e3a PSI A

un corrigé.

Questions d'application du cours.

Aucune justification n'était demandée. Je donne cependant des contre-exemples dans le cas d'une réponse fausse et des bribes de preuve dans le cas contraire.

Q.1. Une suite géométrique non nulle a pour terme général $u_n = \lambda q^n$ avec $q, \lambda \in \mathbb{R}$ et λ non nul (q peut, lui, être nul et la suite est alors nulle à partir du rang 1, son terme d'indice 0 valant λ). Une telle suite est dans $\mathcal{E}_{a,b}$ si et seulement si (en divisant par $\lambda \neq 0$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q^n(q^2 - aq - b) = 0$$

Si ceci a lieu alors $q^2 - aq - b = 0$ (prendre $n = 0$). Réciproquement, cette dernière condition donne $u \in \mathcal{E}_{a,b}$. La condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ est donc $q^2 = aq + b$.

a. FAUX. $a = b = -1$ donne un contre-exemple car aucun réel n'est racine de $X^2 + X + 1$.

b. VRAI. $X^2 + 3X - 4 = (X + 4)(X - 1)$ et $((-4)^n)$ et (1) sont deux suites géométriques indépendantes de $\mathcal{E}_{-3,4}$.

c. FAUX. $\mathcal{E}_{0,1}$ contient les deux suites géométriques indépendantes (1) et $((-1)^n)$.

d. FAUX. $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ et les seules suites géométriques de $\mathcal{E}_{2,-1}$ sont les $(\lambda 1^n)$ c'est à dire les suites constantes (qui forment un espace vectoriel de dimension 1).

e. VRAI. Si $\mathcal{E}_{a,b}$ contient deux suites géométriques indépendantes, leurs raisons sont différentes (pour l'indépendance) et sont racines de $X^2 - aX - b$ (pour l'appartenance). Ce polynôme DOIT donc avoir deux racines réelles distinctes et on DOIT avoir $a^2 + 4b > 0$. A fortiori, il FAUT que $a^2 + 4b \geq 0$.

Q.2. Le cours indique que $\mathcal{E}_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2 et donne une méthode pratique pour en déterminer une base. Ce sont les points abordés ici.

a. FAUX. f est bien linéaire. Elle est injective (si $u_0 = u_1 = 0$ alors tous les u_n sont nuls, par récurrence). Elle est surjective car à partir d'un couple (α, β) on peut construire (par récurrence) une suite $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ telle que $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$. On peut ainsi dire que f est un ISOmorphisme et que $\mathcal{E}_{a,b}$ est de dimension 2.

b. VRAI. g est toujours linéaire. Supposons $a \neq 0$ et soit $u \in \mathcal{E}_{a,b}$ telle que $g(u) = (0, 0)$. On a alors $au_1 = u_2 - bu_0 = 0$ et donc $(a \neq 0)$ $u_1 = 0$. f étant injective, on en déduit que $u = 0$. g est alors injective et, par argument de dimension, est un isomorphisme.

c. FAUX. On a vu que $\mathcal{E}_{a,b}$ est TOUJOURS de dimension 2.

d. Soit $j = e^{2i\pi/3}$. La suite complexe (j^n) vérifie la relation de récurrence pour $a = b = -1$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient que $(\cos(2n\pi/3))$ et $(\sin(2n\pi/3))$ vérifient aussi la relation. Comme ce sont des suites réelles, elles sont dans $\mathcal{E}_{-1,-1}$. Leurs images par f sont $(1, -1/2)$ et $(0, \sqrt{3}/2)$. Ces images étant indépendantes, les suites le sont. Par dimension/cardinal elles forment une base de $\mathcal{E}_{-1,-1}$.

Q.3. Pour étudier la série entière, on peut utiliser la définition (avec le Lemme d'Abel) ou la règle de D'Alembert. Dans le premier cas, on remarque (formule de Stirling) que $a_n \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$; ainsi, $(a_n x^n)$ est bornée si $|xe| < 1$ et non bornée si $|xe| > 1$ et le rayon de convergence vaut $R = 1/e$. Avec la seconde méthode, on remarque que les a_k sont non nuls et que pour $x \neq 0$, $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e|x|$; si $|xe| < 1$, $\sum(a_n x^n)$ converge absolument et si$|xe| > 1$, la même série diverge grossièrement ce qui redonne $R = 1/e$.

a. FAUX. Le rapport tend vers e.

b. FAUX. C'est la déduction qui est erronée.

c. VRAI. $e > 2$ et donc $R = 1/e < 1/2$. Sans calculer le rayon de convergence, il suffirait de montrer que $(a_n/2^n)$ est non bornée pour conclure.

Q.4.

a. FAUX. $b_n = \frac{1}{n!}$ vérifie $|b_n| \leq \frac{1}{n}$ pour tout n mais le rayon de convergence de la série entière associée est infini et donc strictement plus grand que 1. On a effectivement $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ et donc $(a_n x^n)$ est bornée si $|x| \leq 1$. On peut en déduire que $r \geq 1$.

b. VRAI. On vient de le justifier.

c. Vrai. $(\sin(n)x^{n-1})$ est bornée si $|x| < 1$ et non bornée si $|x| > 1$ (car $(\sin(n))$ n'est pas de limite nulle, ce que l'on pourrait prouver par l'absurde) et $\sum(\sin(n)x^{n-1})$ a donc un rayon de convergence qui vaut 1. $\sum(a_n x^n)$ étant la série entière primitive, elle a le même rayon de convergence $r = 1$.

d. VRAI. 1 est bien supérieur à 1/2. Il nous suffit de remarquer que $(a_n/2^n)$ est bornée pour conclure que $r \geq 1/2$.

e. FAUX. L'égalité est fausse en $x = 0$ car $\arctan(-\cos(1)/\sin(1)) \neq 0$.

f. FAUX. Pour $|x| < 1$, on a $\sum_{n\geq 1} \sin(n)x^{n-1}$ qui est la partie imaginaire de $\sum_{n\geq 1} e^{in}x^{n-1}$ qui vaut (somme de série géométrique de raison xe^i) $\frac{e^i}{1-xe^i}$. On a donc $\sum_{n\geq 1} \sin(n)x^{n-1} = \frac{\sin(1)}{x^2-2x\cos(1)+1}$. Par ailleurs, $-\ln(|1-xe^i|) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2-2x\cos(1))$ se dérive en $-\frac{x-\cos(1)}{1-2x\cos(1)+x^2}$. Ce terme n'étant pas égal à $\frac{\sin(1)}{x^2-2x\cos(1)+1}$ (par exemple en 0), l'égalité proposée est fausse (si elle avait lieu, les dérivées devraient être égales).

g. FAUX. Sauf erreur de calcul de ma part, on conclut de manière similaire. La fonction proposée ressemble plus à la somme de la série entière de terme général $\frac{\cos(n)}{n}$ (fais-je une erreur ?).

Problème.

Partie A.

1.1 Comme $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, on a immédiatement $\lambda_{n+2} = -\lambda_n$ et $\mu_{n+2} = -\mu_n$ pour tout n. Ainsi, $\lambda, \mu \in \mathcal{S}_0$.

1.2 On en déduit que pour tout n, $\lambda_{n+4} = \lambda_n$ et $\mu_{n+4} = \mu_n$. λ et μ sont donc périodiques de période 4.

2. $\mathcal{S}_0$ est non vide (il contient la suite nulle) et stable par combinaisons linéaires. Comme c'est un sous-ensemble de E, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.

3. Les éléments de $\mathcal{S}_0$ sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Les solutions de cette dernière étant $e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, le cours indique que (λ, μ) est une base de $\mathcal{S}_0$ et que cet espace est de dimension 2.

4.1 Soit $u \in \mathcal{S}_0$. u est combinaison linéaire de λ et μ. En regradant les termes d'indice 0 et 1, on trouve les coefficients de la combinaison et on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + u_1 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

u étant non nulle u_0 ou u_1 est non nul. Or, $u_{4n} = u_0$, $u_{4n+1} = u_1$, $u_{4n+2} = -u_0$ et $u_{4n+3} = -u_1$. On trouve donc deux extraites qui convergent vers des limites différentes. La suite u ne converge donc pas.

4.2 La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente (le terme général n'est pas de limite nulle).

4.3 u est bornée et donc $\forall x \in [-1,1],\ (u_n x^n)$ est bornée. Par ailleurs si $x>1$, l'une des extraites de $(|u_n x^n|)$ est de limite infinie ($(|u_{4n}x^{4n}|)$ ou $(|u_{4n+1}x^{4n+1}|)$ selon que $u_0 \neq 0$ ou $u_1 \neq 0$) et $(u_n x^n)$ n'est donc pas bornée. f est donc la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1. Comme $f(1)$ et $f(-1)$ n'existent pas (divergence grossière de série), le domaine de définition de f est $]-1,1[$.

On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{4n+3} u_k x^k = u_0 \left(\sum_{p=0}^{n} x^{4k} - \sum_{p=0}^{n} x^{4k+2} \right) + u_1 \left(\sum_{p=0}^{n} x^{4k+1} - \sum_{p=0}^{n} x^{4k+3} \right)$$

On sait calculer les sommes (géométriques de raison x^4) et un passage à la limite donne

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{(1-x^2)(u_0+u_1x)}{1-x^4} = \frac{u_0+u_1x}{1+x^2}$$

Partie B.

1.1 Supposons, par l'absurde, que $u \in \mathcal{S}$ et notons a le réel associé. On a $2a = u_2 + u_0 = 2$ et $2a = u_1 + u_3 = -2$ ce qui amène une contradiction. Ainsi $u \notin \mathcal{S}$.

1.2 On a ici $u_{4n} = u_{4n+1} = 1$ et $u_{4n+2} = u_{4n+3} = -1$ pour tout n. On en déduit que $u_{n+2} + u_n = 0$ pour tout n (par exemple en distinguant suivant la congruence modulo 4 de n). On a donc $u \in \mathcal{S}$ et la constante correspondante est nulle.

1.3 On a ici $u_n = u_{n+2} = 10$ pour tout n. On a donc $u \in \mathcal{S}$ et la constante correspondante est 5.

2. Le même calcul montre que toute suite constante est dans $\mathcal{S}$ avec une constante égale à u_0.

3. Soit u une suite géométrique. Il existe des réels q et λ tels que $\forall n,\ u_n = \lambda q^n$.
- Si $u \in \mathcal{S}$ alors $u_0 + u_2 = u_1 + u_3$ et donc $\lambda(1+q^2) = \lambda q(1+q^2)$. On en déduit que $\lambda = 0$ ou $q = 1$. Dans les deux cas, u est constante.
- Réciproquement, les suites constantes sont dans $\mathcal{S}$.

Les suites géométriques qui sont dans $\mathcal{S}$ sont exactement les suites constantes.

4. On sait déjà que $\mathcal{S}$ est non vide et inclus dans E. Si u et v sont dans $\mathcal{S}$ associées à des constantes a et b et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour tout n, $(u+\lambda v)_{n+2} + (u+\lambda v)_n = a + \lambda b$. Ainsi $u + \lambda v \in \mathcal{S}$ et la constante associée est $a + \lambda b$. $\mathcal{S}$ est donc aussi stable par combinaisons linéaires et c'est finalement un sous-espace vectoriel de E.

5. De façon immédiate, on a $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ (est élément de $\mathcal{S}_0$ est dans $\mathcal{S}$ de constante associée nulle). L'inclusion réciproque est fausse puisque la suite constante égale à 1 est dans $\mathcal{S}$ sans être dans $\mathcal{S}_0$.

6. On a immédiatement $\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$ c'est à dire la linéarité de φ. Comme φ est à valeur dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire. On notera que c'est l'application qui à un élément de $\mathcal{S}$ associe la constante correspondante de la définition.

Les éléments du noyau de φ sont les élément de $\mathcal{S}$ correspondant à une constante nulle et donc

$$\ker(\varphi) = \mathcal{S}_0$$

7. v est dans $\mathcal{S}$ mais pas dans l'hyperplan $\ker(\phi)$. C'est donc un vecteur qui engendre un supplémentaire de cet hyperplan (les hyperplans sont les sous-espaces de codimension 1) :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathrm{Vect}(v)$$

8. Soit $u \in \mathcal{S}$ et $a = \frac{u_0+u_2}{2}$. $u - av$ est alors un élément de $\mathcal{S}_0$ et est donc combinaison linéaire de λ et de μ définies en partue **A**. Les termes d'indice 0 et 1 donnent les valeurs des constantes et on obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{u_0+u_2}{2} + \frac{u_0-u_2}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2u_1-u_0-u_2}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

9. Un élément de $\mathcal{S}$ est combinaison linéaire des trois suites v, λ, μ qui sont périodique de période 4. Tout élément de $\mathcal{S}$ est donc aussi périodique de période 4.

10. $\mathcal{S}$ est de dimension 3 (comme somme directe d'un espace de dimension 2 et d'un autre de dimension 3). θ est immédiatement linéaire. De plus, si $u \in \ker(\theta)$ alors les trois premiers termes de u sont nuls. On a aussi $u_1 + u_3 = u_0 + u_2$ et donc $u_3 = 0$. Par 4-périodicité, les u_n sont tous nuls. θ est donc une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension : c'est un isomorphisme.

11. Si $u \in \mathcal{S}$, $u_3 = u_0 + u_2 - u_1$. On peut alors continuer par 4-périodicité

$$I = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, \dots),\ J = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1 \dots),\ K = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1 \dots)$$

12.1 La linéarité de T_k est immédiate ($(u + \lambda v)_{kn} = u_{kn} + \lambda v_{kn}$ est vrai pour tout n). T_k allant de E dans E, c'est un endomorphisme de E.

12.2 $w = T_2(I) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ n'est pas dans $\mathcal{S}$ ($w_0 + w_2 = 0 \neq w_1 + w_3$). $\mathcal{S}$ n'est donc pas stable par T_2.

12.3 $T_3(I) = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots) = I + J$, $T_3(J) = (0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots = -J$ et $T_3(K) = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots) = J + K$. Les éléments d'une base de $\mathcal{S}$ étant envoyés dans $\mathcal{S}$ par l'application linéaire T_3, $\mathcal{S}$ est stable par T_3.

12.4 Le calcul précédente donne

$$\mathrm{Mat}(T_3, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.5 $I - K$ et $I + J + K$ sont vecteurs propres indépendants de T_3 associés à la valeur propre 1. J est vecteur propre de T_3 associé à la valeur propre -1. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on doit avoir les égalités

$$\mathrm{Sp}(T_3) = \{1, -1\},\ E_1(T_3) = \mathrm{Vect}(I - K, I + J + K),\ E_{-1}(T_3) = \mathrm{Vect}(J)$$

12.6 T_3 est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(I - K, I + J + K)$ de direction $\mathrm{Vect}(J)$.

13. Soit $u \in \mathcal{S}$ et $a = \frac{u_0+u_2}{2}$. On a $w = u - av \in \mathcal{S}_0$. On en déduit que (toutes les quantités écrites existent)

$$\forall x \in]-1, 1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k x^k + a \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Avec la question **4.3** de la partie **A**, la première somme vaut $\frac{w_0+w_1 x}{1+x^2}$. La seconde vaut $\frac{a}{1-x}$. Avec les valeurs de w_0 et w_1 on obtient donc

$$\forall x \in]-1, 1[,\ h(x) = \frac{u_0 + u_2}{2(1 - x)} + \frac{(u_0 - u_2) + (2u_1 - u_0 - u_2)x}{2(1 + x^2)}$$

On imagine que l'énoncé veut ensuite parler de prolongement par continuité en 1 et -1, c'est à dire qu'il faut voir si h admet une limite finie en 1 ou -1.
C'est toujours le cas en -1, la limite valant $\frac{3u_0-2u_1+u_2}{4}$.
Il y a une limite finie en 0 si et seulement si $u_0 + u_2 = 0$ c'est à dire $u \in \mathcal{S}_0$ et dans ce cas, la limite vaut alors $\frac{u_0+u_1}{2}$.

Partie C.

1. Il s'agit de généraliser le résultat vu en question **9** de la partie **B** (cas $p = 2$). Soit $u \in \mathcal{S}_p$ et a la constante associée ; pour tout entier n, on a

$$u_{n+p} + u_n = a = u_{n+2p} + u_{n+p}$$

et ainsi $u_{n+2p} = u_n$, ce qui montre que u est $2p$-périodique.

2.1 Un développement par rapport à la dernière ligne donne

$$\det(F - xI_{p+1}) = (1-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

où le déterminant est de taille p. On développe ce dernier par rapport à la première colonne pour obtenir

$$\det(F - xI_{p+1})) = (1-x)\left((-x)^p - (-1)^{p+1}\right) = (-1)^{p+1}(x-1)(x^p+1)$$

2.2 Les valeurs propres de F sont les racines de son polynôme caractéristique.
- Les valeurs propres complexes sont 1 et les racines p-ièmes de -1 et on a donc

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(F) = \{1\} \cup \{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{p}} \; / \; 0 \le k \le p-1\}$$

- Si p est pair, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$. Si p est impair, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(F) = \{1, -1\}$.

2.3 0 n'étant pas valeur propre de F, $F \in GL_{p+1}(\mathbb{R})$.

2.4 F possède $p+1$ valeurs propres complexes et estde taille $p+1$. Elle est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1 (car les sous-espaces propres sont en somme directe).
Il y a au plus deux sous-espaces propres réels qui sont au plus de dimension 1 (car la multiplicité de chaque valeur propre est égale à 1). Ainsi, la somme des dimension des sous-espaces propres réels de F est au plus 2 et donc différente de $p+1$. F n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. δ est immédiatement linéaire.
Si $u \in \ker(\delta)$ alors $u_0 = \dots = u_{p-1} = u_0 + u_p = 0$. La constante a associée à u vaut $(u_0+u_p)/2 = 0$ et on a donc $\forall n,\ u_{n+p} = -u_n$. On en déduit que $u_p = \dots = u_{2p-1} = 0$. u est $2p$-périodique et ses $2p$ premiers termes sont nuls. u est donc la suite nulle. δ est donc injective (noyau restreint à la suite nulle).
Réciproquement, soit $(a_0, \dots, a_{p-1}, x) \in \mathbb{R}^{p+1}$. On définit u de manière récurrente par

$$\forall i \in [0..p-1],\ u_i = a_i \ ; \ \forall n \ge p,\ u_n = 2x - u_{n-p}$$

Il est aisé de voir que cette suite est bien définie. Par définition, $u \in \mathcal{S}_p$ (associée à la constante x) et $\delta(u) = (a_0, \dots, a_{p-1}, x)$. On a donc montré la surjectivité de δ.
δ est finalement un isomorphisme et

$$\dim(\mathcal{S}_p) = \dim(\mathbb{R}^{p+1}) = p+1$$

4.1 ψ est linéaire. Si $u \in \mathcal{S}_p$ (avec une constante a) et $t = \psi(u)$ alors $\forall n,\ t_n + t_{n+p} = u_{n+1} + u_{n+p+1} = 2a$. On a donc $t \in \mathcal{S}_p$ (avec la même constante a).
ψ est donc un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.

4.2 Les éléments de $\mathcal{S}_p$ étant $2p$-périodiques, on a $\psi^{2p} = Id_{\mathcal{S}_p}$.

4.3 Soit $x = (x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$; on a (les termes non précisés n'ayant pas d'importance)

$$\delta^{-1}(x) = (x_0, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, 2x_p - x_1, \dots)$$

$$\psi(\delta^{-1}(x)) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, 2x_p - x_1, \dots)$$

$$\delta(\psi(\delta^{-1}(x))) = (x_1, \dots, x_{p-1}, 2x_p - x_0, x_p)$$

En notant $(e_0, \dots, e_p)$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ et $E_i = \delta^{-1}(E_i)$, on a donc

$$\psi(\delta^{-1}(x)) = x_1 E_0 + \dots + x_{p-1} E_{p-2} + (2x_p - x_0) E_{p-1} + x_p E_p$$

La première colonne de la matrice cherchée est constituée des coefficients obtenus quand $x = e_0$ c'est à dire $x_0 = 1$ et $x_1, \dots, x_p = 0$.
Plus généralement la colonne i de la matrice cherchée est constituée des coefficients obtenus quand $x = e_i$ c'est à dire $x_k = \delta_{i,k}$.
Avec les formules obtenues, on obtient que la matrice cherchée est F.

4.4 F n'étant pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ψ n'est pas diagonalisable.

4.5 F étant inversible, ψ est un isomorphisme. χ_F annule ψ et donc $\psi^{p+1} - \psi^p + \psi - Id = 0$. Ainsi

$$\psi^{-1} = \psi^p - \psi^{p-1} + Id$$

On a donc $\psi^{-1}(u) = w$ avec $w_n = u_{n+p} - u_{n+p-1} + w_n$.