Correction Ecricome 2007

Voie économique

La correction comporte 15 pages.

Exercice 1

1.1 Etude des variations de la fonction f_a

1. • Nous avons clairement :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty}$$

car :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a^2}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} t = +\infty$$

• Comme au voisinage de $+\infty$:

$$f_a(t) = \frac{1}{2}t + \varepsilon(t)$$

avec $\varepsilon(t) = \dfrac{a^2}{2t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$ nous pouvons dire que la courbe représentative de f_a admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}t}$$

Enfin comme :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{a^2}{2t} = 0^+$$

nous pouvons affirmer que :

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f_a \text{ est au-dessus de son asymptote oblique}}$$

2. Nous avons :

$$\boxed{\lim_{t\to0^+} f_a(t) = +\infty}$$

Ce qui s'interprète en disant que :

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f_a \text{ admet une asymptote verticale d'équation } t = 0}$$

3. Tout d'abord f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fraction rationnelle (après réduction) dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble avec :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(t) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) \\ &= \boxed{\frac{t^2 - a^2}{2t^2}} \end{aligned}$$

Voici le tableau de variation de f_a :

t	0		a		$+\infty$
$f_a'(t)$		$-$	0	$+$	
$f_a(t)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme f_a est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, a]$ et strictement croissante sur $[a, +\infty[$ avec $f_a(a) = a$, nous pouvons donc affirmer que :

$$\boxed{\forall t > 0, \quad f_a(t) \geq a} \tag{1}$$

1.2 Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Comme nous avons vu précédemment que $f_a(a) = a$, (ce qui permet de dire que a est un point fixe pour f_a), le cas particulier où le premier terme u_0 de la suite étudiée vaut a, nous permet de dire que dans ce cas :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante égale à } a}$$

Ceci s'établit facilement par récurrence.

2. Revenons au cas général où $u_0 > 0$. Nous avons vu que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_a'(t) = \frac{t^2 - a^2}{2t^2}$$

et comme $\dfrac{a^2}{2t^2}$ est toujours strictement positif, cela implique que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_a'(t) < \frac{t^2}{2t^2}$$

donc en particulier :

$$\forall t > a, \quad f_a'(t) < \frac{1}{2} \tag{2}$$

D'autre part le tableau de variation de f_a nous a déjà donné que :

$$\forall t > a, \quad f_a'(t) > 0 \tag{3}$$

Conclusion : selon (2) et (3)

$$\boxed{\forall t > a, \quad 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}} \tag{4}$$

3. Comme l'étude de f_a a montré à la **question 4 de la partie 1.1** que $\forall t > 0$, $f_a(t) \geq a$, or comme une récurrence immédiate montre que tous les termes de la suite sont strictement positif, car la fonction f_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, (cet ensemble est stable par f_a) alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq a}$$

Ce résultat peut aussi s'établir directement par récurrence.

4. –
   - En utilisant l'*inégalité des accroissement finis* appliquée à la fonction f_a sur l'intervalle $[a, u_n]$ dans lequel elle y est continue et dérivable, nous pouvons écrire selon (4) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq f_a(u_n) - f_a(a) \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

   soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$$

   - Démontrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$:"$|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
     - L'initialisation pour $n = 1$ est immédiate car :

$$|u_1 - a| \leq |u_1 - a|$$

     - Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

– Montrons que $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1}-a| & \leq & \frac{1}{2}|u_n-a| \\ & \leq & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1-a| \text{ selon l'hypothèse de récurrence} \\ & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^{n}|u_1-a| \end{array}$$

Conclusion : la propositon étant transmissible est donc héréditraire selon le *premier principe de récurrence* (ou *récurrence standart*) pour tout entier n non nul soit donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n-a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1-a|}$$

5. Comme :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, le *théorème d'encadrement* nous permet d'écrire que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

6.
```
program ecricome;
var i : integer; u : real;
begin
u:=1;
for n :=0 to 99 do
begin writeln('indice ',n, ' :',u); u:=(u+2/u)/2 end;
end.
```

1.3 Recherche d'extremum d'une fonctio à deux variables

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
Nous avons après quelques calculs rapides :

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial f_a}{\partial x}(x,y) = -\frac{\left(y-x^2\right)(y+1)}{2x^2y} \\ \frac{\partial f_a}{\partial x}(x,y) = -\frac{\left(x-y^2\right)(x+1)}{2xy^2} \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y+1}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x+1}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y}(x,y) = -\left(\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\right) \text{ le \textit{théorème de Schwarz} s'applique ici} \end{array}}$$

2. Comme nous travaillons sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si g admet un *extremum local*, c'est forcément en un

point critique (x_0, y_0) vérifiant :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_a}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \dfrac{\partial f_a}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\left(y_0-x_0^2\right)\left(y_0+1\right)}{2x_0^2y_0}=0 \\ -\dfrac{\left(x_0-y_0^2\right)\left(x_0+1\right)}{2x_0y_0^2}=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} y_0-x_0^2=0 \\ x_0-y_0^2=0 \end{array}\right. \text{ car } x_0 \text{ et } y_0 \text{ sont strictement positif} \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} y_0-x_0^2=0 \\ x_0-x_0^4=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} y_0-x_0^2=0 \\ -x_0\left(x_0-1\right)\left(x_0^2+x_0+1\right)=0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} y_0-x_0^2=0 \\ x_0=1 \end{array}\right. \text{ car } x_0 \text{ est strictement positif} \\
\Longleftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} y_0=1 \\ x_0=1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{g \text{ admet donc un seul point critique en } (1,1)}$$

Examinons maintenant sa nature. Pour cela calculons $rt-s^2$ en notant :

$$r=\frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(1,1) \quad s=\frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y}(1,1) \quad t=\frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(1,1)$$

Cela nous donne facilement :

$$\begin{aligned}
rt-s^2 &= 2\times 2-(-1)^2 \\
&= 3 \\
&> 0
\end{aligned}$$

La stricte positivité de l'expression nous permet de dire que le point candidat est effectivement un extremum, et comme $r>0$:

$$\boxed{g \text{ présent au point } (1,1) \text{ un minimum local}}$$

3. Vérifions ...

$$\begin{aligned}
1+f_1(x)+f_1(y)+f_1\left(\frac{x}{y}\right) &= 1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\frac{x}{y}+\frac{1}{2x}y+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+1 \\
&= \frac{x^2y+xy^2+x^2+y^2+y+x+2xy}{2xy} \\
&= \frac{xy\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2+x+y}{2xy} \\
&= \frac{\left(x+y\right)\left(xy+x+y+1\right)}{2xy} \\
&= \frac{\left(x+y\right)\left(x+1\right)\left(y+1\right)}{2xy} \\
&= \boxed{g\left(x,y\right)}
\end{aligned}$$

4. Pour déduire que l'extremum local de g sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ soit un minimum global il suffit de montrer que:

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad g(x,y) - g(1,1) \geq 0$$

Or :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ g(x,y) - g(1,1) &= 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) - (1 + f_1(1) + f_1(1) + f_1(1)) \\
&= f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) - 3 \\
&\geq 1 + 1 + 1 - 3 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

car selon (1) : $\forall t > 0,\ f_1(t) \geq 1$.
Conclusion :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad g(x,y) - g(1,1) \geq 0$$

$$\boxed{g \text{ présente un minimum global au point } (1,1)}$$

Exercice 2

2.1 Diagonalisation de A.

1. Comme $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ un calcul rapide et sans commentaire particulier donne que :

$$\boxed{A^2 = A} \tag{5}$$

Cette égalité prouve que $P = X^2 - X$ est un *polynôme annulateur* de A et comme d'après le cours *spec* (A) est inclus dans l'ensemble des racines de P alors :

$$\boxed{\text{les valeurs propres } \underline{\text{possibles}} \text{ de } A \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$$

2. Testons les valeurs propres possibles de A.

- Commençons par la valeur 0. Si 0 n'était pas valeur propre de A alors A serait inversible, ce qui n'est pas le cas puisque les deux colonnes sont clairement proportionnelles. Moralité :

$$0 \text{ est valeur propre de } A$$

- D'autre part si 1 n'était pas valeur propre alors $A - I$ serait inversible. Or nous avons :

$$\begin{aligned}
A^2 = A &\implies A(A - I) = 0 \\
&\implies A(A - I)(A - I)^{-1} = 0 \\
&\implies A = 0 \text{ ce qui est faux !}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$1 \text{ est valeur propre de } A$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$$

- Comme le cardinal de *spec* (A) est égal à deux et comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce résultat donne une <u>condition suffisante</u> pour conclure que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

- D'après le cours A est semblable à une matrice une matrice diagonale, donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

car :

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 3x - y = 0 \text{ et } 6x - 2y = 0 \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 3x - y = 0 \right\} \\
&= Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \\
\text{et } E_1(A) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 2x - y = 0 \text{ et } 6x - 3y = 0 \right\} \\
&= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid 2x - y = 0 \right\} \\
&= Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Enfin par la *méthode de Gauss-Jordan* :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

2.2 Diagonalisation de ϕ_A.

1. _

- Pour commencer signalons que si A et M sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors par propriété AM et MA appartiennent encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\phi_A \text{ est bien une application de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans lui-même} \tag{6}$$

- Linéarité de ϕ_A.
Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et a et b deux réels alors :

$$\begin{aligned}
\phi_A(aM_1 + bM_2) &= A(aM_1 + bM_2) - (aM_1 + bM_2)A \\
&= aAM_1 + bAM_2 - aM_1A - bM_2A \\
&= a(AM_1 - M_1A) + b(AM_2 - M_2A) \\
&= a\phi_A(M_1) + b\phi_A(M_2)
\end{aligned}$$

$$\phi_A \text{ est une application linéaire} \tag{7}$$

Conclusion : selon (6) et (7)

$$\boxed{\phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

2. _

- Montrons que $\phi_A^3 - \phi_A$ est l'application nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour établir que $X^3 - X$ est un *polynôme annulateur* de ϕ_A. Autrement dit montrons que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

nous obtenons $\phi_A^3(M) - \phi_A(M) = 0$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \phi_A^2(M) &= (\phi_A \circ \phi_A)(M) \\
&= \phi_A(\phi_A(M)) \\
&= A\phi_A(M) - \phi_A(M)A \\
&= A^2M - AMA - AMA + MA^2 \\
&= AM - 2AMA + MA \text{ puisque } A^2 = A \\
\Longrightarrow \phi_A^3(M) &= \phi_A(AM - 2AMA + MA) \\
&= A^2M - 2A^2MA + AMA - AMA + 2AMA^2 - MA^2 \\
&= AM - 2AMA + AMA - AMA + 2AMA - MA \text{ puisque } A^2 = A \\
&= AM - MA \\
&= \phi_A(M)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\phi_A^3 = \phi_A}$$

- Comme l'ensemble des racines de Q où $Q = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est $\{-1, 0, 1\}$ alors:

$$\boxed{spec(\phi_A) \subset \{-1, 0, 1\}} \tag{8}$$

3. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \text{ est un vecteur propre de } \phi_A &\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \phi_A(M) = \lambda M \\
&\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid AM - MA = \lambda M \\
&\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid PDP^{-1}M - MPDP^{-1} = \lambda M \\
&\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid PDP^{-1}MP - MPD = \lambda MP \\
&\iff M \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid DP^{-1}MP - P^{-1}MPD = \lambda P^{-1}MP \\
&\iff \boxed{N = P^{-1}MP \neq 0 \quad \text{et} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \quad DN - ND = \lambda N}
\end{aligned}$$

(a) On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E &= \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid DN - ND = 0\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \boxed{Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}
\end{aligned}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\ker \phi_A &= E_0(\phi_A) \\
&= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \phi_A(M) = 0\} \\
&= \left\{P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \mid a \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} 3d - 2a & a - d \\ 6d - 6a & 3a - 2d \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{a\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}\right\} \\
&= Vect\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right\} \\
&= Vect\{M_1, A\}
\end{aligned}$$

Explications : nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} M \in E_0(\phi_A) &\iff \phi_A(M) = 0 \\ &\iff AM - MA = 0 \\ &\iff DN - ND = 0 \text{ avec } N = P^{-1}MP \\ &\iff N \in E \end{aligned}$$

Nota bene : M_1 et A sont non nulles et non proportionnelles alors :

$$\dim \ker \phi_A = 2$$

(c) Les deux autres valeurs propres possibles de ϕ_A sont -1 et 1 selon (8). Testons-les.

- Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de ϕ_A alors $\phi_A - id$ est bijectif et :

$$\begin{aligned} \phi_A^3 = \phi_A &\iff \phi_A^3 - \phi_A = 0 \\ &\iff \left(\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\phi_A\left(\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right) = 0 \\ &\iff \left(\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)^{-1}\left(\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\phi_A\left(\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right) = 0 \\ &\iff \phi_A\left(\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right) = 0 \\ &\iff \phi_A^2 + \phi_A = 0 \end{aligned}$$

  ce qui est faux puisque :

$$\begin{aligned} \left(\phi_A^2 + \phi_A\right)(M) &= AM - 2AMA + MA + AM - MA \\ &= 2AM - 2AMA \\ &= 2AM(I - A) \\ &= 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  et il existe une matrice M telle que $2AM(I - A) \neq 0$, prenez par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vous verrez !
  Ainsi :

$$\boxed{1 \in spec(\phi_A)}$$

- En effectuant le même raisonnement pour l'autre valeur propre potentielle -1 on trouvera que :

$$\boxed{-1 \in spec(\phi_A)}$$

  En effet supposons que -1 ne soit pas valeur propre de ϕ_A alors $\phi_A + id$ est bijectif et :

$$\begin{aligned} \phi_A^3 = \phi_A &\iff \left(\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\left(\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\phi_A = 0 \\ &\iff \left(\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)^{-1}\left(\phi_A + id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right)\phi_A\left(\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right) = 0 \\ &\iff \phi_A\left(\phi_A - id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\right) = 0 \\ &\iff \phi_A^2 - \phi_A = 0 \end{aligned}$$

  ce qui est faux puisque :

$$\begin{aligned} \left(\phi_A^2 - \phi_A\right)(M) &= AM - 2AMA + MA - AM + MA \\ &= 2MA - 2AMA \\ &= 2(I - A)MA \\ &= 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  et il existe une matrice M telle que $2(I - A)MA \neq 0$, prenez encore $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vous verrez le même constat !
  Cherchons pour finir $E_1(\phi_A)$ et $E_{-1}(\phi_A)$.

- Caractériser les matrices associées à la valeur propre 1 passe par la recherche des matrices N vérifiant :
$$DN - ND = N$$
soit chercher les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que :
$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
cela nous donne une infinité de matrices N de la forme :
$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}}$$
Nota bene : au passage comme nous venons de trouver une infinité de matrices N, cela nous confirme bien que 1 est valeur propre de ϕ_A. Vous auriez parfaitement pu faire ce constat, auparavant, à la place de la solution proposée pour tester 1.
- De même caractériser les matrices associées à la valeur propre -1 passe par la recherche des matrices N vérifiant :
$$DN - ND = -N$$
soit chercher les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que :
$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$
cela nous donne une infinité de matrices N de la forme :
$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad b \in \mathbb{R}}$$
Nota bene : là encore comme nous venons de trouver une infinité de matrices N, cela nous confirme bien aussi que -1 est valeur propre de ϕ_A. Vous auriez pu encore faire ce constat, auparavant, à la place de la solution proposée pour tester -1.

(d) _

- $E_1(\phi_A)$:
$$\begin{aligned} E_1(\phi_A) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \phi_A(M) = M\} \\ &= \left\{P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mid c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -2c & c \\ -4c & 2c \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \boxed{Vect\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right\}} \end{aligned}$$
Nota bene : comme $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ alors $\dim E_1(\phi_A) = 1$.
- $E_{-1}(\phi_A)$:
$$\begin{aligned} E_{-1}(\phi_A) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \phi_A(M) = -M\} \\ &= \left\{P \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \mid b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 3b & -b \\ 9b & -3b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \boxed{Vect\left\{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\right\}} \end{aligned}$$

Nota bene : comme $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \neq 0$ alors $\dim E_{-1}(\phi_A) = 1.$

4. Nous avons :
$$\dim E_0(\phi_A) + \dim E_1(\phi_A) + \dim E_{-1}(\phi_A) = 4$$
cela équivaut à dire que :
$$\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable}}$$

Exercice 3

3.1 Mode de paiement de la clientèle.

1. _

(a) Les données de l'énoncé nous donne la loi du couple (S, U). Chercher les lois de S et de U revient à déterminer les deux *lois marginales* du couple.

- Loi de S.
Comme nous avons $S(\Omega) = \{0, 1\}$, S suit une *loi de Bernoulli* de paramètre $\mathbf{P}([S = 1])$ avec selon la *première version de la formule des probabilités totales* :
$$\begin{aligned} \mathbf{P}([S=1]) &= \mathbf{P}([S=1] \cap [U=0]) + \mathbf{P}([S=1] \cap [U=1]) \\ &= 0.2 + 0.1 \\ &= \boxed{0.3} \end{aligned}$$
Conclusion :
$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}(0.3)}$$

- Loi de U.
De même $U(\Omega) = \{0, 1\}$ et U suit une *loi de Bernoulli* de paramètre $\mathbf{P}([U = 1])$ avec selon la *première version de la formule des probabilités totales* :
$$\begin{aligned} \mathbf{P}([U=1]) &= \mathbf{P}([U=1] \cap [S=0]) + \mathbf{P}([U=1] \cap [S=1]) \\ &= 0.3 + 0.1 \\ &= \boxed{0.4} \end{aligned}$$
Conclusion :
$$\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{B}(0.4)}$$
En notant C l'événement : "le client règle ses achats par carte bancaire", il est clair que :
$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(C) \\ &= \mathbf{P}([U=0]) \\ &= 1 - 0.4 \\ &= 0.6 \\ &= \boxed{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

(b) Comme les deux variables S et U admettent chacune un *moment d'ordre deux* puisque ce sont des variables finies, la covariance du couple (S, U) existe avec, par théorème :
$$cov(S, U) = \mathbf{E}(SU) - \mathbf{E}(S)\,\mathbf{E}(U)$$
où :
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(SU) &= 1 \times 1 \times 0.1 \\ &= 0.1 \\ \mathbf{E}(S) &= 0.3 \\ \mathbf{E}(U) &= 0.4 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} cov\,(S,U) &= 0.1 - (0.3 \times 0.4) \\ &= \boxed{-0.02} \end{aligned}$$

Comme la covariance du couple est *non nulle* :

$$\boxed{\text{les variables } S \text{ et } U \text{ sont dépendantes}}$$

(c) On demande de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{[U=1]}([S=1])$ avec $\mathbf{P}([U=1]) \neq 0$. Par définition :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[U=1]}([S=1]) &= \frac{\mathbf{P}([U=1] \cap [S=1])}{\mathbf{P}([U=1])} \\ &= \frac{0.1}{0.4} \\ &= \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

2. _

(a) Comme la variable C_n comptabilise le nombre de clients parmi n qui paient par carte bancaire, les modes de paiement étant indépendants entre les individus, nous pouvons dire que :

$$\boxed{C_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathbf{P}([U=0])) = \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{5}\right)}$$

D'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(C_n) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(C_n) = np(1-p)}$$

(b) **Attention malgré les apparences ne dites surtout pas que L_1 suit une loi géométrique** car c'est une <u>variable finie</u>. En effet nous avons $L_1(\Omega) = [|0,n|]$. Notons pour tout $i \in [|1,n|]$, B_i l'événement : "le $i^{\text{ème}}$ individu utilise sa carte bleue pour régler ses achats". Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall k \in [|1,n|],\ \mathbf{P}([L_1=k]) &= \mathbf{P}\left(\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\left(\overline{B_i}\right)\mathbf{P}(B_k) \text{ par indépendances des modes de paiement} \\ &= (\mathbf{P}([U=1]))^{k-1}\,\mathbf{P}([U=0]) \\ &= (1-p)^{k-1}\,p \\ \text{et } \mathbf{P}([L_1=0]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right) \text{ par indépendances des modes de paiement} \\ &= (\mathbf{P}([U=1]))^{n} \\ &= (1-p)^{n} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([L_1=k]) = \begin{cases} (1-p)^{k-1}\,p & \text{si} \quad k \in [|1,n|] \\ (1-p)^{n} & \text{si} \quad k=0 \end{cases}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}([L_1=k]) &= p^n + \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}(1-p) \text{ somme géométrique de raison } 0.4 \neq 1 \\ &= p^n + (1-p)\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

(c) Pour commencer nous avons encore $L_2(\Omega) = \{0\} \cup [|2,n|]$. avec :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [|2,n|],\ \mathbf{P}([L_2 = k]) &= \mathbf{P}([C_{k-1} = 1])\,\mathbf{P}(B_k) \text{ par indépendances des modes de paiement} \\
&= \mathbf{P}([C_{k-1} = 1])\,\mathbf{P}([U = 0]) \\
&= \binom{k-1}{1} p(1-p)^{k-2} p \\
&= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \\
\text{et } \mathbf{P}([L_2 = 0]) &= \mathbf{P}([C_n \le 1]) \\
&= \mathbf{P}([C_n = 0]) + \mathbf{P}([C_n = 1]) \\
&= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \\
&= (1-p)^{n-1}(1-p+np) \\
&= (1-p)^{n-1}((n-1)p+1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}([L_2 = k]) = \begin{cases} (k-1)p^2(1-p)^{k-2} & \text{si } k \in [|2,n|] \\ (1-p)^{n-1}((n-1)p+1) & \text{si } k = 0 \end{cases}}$$

Nota bene : vous pouvez vérifier au passage que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}([L_2 = k]) + \mathbf{P}([L_2 = 0]) &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)p^2(1-p)^{k-2} + (1-p)^{n-1}((n-1)p+1) \\
&= -\frac{(1-p)^{n+1}(-p+np+1)}{(p-1)^2} + ((n-1)p+1)(1-p)^{n-1} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

3.2 Etude du temps moyen de passage en caisse.

1. Par définition on dit que X suit la *loi exponentielle de paramètre 1* si f_X une de ses densités est définie par :

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}}$$

D'après le cours :

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = 1}$$

2. _

- Pour commencer notons que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ car f coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+$ f est continue comme produit de telles fonctions.
- La positivité de f ne pose aucun problème.
- Enfin :

$$\int_{\mathbb{R}} f \text{ converge} \iff \int_{\mathbb{R}_-^*} f \text{ converge} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} f \text{ converge}$$

  – $\int_{\mathbb{R}_-^*} f$ converge clairement puisque f coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$,

  – $\int_{\mathbb{R}_+} f$ converge puisque $\int_{\mathbb{R}_+} f = \mathbf{E}(X) = 1$ où $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$.

  Ainsi $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

- T admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$ est absolument convergente. En cas de convergence, $\mathbf{E}(T)$ est le réel défini par : $\mathbf{E}(T) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx$.
Or :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \text{ est absolument converge} &\iff \int_{\mathbb{R}_+} xf(x)\,dx \text{ cv car } f \text{ coïncide avec } 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \\ &\iff \int_{\mathbb{R}_+} x^2e^{-x}dx \text{ est convergente}\end{aligned}$$

Or comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} x^2e^{-x}dx = \mathbf{E}\left(X^2\right)$ où $X \hookrightarrow \varepsilon(1)$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} x^2e^{-x}dx$ existe et vaut 2 (c'est la valeur de $\mathbf{V}(X) + (\mathbf{E}(X))^2$).
Conclusion :

$$\boxed{T \text{ admet une espérance égale à } 2}$$

et :

$$\boxed{\text{le temps moyen de passage en caisse est 2 unités de temps}}$$

3. _

(a) Déterminons la fonction de répartition de T notée F_T définie par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) &= \mathbf{P}([T \leq x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\end{aligned}$$

- Si $x < 0$:

$$F_T(x) = 0 \text{ car } f \text{ coïncide avec la fonction nulle sur } \mathbb{R}_-^* \tag{9}$$

- Si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}F_T(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \text{ par } \textit{Chasles} \\ &= \int_{0}^{x} te^{-t}dt \\ &= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \\ &= 1 - (x+1)\,e^{-x}\end{aligned} \tag{10}$$

par intégrations par parties où les fonctions en jeu $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$ avec $x \geq 0$.
Conclusion : selon (9) et (10)

$$\boxed{F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[T>1]}([T<2]) &= \frac{\mathbf{P}([T<2]\cap[T>1])}{\mathbf{P}([T>1])} \text{ avec } \mathbf{P}([T>1]) \neq 0 \\
&= \frac{\mathbf{P}([1<T<2])}{\mathbf{P}([T>1])} \\
&= \frac{F_T(2)-F_T(1)}{1-F_T(1)} \\
&= \frac{1-3e^{-2}-\left(1-2e^{-1}\right)}{1-(1-2e^{-1})} \\
&= \frac{-3e^{-2}+2e^{-1}}{2e^{-1}} \\
&= \frac{\frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}}{\frac{2}{e}} \\
&= \frac{\frac{2e-3}{e^2}}{\frac{2}{e}} \\
&= \boxed{\frac{2e-3}{2e}}
\end{aligned}$$

4. –

(a) Selon l'énoncé le temps d'attente du client C correspond au plus faible temps de passage en caisse entre les deux clients A et B. Donc :

$$\boxed{M = \inf(T_A, T_B)}$$

(b) Soit F_M la fonction de répartition de M. Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \mathbf{P}([M \leq x])$$

Nous avons clairement $M(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc :

- si $t < 0$,
$$F_M(x) = 0 \tag{11}$$
- si $t \geq 0$,
$$\begin{aligned}
F_M(t) &= \mathbf{P}([M \leq t]) \\
&= 1-\mathbf{P}([M>t]) \\
&= 1-\mathbf{P}([T_A>t]\cap[T_B>t]) \\
&= 1-\mathbf{P}([T_A>t])\,\mathbf{P}([T_B>t]) \text{ par indépendance des variables} \\
&= 1-(\mathbf{P}([T>t]))^2 \text{ en supposant légitimement que } \mathcal{L}(T_A)=\mathcal{L}(T_B)=\mathcal{L}(T) \\
&= 1-\left((t+1)\,e^{-t}\right)^2 \\
&= 1-(t+1)^2\,e^{-2t} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon (11) et (12)

$$\boxed{F_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ 1-(t+1)^2\,e^{-2t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}}$$

(c) Ce sont les propriétés de F_M qui permettront de dire que M est une variable à densité.Nous voyons à ce niveau que :

- $\lim\limits_{-\infty} F_M = 0$,

- $\lim\limits_{+\infty} F_M = 1$, par croissances comparées (polynôme-exponentielle) puisque $(t+1)^2 e^{-2t} \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^{-2t}$
- F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction nulle),
- F_Y est continue sur $\mathbb{R}_+$ (différence et somme de telles fonctions),
- $\lim\limits_{0^-} F_M = 0 = \lim\limits_{0^+} F_M = F_M(0) = 1$, donc F_M est continue sur $\mathbb{R}$.
- D'autre part F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (immédiat), ce qui fait qu'elle a toutes les propriétés requises pour affirmer que M est une variable à densité dont une densité f_M est obtenue par dérivation de F_M sur $\mathbb{R}^*$ nous obtenons f_M une densité de M et nous poserons que $f_M(0) = 0$, soit :

$$\boxed{f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2te^{-2t}(t+1) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

✠✠✠✠✠