Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

Problème 1

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E. Considérons l'endomorphisme u de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ où $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. a) *Déterminer les valeurs propres de u. Cela suffit-il à assurer la diagonalisabilité de u ?*

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(2(A - \lambda I_3)\right) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 \\ 2-2\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -4\lambda^2-2\lambda+6 & -2+2\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 \\ 2-2\lambda & 2-2\lambda & 0 \\ -4\lambda^2-4\lambda+8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}
\end{aligned}$$

Comme $-4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4(\lambda - 1)(\lambda + 2)$, on constate alors que

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 &\iff 2 - 2\lambda = 0 \text{ ou } -4(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \\
&\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2,
\end{aligned}$$

donc, les valeurs propres de u étant celles de A, on a

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, u = \{1; -2\}.}$$

À ce stade, on compte deux possibilités pour les dimensions des sous-espaces propres E_1 et E_{-2}, respectivement associés à 1 et -2. On peut avoir

- ou bien $\dim E_1 = \dim E_{-2} = 1$ et, dans ce cas, $\dim E_1 + \dim E_{-2} \neq \dim E$ ce qui nous dit que u n'est pas diagonalisable ;
- ou bien l'une des deux dimensions $\dim E_1$ et $\dim E_{-2}$ vaut 1 et l'autre vaut 2 et, dans ce cas $\dim E_1 + \dim E_{-2} = \dim E$ ce qui assure la diagonalisabilité de u.

Sans information sur les dimensions des sous-espaces propres, on peut donc dire qu'

$$\boxed{\text{il est pour l'instant impossible d'affirmer ou d'infirmer la diagonalisabilité de } u.}$$

b) *Pour chaque valeur propre de u, déterminer une base du sous-espace propre associé.*

Déterminons $E_1 = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A - I_3)X = 0 \iff -x + y + z = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcccl} x = \lambda & & & & \\ y = & & \mu & & (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda & - & \mu & & \end{array}\right.$$

donc

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}).}$$

Déterminons $E_{-2} = \operatorname{Ker}(u + 2\operatorname{Id})$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A + 2I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} 5x + y + z = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{-2} = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3}\right).}$$

c) *En déduire que u est diagonalisable.*

La question précédente nous dit que l'on a $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_{-2} = 1$, ce qui donne $\dim E_1 + \dim E_{-2} = \dim E$ et permet ainsi d'affirmer que

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$$

d) *Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ de E telle que la matrice de u dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ soit* $\operatorname{Diag}(-2; 1; 1)$.

Dans cette situation, on sait d'après le cours, que pour avoir $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \operatorname{Diag}(-2; 1; 1)$, il suffit de prendre pour $\overrightarrow{e_1}'$ un vecteur propre dirigeant E_1 et pour $(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ une base de E_{-2}. Le résultat de la question b) nous dit donc de prendre

$$\boxed{\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}.}$$

2. a) *On suppose qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = u$.*

i. *Démontrer que $u \circ v = v \circ u$.*

On a $u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ u$, donc

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ commutent.}}$$

ii. *Démontrer que $u\big(v(\overrightarrow{e_1}')\big) = -2v(\overrightarrow{e_1}')$. En déduire que $v(\overrightarrow{e_1}')$ et $\overrightarrow{e_1}'$ sont colinéaires puis que $\overrightarrow{e_1}'$ est un vecteur propre de v.*

On a

$$\begin{array}{rcll} u\big(v(\overrightarrow{e_1}')\big) & = & v\big(u(\overrightarrow{e_1}')\big) & \text{car } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ & = & v(-2\overrightarrow{e_1}') & \text{car } \overrightarrow{e_1}' \in E_{-2}, \end{array}$$

ce qui donne, puisque v est linéaire,

$$\boxed{u\big(v(\overrightarrow{e_1}')\big) = -2v(\overrightarrow{e_1}').}$$

On en déduit que $v(\overrightarrow{e_1}')$ appartient à E_{-2}, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre -2. Comme celui-ci est une droite vectorielle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}'$, on en déduit bien que

$$\boxed{v(\overrightarrow{e_1}') \text{ et } \overrightarrow{e_1}' \text{ sont colinéaires.}}$$

Le vecteur $\overrightarrow{e_1}'$ étant non nul (pardi, c'est un vecteur propre !), la colinéarité de $v(\overrightarrow{e_1}')$ et $\overrightarrow{e_1}'$ se traduit par l'existence d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ tel que $v(\overrightarrow{e_1}') = a\overrightarrow{e_1}'$. Cela signifie bien (toujours parce que $\overrightarrow{e_1}'$ n'est pas nul) que

$$\boxed{\overrightarrow{e_1}' \text{ est un vecteur propre de } v.}$$

iii. *Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Démontrer que $u\big(v(\overrightarrow{x})\big) = v(\overrightarrow{x})$ et en déduire que $v(\overrightarrow{x})$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$.*

On a

$$\begin{aligned} u\big(v(\overrightarrow{x})\big) &= v\big(u(\overrightarrow{x})\big) \qquad \text{car } u \text{ et } v \text{ commutent} \\ &= v(\overrightarrow{x}) \qquad \text{car } \overrightarrow{x} \in E_1, \end{aligned}$$

donc $v(\overrightarrow{x})$ appartient à E_1, le sous-espace propre de u associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire

$$\boxed{v(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}').}$$

iv. *En déduire qu'il existe $a, x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$.*

On a déjà dit que le fait que $\overrightarrow{e_1}'$ soit un vecteur propre de v implique l'existence d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ tel que $v(\overrightarrow{e_1}') = a\overrightarrow{e_1}'$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{e_2}'$ et $\overrightarrow{e_3}'$ sont tous les deux des vecteurs propres de u associés à la valeur propre 1, donc, d'après la question γ], on sait que $v(\overrightarrow{e_2}')$ et $v(\overrightarrow{e_3}')$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$. Cela signifie qu'il existe quatre scalaires $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $v(\overrightarrow{e_2}') = x\overrightarrow{e_2}' + z\overrightarrow{e_3}'$ et $v(\overrightarrow{e_3}') = y\overrightarrow{e_2}' + t\overrightarrow{e_3}'$.

Par suite, d'après la définition de la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}'$, on a bien

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.}$$

v. *Démontrer que $\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et en déduire que $a^2 = -2$.*

La relation $v \circ v = u$ se traduit, dans la base $\mathcal{B}'$, par l'égalité matricielle

$$\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u).}$$

Or

$$\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)\big)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \spadesuit & \heartsuit \\ 0 & \diamondsuit & \clubsuit \end{pmatrix}$$

où $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ désignent des scalaires dont on se moque. Cela implique, par identification des coefficients des matrices $\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)\big)^2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Diag}(-2, 1, 1)$, que

$$\boxed{a^2 = -2.}$$

b) *Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v \circ v = u$?*

D'après les questions précédentes, l'existence d'un endomorphisme v tel que $v \circ v = u$ implique celle d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 = -2$. Cette équation n'ayant aucune solution réelle (puisque le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif), on en déduit qu'

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'endomorphisme } v \text{ de } E \text{ tels que } v \circ v = u.}$$

3. a) i. *Démontrer que la famille* $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right)$ *est libre.*

Considérons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda\overrightarrow{e_1} + \mu u(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$. L'expression de la matrice A nous dit que

$$u(\overrightarrow{e_1}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$$

donc

$$\left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{e_2} + 2\mu\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}.$$

Comme la famille $\mathcal{B}$ est libre, on en déduit que $\lambda+\mu/2 = 0$ et $\mu = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$. On a ainsi démontré que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right) \text{ est libre.}}$$

ii. *Démontrer qu'un vecteur* $\overrightarrow{x}$ *de composantes* (a, b, c) *dans la base* $\mathcal{B}$ *appartient à* $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right)$ *si, et seulement si,* $4b - c = 0$. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la famille* $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{x}\right)$ *soit une base de* E.

On a

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{x} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right) \\
\iff\quad & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu u(\overrightarrow{e_1}) \\
\iff\quad & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right)\overrightarrow{e_1} + \frac{\mu}{2}\overrightarrow{e_2} + 2\mu\overrightarrow{e_3} \\
\iff\quad & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcr} a & = & \lambda & + & \dfrac{\mu}{2} \\ b & = & & & \dfrac{\mu}{2} \\ c & = & & & 2\mu \end{array}\right. \\
\iff\quad & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcll} 2\lambda & + & \mu & = & 2a & {\scriptstyle L_1} \\ & & \mu & = & 2b & {\scriptstyle L_2} \\ & & 2\mu & = & c & {\scriptstyle L_3} \end{array}\right. \\
\iff\quad & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcrcll} \boxed{2\lambda} & + & \mu & = & 2a & {\scriptstyle L_1} \\ & & \boxed{\mu} & = & 2b & {\scriptstyle L_2} \\ & & 0 & = & c - 4b & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \end{array}\right. \\
\iff\quad & c - 4b = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la méthode du pivot (en encadrant les pivots) pour aboutir à une réduite de Gauß dont l'équation auxiliaire nous donne la condition nécessaire et suffisante recherchée. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{un vecteur } \overrightarrow{x} \text{ de composantes } (a, b, c) \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ appartient} \\ \text{au sous-espace } \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right) \text{ si, et seulement si, } 4b - c = 0.\end{array}}$$

Pour que la famille de 3 vecteurs $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{x}\right)$ soit une base de l'espace E qui est de dimension 3, le cours nous dit qu'il suffit que cette famille soit libre. On sait déjà que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $u(\overrightarrow{e_1})$ sont linéairement indépendants. Pour que la famille $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{x}\right)$ soit libre, il suffit donc que le vecteur $\overrightarrow{x}$ n'appartienne pas au sous-espace $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1})\right)$. D'après la condition nécessaire et suffisante que nous venons d'établir, on peut donc conclure que

$$\boxed{\begin{array}{l}\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{x}\right) \text{ est une base de } E \text{ si, et seulement si, les composantes} \\ (a, b, c) \text{ du vecteur } \overrightarrow{x} \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ vérifie la condition } 4b \neq c.\end{array}}$$

▶ *Dans la suite de ce problème, $\overrightarrow{e_3}''$ désigne le vecteur de composantes $(1,1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$. On note alors $\mathcal{B}''$ la famille $\left(\overrightarrow{e_1}, u(\overrightarrow{e_1}), \overrightarrow{e_3}''\right)$.*

iii. *Justifier que $\mathcal{B}''$ est une base de E.*

Comme $4 \times 1 \neq 1$ (si ! si !), la question précédente nous dit que

$$\boxed{\mathcal{B}'' \text{ est une base de } E.}$$

iv. *Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et calculer P^{-1}. Calculer alors la matrice A'' de u dans la base $\mathcal{B}''$.*

Les composantes de $\overrightarrow{e_1}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1,0,0)$. On a déjà signalé que l'expression de la matrice A nous dit que $u(\overrightarrow{e_1}) = (1/2)\overrightarrow{e_1} + (1/2)\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, donc les composantes de $u(\overrightarrow{e_1})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1/2, 1/2, 2)$. Enfin, celles de $\overrightarrow{e_3}''$ sont $(1,1,1)$ par définition. Par suite, on a

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Soit X le vecteur colonne de coordonnées x, y, z et Y celui de coordonnées a, b, c. Alors

$$\begin{aligned}
PX = Y \quad & \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \\
& \iff \left\{\begin{array}{rl} \boxed{2x} + y + 2z = 2a & L_1 \\ \boxed{y} + 2z = 2b & L_2 \\ 4y + 2z = 2c & L_3 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rl} \boxed{2x} + y + 2z = 2a & L_1 \\ \boxed{y} + 2z = 2b & L_2 \\ \boxed{-6z} = 2c - 8b & L_3 - 4L_2 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{l} x = a - b \\ y = -\dfrac{2}{3}b + \dfrac{2}{3}c \\ z = \dfrac{4}{3}b - \dfrac{1}{3}c \end{array}\right. \\
& \iff X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} Y
\end{aligned}$$

donc, d'après le cours,

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Il s'ensuit que

$$A'' = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, après calculs,

$$\boxed{A'' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

b) *Soit $\mathcal{C} = \big((1,0),(0,1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, où les nombres $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ sont les coefficients de la matrice $A'' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 0 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$ déterminées à la question précédente.*

i. *Démontrer que la famille $\mathcal{C}' = \big((0,1), f((0,1))\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.*

On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc les composantes du vecteur $f((0,1))$ dans la base canonique sont données par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $f((0,1)) = (-1,1)$.
Comme $(0,1)$ et $(-1,1)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{C}' = \big((0,1), f((0,1))\big) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

De plus, on a

$$\boxed{\text{la matrice de passage de } \mathcal{C} \text{ à } \mathcal{C}' \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

ii. *Calculer alors la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{C}'$.*

On a $f((0,1)) = 0(0,1) + 1f((0,1))$. Par ailleurs, $f\big(f((0,1))\big) = f((-1,1))$ est donné par

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $f\big(f((0,1))\big) = 1(0,1) + 0f((0,1))$, ce qui donne

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

c) *En notant* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *à* $\mathcal{C}'$, *posons* $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.

i. *Démontrer que* R *est inversible et calculer* R^{-1}.

On a

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit X le vecteur colonne de coordonnées x, y, z et Y celui de coordonnées a, b, c. Alors

$$\begin{aligned}
RX = Y \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} \boxed{x} & & & & & = a \\ & & & & \boxed{-z} & = b \\ & & \boxed{y} & + & z & = c \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = \quad b + c \\ z = -b \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} Y
\end{aligned}$$

donc, d'après le cours,

$$\boxed{R \text{ est inversible et } R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

ii. *Calculer* $R^{-1}A''R$.

On a

$$R^{-1}A''R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\boxed{R^{-1}A''R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

d) *En déduire que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.*

En rassemblant les changements de bases effectués jusqu'ici, on a

$$R^{-1}P^{-1}APR = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$A = PR \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (PR)^{-1},$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.}}$$

Problème 2

Pour toute fonction f continue sur $[0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\cdot$

0. *Quelle est la limite de la suite $\big(S_n(f)\big)$?*
   La quantité $S_n(f)$ est la n-ème somme de Riemann (à gauche) de la fonction f sur $[0;1]$. La fonction f étant continue sur ce segment, un théorème de notre cours nous dit que

$$\boxed{\text{la suite } \big(S_n(f)\big) \text{ converge vers } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose* $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ *et* $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}\cdot$

   a) *Écrire un algorithme qui, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, calcule la valeur de u_n.*
   En langage SCILAB, on a

```
function s=agro2009(n)
  s=0
  for k=0:n-1 do s=s+1/(k+n), end
endfunction
```

   b) *Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.*
   Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n)+1} = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x},$$

   donc, d'après le résultat sur les sommes de Riemann rappelé à la question 0, on peut affirmer que (u_n) converge et

$$\lim u_n = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - 0.$$

   En conclusion,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ln 2.}$$

   c) *Démontrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n + \dfrac{1}{2}u_n = u_{2n}.$
   Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
v_n + \frac{1}{2}u_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2\ell+1+2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n} \qquad \text{en posant } \ell = k-n \text{ dans la première somme} \\
&= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} \\
&= \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} \\
&= u_{2n},
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.}$$

d) *Démontrer alors que la suite* (v_n) *converge vers* $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

La relation de la question précédente nous dit que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n.$$

Or la suite (u_{2n}) étant extraite de (u_n), elle converge vers la même limite que (u_n), c'est-à-dire $\ln 2$. Donc (v_n) converge (comme combinaison linéaire de suites convergentes) et l'on a

$$\lim v_n = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{(v_n) \text{ converge bien vers } \frac{1}{2}\ln 2.}$$

2. *Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0;1]$, à valeurs réelles.*

a) *Justifier l'existence d'un nombre réel M tel que $\forall x \in [0;1]\,,\ |f^{(3)}(x)| \leqslant M$.*

La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, sa dérivée troisième $f^{(3)}$ est a fortiori continue sur le segment $[0;1]$. Or un théorème de notre cours (appelé quelquefois « théorème des bornes ») nous dit que toute fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes). Par conséquent,

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0;1]\,, \qquad |f^{(3)}(x)| \leqslant M.}$$

b) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0;n-1]\!]$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n};\dfrac{k+1}{n}\right]$.*

i. *À l'aide de la formule de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction f sur $[k/n;t]$, démontrer que* $\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3$.

Comme nous le suggère l'énoncé, appliquons la formule de Taylor à la fonction f sur l'intervalle $[k/n;t]$ où elle est de classe $\mathcal{C}^3$, ce qui donne l'existence de $c \in \,]k/n;t[$ tel que

$$f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 f'''(c).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \frac{1}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 |f'''(c)| \\ &\leqslant \frac{1}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 M,\end{aligned}$$

puisque $|f'''(c)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente appliqué en c (qui appartient bien à $]0;1[$ car $]k/n;t[\, \subset \,]0;1[$). En conclusion,

$$\boxed{\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3.}$$

ii. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \left(t-\frac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\frac{k}{n}$?*

On voit immédiatement que

$$\boxed{\text{la primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } t \mapsto \left(t-\frac{k}{n}\right)^q \text{ qui s'annule en } \frac{k}{n} \text{ est } t \mapsto \frac{1}{q+1}\left(t-\frac{k}{n}\right)^{q+1}.}$$

iii. *Démontrer que* $\left|\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left[f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}t\\
=\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n} 1\,\mathrm{d}t - f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t\\
&\qquad -\frac{1}{2}f''\left(\frac{k}{n}\right)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t\\
=\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - f\left(\frac{k}{n}\right)\left[t\right]_{k/n}^{(k+1)/n} - f'\left(\frac{k}{n}\right)\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n}\\
&\qquad -\frac{1}{2}f''\left(\frac{k}{n}\right)\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n}\\
=\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} - f'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{2n^2} - f''\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{6n^3},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\
=\ &\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left[f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t\\
\leqslant\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\mathrm{d}t \qquad \text{d'après } \alpha]
\end{aligned}$$

Or

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\mathrm{d}t = \frac{M}{6}\left[\frac{1}{4}\left(t-\frac{k}{n}\right)^4\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{24n^4},$$

donc

$$\boxed{\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.}$$

c) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *Démontrer que* $\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f)-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leqslant \frac{M}{24n^3}.$

On a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f)-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right|\\
=\ &\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\
=\ &\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|\\
\leqslant\ &\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\
\leqslant\ &\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} \qquad \text{d'après b).}
\end{aligned}$$

Or
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{24n^4} = n \times \frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3},$$
donc
$$\boxed{\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leqslant \frac{M}{24n^3}\cdot}$$

d) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon_n = n^2 \Big(S_n(f) + \dfrac{1}{2n} S_n(f') + \dfrac{1}{6n^2} S_n(f'') - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \Big)$. Démontrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}\cdot$*

Le résultat de la question précédente nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|\varepsilon_n| = n^2 \left| S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant n^2 \frac{M}{24n^3} = \frac{M}{24n}\cdot$$
Comme $\lim_{n \to +\infty} M/(24n) = 0$, le théorème des gendarmes nous dit que
$$\boxed{(\varepsilon_n) \text{ converge vers } 0.}$$
On en déduit immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2},$$
et donc
$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

e) *Prouver l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n(f') = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$ et $S_n(f'') = \displaystyle\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon''_n$.*

Si l'on applique le résultat de la question précédente à la fonction f' (ce qui est licite puisque f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$), on obtient
$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') - \frac{1}{6n^2} S_n(f''') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$
Or la suite $\big(S_n(f''')\big)$ est bornée puisqu'elle converge d'après le résultat rappelé à la question 0, donc
$$\frac{1}{6n^2} S_n(f''') = o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$
ce qui donne
$$\boxed{S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot}$$
La fonction f'' étant continue, le théorème sur les sommes de Riemann (celui que l'on a utilisé à la question 0) nous dit que
$$S_n(f'') \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t,$$
ce que l'on peut écrire
$$\boxed{S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1).}$$

f) *En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a* $S_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\delta_n}{n^2}\cdot$

En combinant les trois derniers résultats encadrés, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\left(\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1)\right) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

3. *Les suites (u_n) et (v_n) ont été définies à la question 1.*

a) *Démontrer qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a* $u_n = \ln 2 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{16n^2} + \dfrac{\alpha_n}{n^2}\cdot$

Nous avons déjà signalé que

$$u_n = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x}\cdot$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction h, on obtient

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 h'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 h''(t)\,\mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2n}\big[h(t)\big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\big[h'(t)\big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \big[\ln|1+t|\big]_0^1 - \frac{1}{2n}\Big[\frac{1}{1+t}\Big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\Big[-\frac{1}{(1+t)^2}\Big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

b) *En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

On en déduit immédiatement que

$$u_n - \ln 2 = \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

donc

$$\boxed{u_n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}\cdot}$$

c) *Démontrer que* $v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{64n^2}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, les résultats des questions 1. c) et 3. b) donnent

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n \\ &= \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big\{ \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$v_n - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce qui donne

$$\boxed{v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{64n^2}.}$$

d) *Comparer les vitesses de convergence des suites* (u_n) *et* (v_n).

On constate que

$$\frac{2v_n - \ln 2}{u_n - \ln 2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8n},$$

ce qui signifie

$$\boxed{\text{la suite } (2v_n) \text{ converge vers } \ln 2 \text{ plus rapidement que } (u_n).}$$