (b) Le vecteur $g(\vec{e}_n)$ est non nul et appartient à $\text{Ker}(g)$ puisque $g^2 = 0$. Il forme donc une famille libre que l'on peut compléter par des vecteurs $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n-1}$ de $\text{Ker}(g)$ pour obtenir une base de $\text{Ker}(g)$ (par le théorème de la base incomplète).
   (c) Puisque le vecteur $\vec{e}_n$ n'est pas dans l'hyperplan $\text{Ker}(g)$, la famille $B = (g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ est une famille libre possédant n vecteurs; c'est donc une base de E. La matrice de g dans cette base est bien celle qui est proposée.

7. Si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace.

   Nous venons de montrer qu'une matrice de rang 1 est soit semblable à la matrice diagonale $diag(0, ..., 0, \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$, soit semblable à la matrice élémentaire $E_{1,n}$ de trace nulle. Si deux matrices de rang 1 ont la même trace α, alors soit $\alpha \neq 0$ et les deux matrices sont semblables à $diag(0, ..., 0, \alpha)$, soit $\alpha = 0$ et les deux matrices sont semblables à $E_{1,n}$. Dans les deux cas elles sont semblables entre elles.

Quatrième partie

1. Si $h(\vec{x}) = 0$ alors $\vec{x} = \frac{u(\vec{x})}{u(\vec{a})}\vec{a} \in \text{Vect}(\vec{a})$ (on a supposé $u(\vec{a}) \neq 0$). Donc $\text{Ker}(h) \subset \text{Vect}(\vec{a})$.

   De $h(\vec{a}) = 0$ on déduit que $\text{Vect}(\vec{a}) \subset \text{Ker}(h)$. On a donc bien $\text{Ker}(h) = \text{Vect}(\vec{a})$.

   On calcule $u(h(\vec{x})) = u(\vec{a})u(\vec{x}) - u(\vec{x})u(\vec{a}) = 0$. Donc $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(u)$. Réciproquement, si $u(\vec{x}) = 0$ alors $h(\vec{x}) = u(\vec{a})x$ d'où $\vec{x} = \frac{1}{u(\vec{a})}h(\vec{x}) \in \text{Im}(h)$. On a donc bien montré que $\text{Im}(h) = \text{Ker}(u)$.

2. $h(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \iff (u(\vec{a}) - \lambda)\vec{x} = u(\vec{x})\vec{a}$.

   Si $\lambda = u(\vec{a})$ on obtient $u(\vec{x}) = 0$: $\lambda = u(\vec{a})$ est donc valeur propre de sous-espace propre associé égal à $\text{Ker}(u)$.

   Si $\lambda \neq u(\vec{a})$ on obtient que $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$; comme $h(\vec{a}) = 0$, 0 est valeur propre de sous-espace propre associé égal à $\text{Vect}(\vec{a})$. Si E est de dimension finie n, h est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n - 1 + 1 = n$, dimension de E.

3. Montrons par récurrence sur $p \geqslant 1$ la propriété $P(p)$: $h^p(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^{p-1}h(\vec{x})$.

   $P(1)$ est vérifiée car $(u(\vec{a}))^0 = 1$.

   Supposons $P(p)$ vraie. $h^{p+1}(\vec{x}) = h(h^p(\vec{x})) = (u(\vec{a}))^{p-1}h^2(\vec{x})$. Or $h^2(\vec{x}) = u(\vec{a})h(\vec{x})$ puisque $h(\vec{a}) = 0$. On en déduit $h^{p+1}(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^p h(\vec{x})$. Donc $P(p+1)$ est vraie.

4. $||h^p(\vec{x})|| = |u(\vec{a})|^{p-1}||h(\vec{x})||$ a pour limite 0 quand p tend vers l'infini puisque $|u(\vec{a})| < 1$.

5. (a) Nous allons appliquer le résultat du 4. en prenant pour E l'ensemble des applications continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,\pi]} |f(t)|$, pour u la forme linéaire sur E définie par $u(f) = \int_0^\pi f(t)dt$ et pour $\vec{a}$ la fonction définie par $a(t) = \sin(3t)$.
   On obtient $u(a) = \int_0^\pi \sin(3t)dt = -\frac{1}{3}(\cos(3\pi) - \cos(0)) = \frac{2}{3}$; on a donc bien $|u(a)| < 1$. En posant $h(f) = u(a)f - u(f)a$ on obtient $f_{p+1} = h(f_p)$, donc $f_p = h^p(f_0)$ a sa norme qui tend vers 0, donc pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_p(t)$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.
   (b) Appliquons à nouveau le résultat du 4. en prenant $E = \mathbb{R}^3$, pour u la forme linéaire définie par $u(x, y, z) = (x - y + z)$ et $\vec{a} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.
   On obtient $u(\vec{a}) = -\frac{1}{2}$ donc on a donc bien $|u(a)| < 1$. L'application h est définie par $h(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x, y, z) - (x - y + z)\vec{a} = (-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z)$. On a donc $(u_{p+1}, v_{p+1}, w_{p+1}) = h(u_p, v_p, w_p)$ et par suite $(u_p, v_p, w_p) = h^p(u_0, v_0, w_0)$ a sa norme qui tend vers 0 quand p tend vers l'infini. On retrouve bien que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent vers 0.