

ECRICOME 2009

EXERCICE 1

PARTIE I : Étude d'un cas particulier

$$1. \Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -V_2 + V_3.$$

$$\Phi_A(V_2) = AV_2 - V_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -V_1 + V_4.$$

$$\Phi_A(V_3) = AV_3 - V_3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V_1 - V_4.$$

$$\Phi_A(V_4) = AV_4 - V_4A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = V_2 - V_3.$$

La matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

T est une matrice symétrique d'ordre 4 à coefficients réels donc :

T est diagonalisable.

$$2. T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$T^3 = T \times T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T.$$

$T^3 = 4T$.

$T^3 - 4T = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ donc $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de T dont les zéros dans \mathbb{R} sont 2, -2 et 0.

Par conséquent le spectre de T est **contenu** dans $\{2, -2, 0\}$.

L'ensemble des valeurs propres de T est **contenu** dans $\{2, -2, 0\}$. $\text{Sp}(T) \subset \{2, -2, 0\}$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ t = x \end{cases}.$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid y = z \text{ et } t = x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \text{Vect}(X_3, X_4)$.

D'abord X_3 n'est pas nul et $TX_3 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc 0 est valeur propre de T .

Ce qui précède montre aussi que le sous-espace propre associé, que nous noterons SEP $(T, 0)$, est $\text{Vect}(X_3, X_4)$.

(X_3, X_4) est une famille génératrice de SEP $(T, 0)$. Montrons que cette famille est libre.

Soient deux réels α et β tels que $\alpha X_3 + \beta X_4 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de montrer que (X_3, X_4) est une famille libre. C'est donc une base de SEP $(T, 0)$.

0 est valeur propre de T et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base du sous-espace propre associé.

$$4. \quad TX_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1.$$

$$TX_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2.$$

$$TX_1 = 2X_1 \text{ et } TX_2 = -2X_2.$$

5. Rappelons que 0 est valeur propre de T et que (X_3, X_4) est une base du sous-espace propre associé.

X_1 n'est pas nul et $TX_1 = 2X_1$ donc 2 est valeur propre de T et X_1 est un vecteur propre associé.

X_2 n'est pas nul et $TX_2 = -2X_2$ donc -2 est valeur propre de T et X_2 est un vecteur propre associé.

0, 2, et -2 sont des valeurs propres de T et nous avons vu que le spectre de T est contenu dans $\{2, -2, 0\}$.

Ainsi les valeurs propres de T sont 2, -2 et 0. $\text{Sp}(T) = \{2, -2, 0\}$.

$\dim \text{SEP}(T, 2) \geq 1$, $\dim \text{SEP}(T, -2) \geq 1$, $\dim \text{SEP}(T, 0) = 2$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de T est au plus 4, nécessairement $\dim \text{SEP}(T, 2) = 1$ et $\dim \text{SEP}(T, -2) = 1$.

Notons que $\dim \text{SEP}(T, 2) + \dim \text{SEP}(T, -2) + \dim \text{SEP}(T, 0) = 4$; on retrouve le fait que T est diagonalisable.

(X_1) est une base de SEP $(T, 2)$, (X_2) est une base de SEP $(T, -2)$ et (X_3, X_4) est une base de SEP $(T, 0)$.

Comme $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est somme directe de ces trois sous-espaces propres, (X_1, X_2, X_3, X_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T respectivement associés aux valeurs propres 2, -2, 0, 0.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2, X_3, X_4) .

Ce qui précède indique que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, P est inversible et $P^{-1}TP = \text{Diag}(2, -2, 0, 0)$.

Notons que $D = \text{Diag}(2, -2, 0, 0)$ est une matrice diagonale telle que $T = PDP^{-1}$.

Si P est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors P est inversible et $T = PDP^{-1}$.

Exercice Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général.

1. • Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM - MA$ est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Φ_A est donc une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de E et soit λ un réel.

$$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda(AM - MA) + (AN - NA).$$

$$\text{Donc } \Phi_A(\lambda M + N) = \lambda \Phi_A(M) + \Phi_A(N).$$

Ainsi Φ_A est linéaire.

Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. $\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle M | N \rangle = \text{Tr}({}^tMN) \in \mathbb{R}$ (0).

• Soient M, N et P trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

$$\langle M | \lambda N + P \rangle = \text{Tr}({}^tM(\lambda N + P)) = \text{Tr}(\lambda {}^tMN + {}^tMP) = \lambda \text{Tr}({}^tMN) + \text{Tr}({}^tMP) = \lambda \langle M | N \rangle + \langle M | P \rangle.$$

$$\forall (M, N, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle M | \lambda N + P \rangle = \lambda \langle M | N \rangle + \langle M | P \rangle \quad (1).$$

• Soient $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle N | M \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j} = \langle M | N \rangle$.

$$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \langle N | M \rangle = \langle M | N \rangle \quad (2).$$

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle M | M \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \geq 0$.

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle M | M \rangle \geq 0 \quad (3).$$

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle M | M \rangle = 0$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 = 0 \text{ et } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j}^2 \geq 0. \text{ Ainsi } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = 0.$$

Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = 0$. Donc M est la matrice nulle.

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle M | M \rangle = 0 \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \quad (4).$$

(0), (1), (2), (3), (4) suffisent pour dire que

$$\boxed{\text{l'application } (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \langle M | N \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle \Phi_A(M) | N \rangle = \text{Tr}({}^t \Phi_A(M) N) = \text{Tr}({}^t (AM - MA) N) = \text{Tr}(({}^t (AM) - {}^t (MA)) N) = \text{Tr}({}^t (AM) N - {}^t (MA) N).$$

$$\langle \Phi_A(M) | N \rangle = \text{Tr}({}^t M^t A N - {}^t A^t M N) = \text{Tr}({}^t M A N) - \text{Tr}({}^t A^t M N) \text{ car } A \text{ est symétrique.}$$

$$\text{Notons que } \text{Tr}({}^t A^t M N) = \text{Tr}({}^t M N A).$$

$$\text{Alors } \langle \Phi_A(M) | N \rangle = \text{Tr}({}^t M A N) - \text{Tr}({}^t M N A) = \text{Tr}({}^t M A N - {}^t M N A) = \text{Tr}({}^t M (A N - N A)) = \langle M, \Phi_A(M) \rangle.$$

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } M, N \text{ appartenant à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a : } \langle \Phi_A(M) | N \rangle = \langle M | \Phi_A(N) \rangle.}$$

Alors Φ_A est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

4. (a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$M_{X,Y} = X^t Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) = (x_i y_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

X et Y sont des vecteurs propres de A . Ce sont donc des éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi on peut trouver deux éléments i_0 et j_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que : $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0} y_{j_0}$ n'est pas nul. $M_{X,Y}$ ayant un coefficient non nul, ce n'est pas la matrice nulle.

$$\boxed{M_{X,Y} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

$AY = \mu Y$ donc ${}^t(AY) = {}^t(\mu Y)$. Alors ${}^t Y^t A = \mu {}^t Y$. Comme A est symétrique on obtient :

$$\boxed{{}^t Y A = \mu {}^t Y.}$$

(b) $\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX^t Y - X^t Y A = (\lambda X)^t Y - X^t (\mu Y) = \lambda X^t Y - \mu X^t Y = (\lambda - \mu) M_{X,Y}$.

$$\boxed{\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu) M_{X,Y}.$$

Comme $M_{X,Y}$ n'est pas la matrice nulle, $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A et $M_{X,Y}$ en est un vecteur propre associé.

Ce qui précède montre que si λ et μ sont deux valeurs propres quelconques de A , alors $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A . Comme $\Gamma = \left\{ \lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in (\text{Sp } A)^2 \right\}$, Γ est contenu dans le spectre de Φ_A .

$$\boxed{\Gamma \subset \text{Sp } \Phi_A.}$$

5. (a) A est diagonalisable donc il existe une base (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A .

Comme pour tout vecteur propre Z de A , $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} : \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $MZ_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit U un élément quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) .

$$MU = M \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k Z_k \right) = \sum_{k=1}^n (\gamma_k MZ_k) = \sum_{k=1}^n (\gamma_k 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

Ainsi : $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MU = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit (E_1, E_2, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $ME_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Cela signifie encore que pour tout élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de M est nulle. Donc M est la matrice nulle.

Si pour **TOUT** vecteur propre Z de A , $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ alors M est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

M est un vecteur propre de Φ_A donc M n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est alors impossible que : pour tout vecteur propre Z de A on ait $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent :

il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

(b) et (c) $\Phi_A(M) = \alpha M$ car M est un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α .

Ceci s'écrit encore : $AM - MA = \alpha M$.

Alors $\alpha MZ_0 = (AM - MA)Z_0 = AMZ_0 - MAZ_0$.

Or $AZ_0 = \mu Z_0$. Ainsi : $\alpha MZ_0 = AMZ_0 - M(\mu Z_0) = AMZ_0 - \mu MZ_0$. Donc $AMZ_0 = (\alpha + \mu) MZ_0$.

Comme MZ_0 n'est pas nul(le), $\alpha + \mu$ est une valeur propre de A et MZ_0 en est un vecteur propre associé.

MZ_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\alpha + \mu$.

Dès lors, posons : $\lambda = \alpha + \mu$. $\alpha = \lambda - \mu$ et, λ et μ sont deux valeurs propres de A . Par conséquent α est un élément de Γ .

Nous venons de montrer que toute valeur propre α de Φ_A appartient à Γ . Donc $\text{Sp } \Phi_A \subset \Gamma$. Ceci et la question 4 permettent d'affirmer que :

$$\text{Sp } \Phi_A = \Gamma = \left\{ \lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in (\text{Sp } A)^2 \right\}.$$

EXERCICE 2

1. Domaine de définition de f :

(a) Soit a un réel strictement positif. Posons : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_a(t) = \begin{cases} a e^{-at} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

φ_a est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a .

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t) dt$ existe et vaut 1. Il en est alors de même pour $\int_0^{+\infty} \varphi_a(t) dt$.

En remarquant que $\forall t \in [0, +\infty[, e^{-at} = \frac{1}{a} \varphi_a(t)$ on peut dire que $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ existe et vaut $\frac{1}{a}$.

Pour tout réel a strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge et vaut $\frac{1}{a}$.

(b) Soit x un réel. Posons : $\forall t \in [0, +\infty[, \psi_x(t) = e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$. ψ_x est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

• Supposons que x vaut 0. $\forall t \in [0, +\infty[, \psi_x(t) = \psi_0(t) = e^{-2t}$. (a) montre alors que $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Remarque f est définie en 0 et $f(0) = \int_0^{+\infty} \psi_0(t) dt = \frac{1}{2}$.

• Supposons x non nul. $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x^2 e^{2t}) = +\infty$ donc $1 =_{t \rightarrow +\infty} o(x^2 e^{2t})$. Alors $1 + x^2 e^{2t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 e^{2t}$.

Par conséquent : $\psi_x(t) = e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2t} \sqrt{x^2 e^{2t}} = e^{-2t} |x| e^t = |x| e^{-t}$.

$$\diamond \psi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} |x| e^{-t}.$$

$$\diamond \forall t \in [0, +\infty[, |x| e^{-t} \geq 0.$$

\diamond D'après (a), $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} |x| e^{-t} dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$.

Pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} dt$ converge.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

(a) Soit x un réel strictement positif. Soit t un réel positif ou nul.

• $x e^t = |x e^t| = \sqrt{x^2 e^{2t}} \leq \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$. Ainsi : $x e^t \leq \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}$.

• $\left(x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2 e^{2t} + 2 x e^t \frac{e^{-t}}{2x} + \frac{e^{-2t}}{4x^2} = x^2 e^{2t} + 1 + \frac{e^{-2t}}{4x^2} \geq 1 + x^2 e^{2t}$.

Alors $\sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq \sqrt{\left(x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2} = \left|x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right|$.

Or $x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}$ est un réel positif. Ainsi $\sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}$.

Pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul : $x e^t \leq \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}$.

(b) Soit x un réel strictement positif.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $x e^t \leq \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq x e^t + \frac{e^{-t}}{2x}$ et $e^{-2t} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0, +\infty[$, $x e^t e^{-2t} \leq e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} \leq x e^t e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{2x} e^{-2t}$.

Ou : $\forall t \in [0, +\infty[$, $x e^{-t} \leq \psi_x(t) \leq x e^{-t} + \frac{1}{2x} e^{-3t}$ (Δ).

D'après la première question $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-3t} dt$ convergent et valent respectivement 1 et $\frac{1}{3}$.

Alors $\int_0^{+\infty} x e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \left(x e^{-t} + \frac{1}{2x} e^{-3t} \right) dt$ convergent et valent respectivement x et $x + \frac{1}{2x} \times \frac{1}{3}$.

Rappelons que $\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt$ converge également.

Alors l'inégalité (Δ) et la croissance de l'intégrale ($0 \leq +\infty$) donnent $x \leq \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \leq x + \frac{1}{6x}$ ou $x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$.

Pour tout réel x strictement positif : $x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donnent :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $0 \leq f(x) - x \leq \frac{1}{6x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6x} = 0$ donnent par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. Alors

la courbe représentative de f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x$.

Remarques 1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) - x = \frac{1}{6x} \geq 0$. Notons encore que $f(0) - 0 = f(0) = \frac{1}{2}$.

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{6x} \geq 0$.

Mieux encore : $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) \geq 0 \geq x$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) - x \geq 0$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x \geq 0$.

Ainsi la courbe représentative de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$.

2. Par parité, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et se trouve au-dessous de cette courbe.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

(a) Soit x un réel strictement positif.

Version 1. La fonction $t \rightarrow x e^t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $u = x e^t$ dans ce qui suit.

$$\forall A \in [0, +\infty[, \int_0^A e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}} dt = x^2 \int_0^A \frac{\sqrt{1 + (x e^t)^2}}{(x e^t)^3} x e^t dt = x^2 \int_x^{x e^A} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3} du.$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} (x e^A) = +\infty$ et comme $\int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2 e^{2t}} dt$ converge alors $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2 e^{2t}} dt = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$.

Version 2. Ramons pour utiliser avec précision le théorème du programme (qui en particulier "fonctionne" sur des intervalles ouverts !!).

Posons $\forall t \in]0, +\infty[$, $\ell(t) = x e^t$ et $\forall u \in]x, +\infty[$, $g(u) = x^2 \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$.

ℓ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\forall t \in]0, +\infty[$, $\ell'(t) = x e^t > 0$.

ℓ est donc continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle définit alors une bijection de $]0, +\infty[$ sur

$] \lim_{t \rightarrow 0} \ell(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} \ell(t)[$ c'est à dire sur $]x, +\infty[$. Ainsi :

◇ g est continue sur $]x, +\infty[$.

◇ ℓ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]x, +\infty[$, croissante et de classe \mathcal{C}^1 .

Alors les intégrales $\int_x^{+\infty} g(u) du$ et $\int_0^{+\infty} g(\ell(t)) \ell'(t) dt$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales.

Notons que $\forall t \in]0, +\infty[$, $g(\ell(t)) \ell'(t) = x^2 \frac{\sqrt{1+(x e^t)^2}}{(x e^t)^3} x e^t = e^{-2t} \sqrt{1+x^2 e^{2t}} = \psi_x(t)$.

Donc $\int_0^{+\infty} g(\ell(t)) \ell'(t) dt$ converge et est égale à $f(x)$. Ainsi $\int_x^{+\infty} g(u) du$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} g(\ell(t)) \ell'(t) dt$ donc $f(x)$.

Finalement $f(x) = \int_x^{+\infty} g(u) du = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$.

Pour tout réel x strictement positif, $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$ converge et $f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$.

(b) Notons que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du = x^2 \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - \int_1^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du \right)$.

Posons $\forall u \in]0, +\infty[$, $h(u) = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$. h est continue sur $]0, +\infty[$. La primitive H de h sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

Notons que $\forall x \in]0, +\infty[$, $H(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - H(x) \right)$.

$x \rightarrow x^2$ et $x \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - H(x)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ ($\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du$ est une constante...).

Par produit :

f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

De plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 2x \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - H(x) \right) - x^2 h(x)$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{1}{x} \left(2x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du - \sqrt{1+x^2} \right).$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

(c) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x .

Posons $\forall u \in [x, +\infty[, v(u) = \sqrt{1+u^2}$ et $w(u) = -\frac{1}{2u^2}$.

v et w sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[x, +\infty[$. De plus $\forall u \in [x, +\infty[, v'(u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $w'(u) = \frac{1}{u^3}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du = \left[-\frac{1}{2u^2} \sqrt{1+u^2} \right]_x^A - \int_x^A \left(-\frac{1}{2u^2} \right) \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2} + \frac{1}{2} \int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

$$\diamond \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{2A^2} = \frac{1}{2A} \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A} = 0. \text{ Donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2} \right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}.$$

$$\diamond \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du \text{ converge.}$$

Dans ces conditions $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge et $\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$.

Alors $2f(x) = 2x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} du = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$.

Pour tout réel x strictement positif, $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge et $2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} = x \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$.

Soit x un réel strictement positif. $u \rightarrow \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est strictement positive sur $[x, +\infty[, x < +\infty$ et $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge. Alors $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} > 0$. Donc $x \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} > 0$.

Ainsi $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) > 0$.

$$f \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.$$

4. Etude locale de f et f' en 0 :

(a) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x .

Posons $\forall u \in [x, +\infty[$, $z(u) = \ln u$ et $t(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. Notons que $\forall u \in [x, +\infty[$, $t(u) = (1+u^2)^{-\frac{1}{2}}$.

z et t sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[x, +\infty[$.

De plus $\forall u \in [x, +\infty[$, $z'(u) = \frac{1}{u}$ et $t'(u) = -\frac{1}{2}(2u)(1+u^2)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} \right]_x^A - \int_x^A (\ln u) \left(-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \right) du = \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du.$$

◇ $\frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln A}{A}$ et par croissance comparée, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{A} = 0$. Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} = 0$.

Alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$.

◇ $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge.

Dans ces conditions $\int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge et $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$.

Pour tout réel x dans \mathbb{R}^{+*} : $\int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge et $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$.

Nous venons de voir que pour tout réel x strictement positif, $\int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge.

En particulier $\int_1^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge. Ne reste plus qu'à montrer que $\int_0^1 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge.

$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ car $\lim_{u \rightarrow 0^+} (u \ln u) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0^+} (1+u^2)^{\frac{3}{2}} = 1$.

Alors $u \rightarrow \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité à $[0, 1]$.

Par conséquent $\int_0^1 \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge. Finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du \text{ converge.}$$

(b) $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} = x \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$.

$\forall x \in]0, 1[$, $f'(x) = -\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ et $-x \ln x \neq 0$.

Alors $\forall x \in]0, 1[$, $\frac{f'(x)}{-x \ln x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\ln x} \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du = \int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ (car $\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ converge).

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{-x \ln x} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln x.}$$

Soit x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

$$2f(x) - \sqrt{1+x^2} = x f'(x). \quad 2 \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = 2f(x) - 1 = x f'(x) + \sqrt{1+x^2} - 1 = x f'(x) + \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}.$$

$$2 \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = x f'(x) + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1}.$$

En divisant par $-x^2 \ln x$ qui n'est pas nul on obtient : $2 \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{-x^2 \ln x} = \frac{f'(x)}{-x \ln x} - \frac{1}{\ln x} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{-x \ln x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\ln x} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{-x^2 \ln x} \right) = 1$.

Alors $2 \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x^2 \ln x$ et :

$$\boxed{f(x) - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln x}{2}.$$

(c) Nous avons déjà vu que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Montrons que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

▽ Version 1 $f(x) - \frac{1}{2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln x}{2}$ et par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2 \ln x}{2} \right) = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$. Par conséquent f est continue à droite en 0. Ainsi f est continue SUR $[0, +\infty[$.

$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -x \ln x$ et par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln x) = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

Résumons : f est continue sur $[0, +\infty[$, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et f' admet une limite finie à droite en 0. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

▽ Version 2 Retrouvons rapidement ce résultat en utilisant très strictement le programme.

Soit \tilde{f} la restriction de f à $]0, +\infty[$.

\tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{f})'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ donc $(\tilde{f})'$ admet une limite finie en 0.

Le cours indique alors que \tilde{f} se prolonge en une fonction \widehat{f} de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

\widehat{f} et f coïncide sur $]0, +\infty[$.

De plus par continuité : $\widehat{f}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \widehat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \widehat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Ainsi \widehat{f} et f coïncide sur $[0, +\infty[$. f est bien de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

Remarque Ceci montre que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$. Notons que nous ne pouvons pas encore parler de $f'(0)$ car nous n'avons pas montré que f est dérivable en 0.

Par parité $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = f(-x)$.

$x \rightarrow -x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0]$, $\forall x \in]-\infty, 0]$, $-x \in [0, +\infty[$ et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. Par composition f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0]$.

Alors f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = f(-x)$ et f est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* . Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -f'(-x)$.

Donc : $f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-f'(-x)) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(-x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -f'_d(0)$.

$f'_g(0) = -f'_d(0)$ or $f'_d(0) = 0$. Ainsi $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$. Cela suffit pour dire que :

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

PROBLÈME

PARTIE I

1. • Supposons que le nombre de tirages nécessaire pour obtenir une première boule blanche soit k . $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que k est supérieur ou égal à 2. Alors les $k-1$ premier(s) tirage(s) ont donné une boule noire qui à chaque fois a été remplacée par une boule blanche. Le nombre de boules noires étant au départ b , $k-1 \leq b$. Donc $k \leq b+1$.

Ce qui vaut encore si k est égal à 1.

Ainsi k appartient à $\llbracket 1, b+1 \rrbracket$. Alors $Y(\Omega) \subset \llbracket 1, b+1 \rrbracket$.

• Réciproquement soit k un élément de $\llbracket 1, b+1 \rrbracket$.

Si k vaut 1, l'obtention d'une boule blanche au premier tirage réalise l'événement $\{Y = k\}$.

Supposons que k est supérieur ou égal à 2. $k-1 \leq b$ donc on peut obtenir des boules noires au cours des $k-1$ premiers tirages et une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage et ainsi réaliser l'événement $\{Y = k\}$.

On a donc $\llbracket 1, b+1 \rrbracket \subset Y(\Omega)$. Finalement :

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, b+1 \rrbracket.$$

2. Pour tout i dans \mathbb{N}^* , notons B_i (resp. N_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche (resp. noire). Soit k un élément de $\llbracket 1, b+1 \rrbracket$.

Supposons que k est supérieur ou égal à 3. $P(Y = k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$. La formule des probabilités composées donne alors :

$$P(Y = k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \dots P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k).$$

Ce que l'on peut encore écrire $P(Y = k) = P(N_1) \left(\prod_{i=2}^{k-1} P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{i-1}}(N_i) \right) P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k)$.

- $P(N_1) = \frac{b}{a+b}$.

- Soit i un élément de $\llbracket 2, k-1 \rrbracket$. Supposons l'événement $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{i-1}$ réalisé.

Avant le $i^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient alors $b - (i-1)$ boules noires et $a + (i-1)$ boules blanches.

La probabilité pour que le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire est alors $\frac{b - (i-1)}{a+b}$.

Ainsi : $P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{b - (i-1)}{a+b}$.

- Supposons l'événement $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}$ réalisé.

Avant le $k^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient alors $b - (k-1)$ boules noires et $a + (k-1)$ boules blanches.

La probabilité pour que le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire est alors $\frac{a + (k-1)}{a+b}$.

Ainsi $P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) = \frac{a + k - 1}{a+b}$.

Donc $P(Y = k) = \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b} \times \dots \times \frac{b-(k-2)}{a+b} \times \frac{a+k-1}{a+b}$ ou $P(Y = k) = \frac{b}{a+b} \left(\prod_{i=2}^{k-1} \frac{b-(i-1)}{a+b} \right) \frac{a+k-1}{a+b}$.

$$P(Y = k) = \frac{(a+k-1)}{(a+b)^k} \times b(b-1)\cdots(b-(k-2)) = \frac{(a+k-1)}{(a+b)^k} \times \frac{b!}{(b-(k-1))!} = \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!(a+b)^k}.$$

$$\text{Donc si } k \in \llbracket 3, b+1 \rrbracket : P(Y = k) = \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k} \quad (\star).$$

$$\text{Si } k = 1, P(Y = k) = P(B_1) = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{N} = \frac{ab!}{b!N} = \frac{(a+1-1)b!}{(b-1+1)!N^1}. \quad (\star) \text{ vaut encore pour } k = 1.$$

$$\text{Si } k = 2, P(Y = k) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{b}{a+b} \frac{a+1}{a+b} = \frac{b(a+1)}{N^2} = \frac{(a+1)b!}{(b-1)!N^2} = \frac{(a+2-1)b!}{(b-2+1)!N^2}.$$

(\star) vaut encore pour $k = 2$. Finalement :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, b+1 \rrbracket, P(Y = k) = \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k}.$$

Remarque Il n'aura échappé à personne que pour appliquer la formule des probabilités composées au niveau de $P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$ il eut fallu montrer que $P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1})$ n'est pas nul.

Le faire le jour du concours sur ce texte serait presque une faute!! C'est pour cela que je ne l'ai pas fait.

Je suggère donc une nouvelle approche de la question. On montre dans une première étape par récurrence que pour tout élément k de $\llbracket 1, b \rrbracket$, $P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_k) = \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Dans une seconde étape, pour k dans $\llbracket 2, b+1 \rrbracket$ on écrit :

$P(Y = k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1})P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(B_k)$; ce qui est licite car $P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1})$ n'est pas nul. La suite est claire. Ne reste plus qu'à traiter le cas $k = 1$.

C'est de cette manière que j'ai traité le calcul de $p_{n,n}$ dans II 1.

$$3. \text{ Ainsi } P(Y = b+1) = \frac{(a+b+1-1)b!}{(b-(b+1)+1)!N^{b+1}} = \frac{Nb!}{0!N^{b+1}} = \frac{b!}{N^b}.$$

$$\boxed{P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b}.$$

Soit k un élément de $\llbracket 1, b \rrbracket$.

$$P(Y = k) = \frac{(a+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k} = \frac{(a+b)b! + (-b+k-1)b!}{(b-k+1)!N^k} = \frac{Nb!}{(b-k+1)!N^k} - \frac{(b-k+1)b!}{(b-k+1)!N^k}.$$

$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, b \rrbracket, P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$

$$4. \sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^M (a_{k-1} + (k-1)a_{k-1} - k a_k) = \sum_{k=1}^M a_{k-1} + \sum_{k=1}^M ((k-1)a_{k-1} - k a_k).$$

$$\text{Par télescopage et changement d'indice il vient : } \sum_{k=1}^M k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k + 0 \times a_0 - M a_M = \sum_{k=0}^{M-1} a_k - M a_M.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^M k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k - M a_M.$$

5. Y prenant un nombre fini de valeurs elle possède donc une espérance.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} k P(Y = k) = \sum_{k=1}^b \left(k \left(\frac{b!}{(b-(k-1))! N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)! N^k} \right) \right) + (b+1) \frac{b!}{N^b}.$$

Posons $M = b$ et pour tout élément k de $\llbracket 0, M \rrbracket$, $a_k = \frac{b!}{(b-k)! N^k}$.

$$\text{Alors } E(Y) = \sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) + \frac{(b+1)!}{N^b}.$$

En appliquant le résultat de la question 4 il vient : $E(Y) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k - M a_M + \frac{(b+1)!}{N^b}$.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)! N^k} - b \frac{b!}{(0)! N^b} + \frac{(b+1)!}{N^b} = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)! N^k} + \frac{b!(b+1-b)}{N^b} = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)! N^k} + \frac{b!}{N^b}.$$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)! N^k}.$$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)! N^k}.$$

PARTIE II

1. • $p_{0,0} = 1$. Notons que $p_{0,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^0$.

Montrons par récurrence que, pour tout n dans \mathbb{N}^* , $p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n$.

La propriété est vraie pour $n = 1$ car $p_{1,0} = P(B_1) = \frac{a}{N}$.

Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N}^* et montrons la pour $n + 1$.

$p_{n+1,0} = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence $p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n$ donc $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = \left(\frac{a}{N}\right)^n$.

Alors $p_{n+1,0} = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n+1}) = P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1})$ car $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$ n'est pas nul(le).

$$p_{n+1,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}).$$

Si $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ est réalisé, avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient a boules blanches et b noires ; B_{n+1} se réalise alors avec la probabilité $\frac{a}{N}$.

Ainsi $p_{n+1,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n P_{B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}) = \left(\frac{a}{N}\right)^n \frac{a}{N} = \left(\frac{a}{N}\right)^{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , $p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n$. Mieux, pour tout n dans \mathbb{N} , $p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n$.

$$\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n.$$

• $p_{0,0} = 1$.

Si n est strictement supérieur à b , $p_{n,n} = 0$ car les boules noires ne sont pas remises dans l'urne une fois tirées et l'urne contient au départ b boules noires.

Montrons alors par récurrence que pour tout élément n de $\llbracket 1, b \rrbracket$, $p_{n,n} = \frac{b!}{(b-n)! N^n}$.

$p_{1,1} = P(N_1) = \frac{b}{N} = \frac{b!}{(b-1)! N^1}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\llbracket 1, b-1 \rrbracket$ et montrons la pour $n+1$.

$$p_{n+1, n+1} = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n+1}).$$

Par hypothèse de récurrence $p_{n, n} = \frac{b!}{(b-n)!N^n}$ donc $P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) = \frac{b!}{(b-n)!N^n}$.

Alors $p_{n+1, n+1} = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{n+1}) = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n}(N_{n+1})$ car $P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n)$ n'est pas nul(le).

$$p_{n+1, n+1} = p_{n, n} P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n}(N_{n+1}) = \frac{b!}{(b-n)!N^n} P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n}(N_{n+1}).$$

Si $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$ est réalisé, avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+n$ boules blanches et $b-n$ noires ; N_{n+1} se réalise alors avec la probabilité $\frac{b-n}{N}$.

$$\text{Ainsi } p_{n+1, n+1} = \frac{b!}{(b-n)!N^n} P_{N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n}(N_{n+1}) = \frac{b!}{(b-n)!N^n} \frac{b-n}{N} = \frac{b!}{(b-n-1)!N^{n+1}} = \frac{b!}{(b-(n+1))!N^{n+1}}.$$

Ceci achève la récurrence. Notons pour finir que $p_{0,0} = 1 = \frac{b!}{(b-0)!N^0}$. Alors :

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, p_{n, n} = \begin{cases} \frac{b!}{(b-n)!N^n} & \text{si } n \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

• X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 0, \text{Min}(n, b) \rrbracket$ donc $X_n(\Omega)$ est contenu dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Alors $(\{X_n = k\})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

Par conséquent : $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$. Donc $\sum_{k=0}^n p_{n, k} = 1$.

$$\sum_{k=0}^n p_{n, k} = 1.$$

2. Soient n et k deux éléments de \mathbb{N}^* .

Notons que l'événement $\{X_n = k\}$ est contenu dans la réunion des événements $\{X_{n-1} = k-1\}$ et $\{X_{n-1} = k\}$.

Donc $\{X_n = k\} = (\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}) \cup (\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\})$. Par incompatibilité on obtient :

$$P(X_n = k) = P(\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}) + P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}).$$

• Posons $\alpha_k = P(\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\})$ et calculons cette probabilité.

◊ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1} = k-1\}$ non nulle.

$$P(\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}) = P(X_{n-1} = k-1) P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n = k) = p_{n-1, k-1} P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n = k).$$

Supposons que l'événement $\{X_{n-1} = k-1\}$ est réalisé. Avant le $n^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+k-1$ boules blanches et $b-(k-1)$ boules noires. $\{X_n = k\}$ se réalise alors si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{b-(k-1)}{N}$.

$$\text{Ainsi } \alpha_k = p_{n-1, k-1} P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n = k) = p_{n-1, k-1} \frac{b-(k-1)}{N} = \frac{b-k+1}{N} p_{n-1, k-1}.$$

◊ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1} = k-1\}$ nulle.

Comme l'événement $\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}$ est contenu dans l'événement $\{X_{n-1} = k-1\}$, par croissance de la probabilité : $P(\{X_{n-1} = k-1\} \cap \{X_n = k\}) = 0$.

$$\text{Ainsi } \alpha_k = 0 = \frac{b-k+1}{N} \times 0 = \frac{b-k+1}{N} P(X_{n-1} = k-1) = \frac{b-k+1}{N} p_{n-1,k-1}.$$

$$\text{Finalement dans les deux cas } \alpha_k = \frac{b-k+1}{N} p_{n-1,k-1}.$$

- Posons $\beta_k = P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\})$ et calculons cette probabilité.

◊ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1} = k\}$ non nulle.

$$P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}) = P(X_{n-1} = k) P_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = k) = p_{n-1,k} P_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = k).$$

Supposons que l'événement $\{X_{n-1} = k\}$ est réalisé. Avant le $n^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires. $\{X_n = k\}$ se réalise alors si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{a+k}{N}$.

$$\text{Ainsi } \beta_k = p_{n-1,k} P_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = k) = p_{n-1,k} \frac{a+k}{N} = \frac{a+k}{N} p_{n-1,k}.$$

◊ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1} = k\}$ nulle.

Comme l'événement $\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}$ est contenu dans l'événement $\{X_{n-1} = k\}$, par croissance de la probabilité : $P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}) = 0$.

$$\text{Ainsi } \beta_k = 0 = \frac{a+k}{N} \times 0 = \frac{a+k}{N} P(X_{n-1} = k) = \frac{a+k}{N} p_{n-1,k}.$$

$$\text{Finalement dans les deux cas } \beta_k = \frac{a+k}{N} p_{n-1,k}.$$

$$\text{Alors } p_{n,k} = \alpha_k + \beta_k = \frac{b-k+1}{N} p_{n-1,k-1} + \frac{a+k}{N} p_{n-1,k} = \frac{a+k}{N} p_{n-1,k} + \frac{b+1-k}{N} p_{n-1,k-1}.$$

$$\text{Donc } N p_{n,k} = (a+k) p_{n-1,k} + (b+1-k) p_{n-1,k-1}.$$

$$\text{Pour tous les entiers naturels non nuls } n \text{ et } k : N p_{n,k} = (a+k) p_{n-1,k} + (b+1-k) p_{n-1,k-1}.$$

3. (a) Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Rappelons que $X_n(\Omega)$ est contenu dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\text{Ainsi } X_n \text{ possède une espérance qui vaut } \sum_{k=0}^n k P(X_n = k).$$

$$N E(X_n) = N \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = N \sum_{k=1}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k N p_{n,k}.$$

$$N E(X_n) = \sum_{k=1}^n \left(k [(a+k) p_{n-1,k} + (b+1-k) p_{n-1,k-1}] \right) = \sum_{k=1}^n (k(a+k) p_{n-1,k}) + \sum_{k=1}^n (k(b+1-k) p_{n-1,k-1}).$$

En remarquant que $k(a+k) p_{n-1,k}$ vaut 0 pour $k=0$ et $k=n$ et en faisant un petit changement d'indice dans la seconde somme il vient :

$$N E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (k(a+k) p_{n-1,k}) + \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)(b-k) p_{n-1,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([k(a+k) + (k+1)(b-k)] p_{n-1,k} \right).$$

$$N E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([ka + k^2 + kb - k^2 + b - k] p_{n-1,k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([b + k(a+b-1)] p_{n-1,k} \right).$$

$$N E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([b + k(N-1)] p_{n-1,k} \right).$$

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, N E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([b + k(N-1)] p_{n-1,k} \right).$$

$$N E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([b + k(N-1)] p_{n-1,k} \right) = b \sum_{k=0}^{N-1} p_{n-1,k} + (N-1) \sum_{k=0}^{N-1} k p_{n-1,k} = b \times 1 + (N-1) E(X_{n-1}).$$

$$\text{Alors : } E(X_n) = \frac{b}{N} + \frac{N-1}{N} E(X_{n-1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

(b) Donnons une version un peu plus générale permettant de calculer $E(X_n)$ à partir de a , b et n .

```

1  Function Esperance(a,b,n:integer):real;
2
3  Var i:integer;u,v,w:real;
4
5  begin
6
7  u:=1-1/(a+b);v:=b/(a+b);w:=0;
8
9  For i:=1 to n do w:=u*w+v;
10
11 Esperance:=w;
12
13 end;
14

```

Remarque Pour $b = 10$ et $N = 100$, la machine donne $E(X_{2009}) = 9.999\,999\,982\,742\,5$.

(c) $((E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmético-géométrique. L'équation $x \in \mathbb{R}$ et $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right) x + \frac{b}{N}$ admet pour unique solution b .

Alors $((E(X_n) - b)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1 - \frac{1}{N}$ et de premier terme $E(X_0) - b$ ou $-b$ car $E(X_0)$ vaut 0.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) - b = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (-b)$. Donc $E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (-b) + b = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, E(X_n) = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

4. (a) Soit n un élément de \mathbb{N} . Comme nous l'avons déjà vu, $(\{X_n = k\})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne alors : $q_{n+1} = P(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^n P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1})$.

Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Calculons $P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1})$ en envisageant deux cas.

◇ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_n = k\}$ non nulle.

$$P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = P(X_n = k) P_{\{X_n = k\}}(N_{n+1}) = p_{n,k} P_{\{X_n = k\}}(N_{n+1}).$$

Supposons l'événement $\{X_n = k\}$ réalisé.

Avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires.

Alors N_{n+1} se réalise avec la probabilité $\frac{b-k}{N}$. Ainsi $P_{\{X_n = k\}}(N_{n+1}) = \frac{b-k}{N}$.

$$P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = p_{n,k} P_{\{X_n = k\}}(N_{n+1}) = \frac{b-k}{N} p_{n,k}.$$

◇ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_n = k\}$ nulle.

Comme $\{X_n = k\} \cap N_{n+1}$ est contenu dans $\{X_n = k\}$, par croissance de la probabilité : $P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = 0$.

$$\text{Alors } P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = 0 = \frac{b-k}{N} \times 0 = \frac{b-k}{N} P(X_n = k) = \frac{b-k}{N} p_{n,k}.$$

$$\text{Ainsi, dans les deux cas : } P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = \frac{b-k}{N} p_{n,k}.$$

$$\text{Alors } q_{n+1} = P(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^n P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{b-k}{N} p_{n,k} \right).$$

$$\text{Donc } N q_{n+1} = \sum_{k=0}^n ((b-k) p_{n,k}).$$

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, N q_{n+1} = \sum_{k=0}^n ((b-k) p_{n,k}).$$

(b) Soit n un élément de \mathbb{N} .

$$N q_{n+1} = \sum_{k=0}^n ((b-k) p_{n,k}) = b \sum_{k=0}^n p_{n,k} - \sum_{k=0}^n k p_{n,k} = b \times 1 - E(X_n) = b - E(X_n). \quad q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{1}{N} E(X_n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{1}{N} E(X_n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{1}{N} E(X_n) = \frac{b}{N} - \frac{1}{N} \left(b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right] \right) = \frac{b}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = \frac{b}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n.$$

5. (a) Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $X_n(X_n - 1)$ prend un nombre fini de valeurs donc possède une espérance.

Le théorème de transfert permet d'écrire :

$$u_n = E(X_n(X_n - 1)) = \sum_{k=0}^n (k(k-1) P(X_n = k)) = \sum_{k=0}^n (k(k-1) p_{n,k}) = \sum_{k=1}^n (k(k-1) p_{n,k}).$$

$$N u_n = \sum_{k=1}^n (k(k-1) N p_{n,k}). \text{ En appliquant II.2. il vient :}$$

$$N u_n = \sum_{k=1}^n \left(k(k-1) [(a+k) p_{n-1,k} + (b+1-k) p_{n-1,k-1}] \right).$$

$$N u_n = \sum_{k=1}^n \left(k(k-1) (a+k) p_{n-1,k} \right) + \sum_{k=1}^n \left(k(k-1) (b+1-k) p_{n-1,k-1} \right).$$

En remarquant que $k(k-1)(a+k)p_{n-1,k}$ vaut 0 si $k=0$ ou si $k=n$ et en faisant un changement d'indice sur la seconde somme il vient :

$$N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k(k-1) (a+k) p_{n-1,k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)k (b-k) p_{n-1,k} \right).$$

$$N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k [(k-1)(a+k) + (k+1)(b-k)] p_{n-1,k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k [k a + k^2 - a - k + k b - k^2 + b - k] p_{n-1,k} \right).$$

$$N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k [k(a+b-2) + b-a] p_{n-1,k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k [k(N-2) + b-a] p_{n-1,k} \right).$$

Soit k un élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$k(N-2) + b - a = (k-1)(N-2) + N - 2 + b - a = (k-1)(N-2) + a + b - 2 + b - a = (k-1)(N-2) + 2(b-1).$$

$$\text{Donc } N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k [(k-1)(N-2) + 2(b-1)] p_{n-1,k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left([k(k-1)(N-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k} \right).$$

$$\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*, N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left([k(k-1)(N-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k} \right).$$

$$\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*, N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left([k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k} \right).$$

Remarque Pour faire plaisir au concepteur on peut aussi dire que

$$N u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left([k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k} \right)$$

pourvu que n soit élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

(b) Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$N u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left([k(k-1)(N-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k} \right) = (N-2) \sum_{k=0}^{n-1} \left(k(k-1) p_{n-1,k} \right) + 2(b-1) \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1,k}.$$

$$N u_n = (N-2) E(X_{n-1}(X_{n-1}-1)) + 2(b-1) E(X_{n-1}) = (N-2) u_{n-1} + 2(b-1) \left(b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right] \right).$$

$$\text{En divisant par } N \text{ il vient : } u_n = \left(1 - \frac{2}{N} \right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right].$$

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 - \frac{2}{N} \right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right].$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout élément n de \mathbb{N} , $u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right]$.

• X_0 est la variable certaine égale à 0. $X_0(X_0-1)$ également donc $u_0 = E(X_0(X_0-1)) = 0$.

$$\text{Or } 0 = b(b-1)[1+1-2] = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^0 - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^0 \right].$$

$$\text{Donc } u_0 = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^0 - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^0 \right] \text{ et l'égalité est vraie pour } n=0.$$

• Supposons l'égalité vraie pour $n-1$ où n est un élément de \mathbb{N}^* et montrons la pour n .

$$\text{L'hypothèse de récurrence donne } u_{n-1} = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^{n-1} - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right].$$

$$\text{Or d'après (b) : } u_n = \left(1 - \frac{2}{N} \right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right]. \text{ Ainsi :}$$

$$u_n = \left(1 - \frac{2}{N} \right) b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N} \right)^{n-1} - 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right] + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-1} \right].$$

$$u_n = b(b-1) \left[1 - \frac{2}{N} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{2}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} + \frac{2}{N} - \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \right].$$

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \right].$$

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \right] = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right].$$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right].}$$

Remarque Donnons quelques éléments pour trouver la valeur de u_n sans avoir le résultat.

Le cas $N = 2$ ne pose pas de problème (on a alors $a = b = 1$)... Nous supposons donc $N \geq 3$.

Posons $\alpha = 1 - \frac{2}{N}$, $\beta = \frac{2b(b-1)}{N}$ et $\gamma = 1 - \frac{1}{N}$. Notons que α n'est pas nul car N est différent de 2.

Soit k un élément de \mathbb{N}^* . $u_k = \alpha u_{k-1} + \beta - \beta \gamma^{k-1}$ d'après (b). Alors $\frac{u_k}{\alpha^k} = \frac{u_{k-1}}{\alpha^{k-1}} + \frac{\beta}{\alpha^k} - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{k-1}$ et

$$\frac{u_k}{\alpha^k} - \frac{u_{k-1}}{\alpha^{k-1}} = \frac{\beta}{\alpha^k} - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{k-1}.$$

Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

$$\frac{u_n}{\alpha^n} - \frac{u_0}{\alpha^0} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{u_k}{\alpha^k} - \frac{u_{k-1}}{\alpha^{k-1}} \right) = \beta \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha^k} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{k-1}.$$

Notons que $u_0 = 0$, $\frac{1}{\alpha} \neq 1$ et $\frac{\gamma}{\alpha} \neq 1$.

$$\text{Alors } \frac{u_n}{\alpha^n} = \beta \frac{1}{\alpha} \frac{1 - (1/\alpha)^n}{1 - (1/\alpha)} - \beta \frac{1}{\alpha} \frac{1 - (\gamma/\alpha)^n}{1 - (\gamma/\alpha)} = \beta \frac{1}{\alpha^n} \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} - \beta \frac{1}{\alpha^n} \frac{\alpha^n - \gamma^n}{\alpha - \gamma}.$$

Alors $u_n = \beta \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} - \beta \frac{\alpha^n - \gamma^n}{\alpha - \gamma}$. Notons que $\alpha - 1 = -\frac{2}{N}$ et $\alpha - \gamma = -\frac{1}{N}$. Alors :

$$u_n = \beta N \left[\alpha^n - \gamma^n - \frac{1}{2} (\alpha^n - 1) \right] = \frac{\beta N}{2} [1 + \alpha^n - 2\gamma^n]. \text{ Rappelons que } \alpha = 1 - \frac{2}{N}, \beta = \frac{2b(b-1)}{N} \text{ et } \gamma = 1 - \frac{1}{N}.$$

$$\text{Alors : } u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right].$$

(d) Soit n un élément \mathbb{N} . X_n possède une variance car X_n prend un nombre fini de valeurs.

$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = E(X_n(X_n - 1) + X_n) - (E(X_n))^2 = E(X_n(X_n - 1)) + E(X_n) - (E(X_n))^2$. Alors :

$$\boxed{V(X_n) = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right] + b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right] - \left(b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right] \right)^2.}$$

$$\left| 1 - \frac{2}{N} \right| < 1 \text{ et } \left| 1 - \frac{1}{N} \right| < 1. \text{ Alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = 0.$$

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = b(b-1) [1 + 0 - 2 \times 0] + b [1 - 0] - (b [1 - 0])^2 = b(b-1) + b - b^2 = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0.}$$

Remarque Notons au passage que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = b$.

Exercice Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à b .