

Exercice 1

1. Recherche d'extremum local pour g

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + 2e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2) $f(x) - (x + 1) = 2e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ donc $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.

De plus, $f(x) - (x + 1) > 0$ donc (C_f) est toujours au-dessus de Δ .

3) f est continue, strict. croissante sur $[-2, -1]$ et $f(-2)f(-1) < 0$ donc $\exists! \alpha \in]-2, -1[, f(\alpha) = 0$.

4) Pour le calcul des points critiques de f , on résout :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x(1 + x + y^2 + 2e^x) = 0 \\ 2e^xy = 0 \end{cases}$$

Nécessairement on a $y = 0$ et en remplaçant ceci dans L_1 on a :

$$e^x(1 + x + 2e^x) = 0 \iff 1 + x + 2e^x = 0 \iff x = \alpha.$$

Ainsi on a un unique point critique pour f qui est $(\alpha, 0)$.

5) On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x(2 + x + y^2 + 4e^x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2e^x$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2e^xy$.

Ainsi $r = e^\alpha(2 + \alpha + 4e^\alpha) = e^\alpha(1 + 2e^\alpha) = -\alpha e^\alpha$ (car $1 + \alpha + 2e^\alpha = 0$)

$s = 0$ et $t = 2^\alpha$. On a donc $s^2 - rt = 2\alpha e^{2\alpha} < 0$ et $r > 0$ ainsi g a un minimum local strict en $(\alpha, 0)$.

6) $\beta = g(\alpha, 0) = e^\alpha(\alpha + e^\alpha)$.

On a $4\beta + \alpha^2 - 1 = 4e^\alpha(\alpha + e^\alpha) + (-2e^\alpha - 1)^2 - 1 = 4e^\alpha(1 + \alpha + 2e^\alpha) = 0$.

2. Étude d'une suite réelle

1) $f''(x) = 2e^x > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On sait que si f est convexe alors (C_f) est au-dessus de ses tangentes, donc

$\forall x, t \in \mathbb{R}, f(t) \geq (t - x)f'(x) + f(x)$ (où le membre de droite représente l'équation de la tangente à f en x).

2) Avec $x = u_n$ et $t = \alpha$, il vient : $f(u_n) + (\alpha - u_n)f'(u_n) \leq 0$.

Ceci est équivalent à $(\alpha - u_n)f'(u_n) \leq -f(u_n) \iff \alpha \leq u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \iff \alpha \leq u_{n+1}$.

On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$ car $f'(u_n) \geq 0$ et $f(x) \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$ (et $u_n \geq \alpha$).

Ainsi $u_n \leq u_0 = -1$.

$(u_n)_n$ est décroissante minorée par α donc convergente vers $l \in [\alpha, -1]$.

On fait tendre n vers $+\infty$ dans $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, et comme f est continue, on a :

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \iff f(l) = 0 \iff l = \alpha.$$

3) a) Comme $u_n \in [-2, -1]$, on a : $0 \leq (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$.

¹email : hedi.joulak@gmail.com

$$\text{Or : } (u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) = (u_n - \alpha)\frac{f(u_n)}{u_n - u_{n+1}} - f(u_n)$$

$$= (u_n - u_{n+1})\frac{f(u_n)}{u_n - u_{n+1}} + (u_{n+1} - \alpha)\frac{f(u_n)}{u_n - u_{n+1}} - f(u_n) = (u_{n+1} - \alpha)f'(u_n).$$

Comme $f'(x) = 1 + 2e^x > 1$, on a $(u_{n+1} - \alpha)f'(u_n) \geq u_{n+1} - \alpha \geq 0$ d'où l'encadrement.

Pour $n = 0$, on a bien $0 \leq -1 - \alpha \leq \frac{1}{e-1}$

On suppose le résultat vrai à l'ordre n fixé et on le montre à l'ordre $n + 1$.

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \frac{1}{e(e^{2^n} - 1)^2}, \text{ on veut montrer que c'est } \leq \frac{1}{e^{2^{n+1}} - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Considérons } e^{2^{n+1}} - 1 - e(e^{2^n} - 1)^2 &= (e^{2^n})^2 - 1 - e(e^{2^n} - 1)^2 = (e^{2^n} - 1)(e^{2^n} + 1 - e(e^{2^n} - 1)) \\ &= (e^{2^n} - 1)(e^{2^n}(1 - e) + 1 + e) < 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a bien } \frac{1}{e(e^{2^n} - 1)^2} \leq \frac{1}{e^{2^{n+1}} - 1}.$$

Exercice 2

1) $\frac{f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2 f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f_n(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ (prédominance de l'exponentielle sur les puissances).

2) On a un problème de convergence en $+\infty$, mais comme $x^2 f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a par la règle de Riemann la convergence de I_n .

$$3) \text{ a) } \int_0^A x^n e^{-x^2/2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-x^2/2} \right]_0^A + \frac{1}{n+1} \int_0^A x^{n+2} e^{-x^2/2} dx, \text{ et en faisant tendre } A \text{ vers } +\infty :$$

$$I_n = \frac{1}{n+1} I_{n+2}.$$

$$\text{b) } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{c) } I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx = \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\text{d) Montrons par récurrence que } I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Pour $n = 0$ c'est vérifié. Supposons le résultat vrai à l'ordre n .

$$I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \frac{(2n+2)!}{2^n n! (2n+2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} (n+1)!}. \text{ La récurrence est faite.}$$

De même pour l'autre égalité.

$$4) \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f_1(x) dx = I_1 = 1.$$

$$\text{b) i) } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x f_1(x) dx = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{ii) } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^{+\infty} x^2 f_1(x) dx - E(X)^2 = I_3 - I_2^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$5) \text{ a) } G(x) = F(X^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) On a } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \int_0^x \frac{e^{-t/2}}{2} dt$. Ainsi la fonction de répartition est absolument continue et Y est une variable à densité.
C'est donc une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ (ainsi $E(X) = 2$ et $V(X) = 4$).

Exercice 3

1. Étude d'un endomorphisme de E

1) f est linéaire grâce à la linéarité de la dérivée.

De plus $(x-1)P'(x) + P(x)$ est bien un polynôme de degré ≤ 2 , donc f est un endomorphisme.

2) $f(1) = 1$, $f(x) = x - 1 + x = 2x - 1$ et $f(x^2) = 3x^2 - 2x$, donc on a bien la matrice annoncée.

3) Comme A est une matrice triangulaire, les valeurs propres se trouvent sur la diagonale : 1, 2 et 3.

f est diagonalisable car il a 3 vp simples.

0 n'étant pas une valeur propre de f alors f est bijective (car A inversible) et donc f est un automorphisme de E .

4) $f(R_1) = f(1) = 1 = R_1$, $f(R_2) = f(x-1) = 2x-2 = 2R_2$ et $f(R_3) = f((x-1)^2) = 3(x-1)^2 = 3R_3$.

5) R_1 est un vecteur propre de f pour la vp 1, R_2 est un vecteur propre de f pour la vp 2 et R_3 est un vecteur propre de f pour la vp 3. Donc $\mathcal{B}' = (R_1, R_2, R_3)$ est une base de vecteurs propres de f .

On a $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6) Les vérifications sont immédiates et on a alors $Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (qui est donc P^{-1}).

7) On a $D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$ et ainsi $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Une récurrence immédiate nous donne $(A^{-1})^n = P(D^{-1})^n P^{-1}$.

En remplaçant les matrices on trouve la 3^e colonne $\begin{pmatrix} 1 - 1/2^{n-1} + 1/3^n \\ 1/2^{n-1} - 2/3^n \\ 1/3^n \end{pmatrix}$.

2. Suite d'épreuves aléatoires

1) $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$(X_1 = 0, X_1 = 1, X_1 = 2)$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_2 = 0/X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0/X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\ &\quad + P(X_2 = 0/X_1 = 2)P(X_1 = 2) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De même on a $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ et $P(X_2 = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.

2) $P(X_{k+1} = 0) = P(X_{k+1} = 0/X_k = 0)P(X_k = 0) + P(X_{k+1} = 0/X_k = 1)P(X_k = 1)$

$$+P(X_{k+1}=0/X_k=2)P(X_k=2)=P(X_k=0)+\frac{1}{2}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=2).$$

De manière analogue, on a : $P(X_{k+1}=1)=\frac{1}{2}P(X_k=1)+\frac{1}{2}P(X_k=2)$ et $P(X_{k+1}=2)=\frac{1}{3}P(X_k=2)$.

$$\text{D'où } U_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = A^{-1}U_k.$$

3) Par une récurrence immédiate on a $U_k = (A^{-1})^k U_0$.

4) Comme on a la 3^e colonne de $(A^{-1})^k$ et que U_0 a ses 2^{res} composantes nulles on a

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 - 1/2^{k-1} + 1/3^k \\ 1/2^{k-1} - 2/3^k \\ 1/3^k \end{pmatrix}. \text{ D'où}$$

$$P(X_k=0) = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^k}, \quad P(X_k=1) = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2}{3^k}, \quad P(X_k=2) = \frac{1}{3^k}$$

On a les limites annoncées en utilisant $a^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ pour $a \in]-1, 1[$.