CONCOURS AGRO-VETO, SESSION 2012
Corrigé de l'épreuve A

Problème I

1. 1.1 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices symétriques à coefficient réels donc :

$$\boxed{J \text{ et } K \text{ sont diagonalisables.}}$$

1.2 Recherche des éléments propres de K

1.2.1 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in Ker(K - \lambda I) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lllll} -\lambda x & +y & & = 0 & : L_1 \\ x & -\lambda y & +z & = 0 & : L_2 \\ & y & -\lambda z & = 0 & : L_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} y & -\lambda x & = 0 & : L_1 \\ & (1-\lambda^2)x \quad +z & = 0 & : L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ & \lambda x \quad -\lambda z & = 0 & : L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} y & -\lambda x & = 0 & : L_1 \\ z & +(1-\lambda^2)x & = 0 & : L_2 \\ & \lambda(2-\lambda^2)x & = 0 & : L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2 \end{array} \right. \qquad (S)
\end{aligned}
$$

Le système (S) n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda(2 - \lambda^2) = 0$, ce qui équivaut à $\lambda = 0$ ou $\lambda = \sqrt{2}$ ou $\lambda = -\sqrt{2}$. Donc

$$\boxed{Sp(K) = \left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}}$$

1.2.2 En notant pour tout $\lambda \in Sp(K)$, $E_\lambda(K)$ le sous-espace propre de K associé à λ, on a :

- Pour $\lambda = 0$:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} y & & = 0 \\ & z \quad +x & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -z \end{array} \right.$$

  d'où $E_0(K) = \{(-z, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$.

- Pour $\lambda = \sqrt{2}$:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} y & -\sqrt{2}x & = 0 \\ & z \quad -x & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{2}z \\ x = z \end{array} \right.$$

  d'où $E_{\sqrt{2}}(K) = \{(z, \sqrt{2}z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

- Pour $\lambda = \sqrt{2}$:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} y & +\sqrt{2}x & = 0 \\ & z \quad -x & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\sqrt{2}z \\ x = z \end{array} \right.$$

  d'où $E_{-\sqrt{2}}(K) = \{(z, -\sqrt{2}z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

En conclusion :

$$\boxed{E_0(K) = Vect\,(-1,0,1)\ ;\ E_{\sqrt{2}}(K) = Vect\left(1,\sqrt{2},1\right)\ \text{ et } E_{-\sqrt{2}}(K) = Vect\left(1,-\sqrt{2},1\right)}$$

1.3 Recherche des éléments propres de J

1.3.1 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in Ker(J-\lambda I) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} -\lambda x & & +z & =0 & : L_1 \\ & (1-\lambda)y & & =0 & : L_2 \\ x & & -\lambda z & =0 & : L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} -\lambda x & & +z & =0 & : L_1 \\ & (1-\lambda)y & & =0 & : L_2 \\ (1-\lambda^2)x & & & =0 & : L_3 \leftarrow L_3+\lambda L_1 \end{array}\right. \qquad (S')$$

Le système (S') n'est pas de Cramer si et seulement si $1-\lambda=0$ ou $(1-\lambda^2)=0$, ce qui équivaut à $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$. Donc

$$\boxed{Sp(J) = \{1,-1\}}$$

1.3.2 En notant pour tout $\lambda \in Sp(J)$, $E_\lambda(J)$ le sous-espace propre de J associé à λ, on a :

- Pour $\lambda = 1$:

  $$(S') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} -x & +z & & =0 \\ & & 0 & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = z$$

  d'où $E_1(J) = \{(z,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = Vect\,((1,0,1),(0,1,0))$.
  Les vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$ n'étant pas colinéaires, ils forment une base de $E_1(J)$.

- Pour $\lambda = -1$:

  $$(S') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & +z & & =0 \\ & & 2y & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=0 \end{array}\right.$$

  d'où $E_{-1}(J) = \{(-z,0,z), z \in \mathbb{R}\} = Vect\,((-1,0,1))$.

$$\boxed{E_1(J) = Vect\,((1,0,1),(0,1,0))\ \text{ et } E_{-1}(J) = Vect\,(-1,0,1)}$$

1.4 Recherche de vecteurs propres communs à J et K

1.4.1 En remarquant que : $\left(1,\sqrt{2},1\right) = (1,0,1)+\sqrt{2}(0,1,0)$ et $\left(1,-\sqrt{2},1\right) = (1,0,1)-\sqrt{2}(0,1,0)$, on peut affirmer

$$Vect\left(\left(1,\sqrt{2},1\right),\left(1,-\sqrt{2},1\right)\right) \subset Vect\,((1,0,1),(0,1,0)).$$

De plus, ces deux sous-espaces étant clairement de dimension 2, on peut conclure que :

$$\boxed{Vect\left(\left(1,\sqrt{2},1\right),\left(1,-\sqrt{2},1\right)\right) = Vect\,((1,0,1),(0,1,0))}$$

1.4.2 Posons $u = (-1, 0, 1)\,, v = \left(1, \sqrt{2}, 1\right)$ et $w = \left(1, -\sqrt{2}, 1\right)$.
La famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ obtenue par juxtaposition de familles libres de vecteurs propres de K associés à des valeurs propres distinctes est donc libre. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres associés à K.
Le résultat précédent prouve $E_1(J) = Vect(v, w)$, et donc que la base $\mathscr{B}$ est également constituée de vecteurs propres associés à J.
En conclusion, si P désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{B}$, alors $P^{-1}JP$ et $P^{-1}KP$ sont diagonales.

$$\boxed{\text{En posant } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ les matrices } P^{-1}JP \text{ et } P^{-1}KP \text{ sont diagonales.}}$$

1.5 Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$, et donc :

$$P^{-1}M(a,b,c)P = P^{-1}\left(aI + bJ + cK\right)P = aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP = D.$$

Il est clair que D, comme somme de matrices diagonales est diagonale.
En précisant enfin que

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

on peut conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M(a,b,c) \text{ est diagonalisable dans la base } \mathscr{B} \text{ et semblable à :} \\ D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & a+b-c\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{array}}$$

2. Réduction simultanée de deux matrices dans le cas général

2.1 Soient $\lambda \in Sp(g)$ et $\overrightarrow{x} \in E_\lambda(g)$. Puisque A et B commutent, alors f et g commutent et donc comme $\overrightarrow{x} \in E_\lambda(g)$:

$$g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = f\left(g\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = f\left(\lambda \overrightarrow{x}\right).$$

D'où $g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{x}\right)$ car f est linéaire.

$$\boxed{\forall \lambda \in Sp(g), \forall \overrightarrow{x} \in E_\lambda(g),\ g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{x}\right)}$$

Il apparaît alors clairement :

$$\boxed{f\left(\overrightarrow{x}\right) \in E_\lambda(g)}$$

2.2

2.2.1 Si B admet une unique valeur propre λ, puisque par hypothèse B est diagonalisable alors B est semblable à la matrice λI_3. Il existe donc une matrice Q inversible telle que

$$B = Q\left(\lambda I_3\right)Q^{-1} = \lambda I_3.$$

$$\boxed{B = \lambda I_3}$$

2.2.2 La matrice A étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. De plus, $P^{-1}BP = P^{-1}\left(\lambda I_3\right)P = \lambda I_3$ est diagonale. Donc :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } P \text{ inversible telle que } P^{-1}AP \text{ et } P^{-1}BP \text{ soient diagonales}}$$

2.3

2.3.1 Par définition d'une valeur propre, on a pour tout $i \in [\![1,3]\!]$: $dim\left(E_{\lambda_i}(g)\right) \geq 1$. De plus, B étant diagonalisable, et ces trois valeurs propres étant distinctes, on a également : $\sum_{i=1}^{3} dim\left(E_{\lambda_i}(g)\right) = 3$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall \lambda \in Sp(B),\ dim\left(E_{\lambda}(g)\right)}$$

2.3.2 D'après la question 2.1, si $\overrightarrow{x} \in E_{\lambda}(g)$ alors $f\left(\overrightarrow{x}\right) \in E_{\lambda}(g)$. Or $E_{\lambda}(g)$ est une droite vectorielle donc $\overrightarrow{x}$ et $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ sont colinéaires. Enfin, $\overrightarrow{x}$ étant non nul, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } f\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\overrightarrow{x}.}$$

2.3.3 La matrice B étant diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres de g. Le résultat précédent prouve en outre que tout vecteur propre de g est également un vecteur propre de f. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ composée de vecteurs propres communs à } f \text{ et } g.}$$

Remarque. Soit $\mathscr{B}$ la base formée de vecteurs propres communs à f et g que nous venons de construire. Les matrices de f et g dans la base $\mathscr{B}$ sont donc toutes les deux diagonales ce qui assure que, si P est la matrice de passage de la base ε vers la base $\mathscr{B}$, alors les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont toutes les deux diagonales.

2.4

2.4.1 B étant diagonalisable, on a $dim\left(E_{\lambda_1}(g)\right) + dim\left(E_{\lambda_2}(g)\right) = dim(E)$. Montrons maintenant que l'on a $E_{\lambda_1}(g) \cap E_{\lambda_2}(g) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, ce qui prouvera que $E_{\lambda_1}(g)$ et $E_{\lambda_2}(g)$ sont supplémentaires dans E.
Soit $\overrightarrow{x} \in E_{\lambda_1}(g) \cap E_{\lambda_2}(g)$. On a donc $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \lambda_1\overrightarrow{x}$ car $\overrightarrow{x} \in E_{\lambda_1}(g)$, et $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \lambda_2\overrightarrow{x}$ car $\overrightarrow{x} \in E_{\lambda_2}(g)$. On en déduit $(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, et comme on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Cela prouve $E_{\lambda_1}(g) \cap E_{\lambda_2}(g) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et par suite le résultat.

$$\boxed{E = E_{\lambda_1}(g) \oplus E_{\lambda_2}(g)}$$

2.4.2 Puisque $E_{\lambda_1}(g)$ et $E_{\lambda_2}(g)$ sont supplémentaires dans E, et comme $E_\mu(f) \subset E$, alors pour tout $\overrightarrow{x} \in E_\mu(f)$ il existe un unique couple $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ de $E_{\lambda_1}(g) \times E_{\lambda_2}(g)$ tel que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$.

On a alors $f(\overrightarrow{x}) = \mu\overrightarrow{x}$ d'où $f(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = \mu(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2})$ et donc $f(\overrightarrow{x_1}) - \mu\overrightarrow{x_1} = \mu\overrightarrow{x_2} - f(\overrightarrow{x_2})$.

Or d'après le résultat de la question 2.1, puisque $\overrightarrow{x_1} \in E_{\lambda_1}(g)$, alors $f(\overrightarrow{x_1}) \in E_{\lambda_1}(g)$, et donc $f(\overrightarrow{x_1}) - \mu\overrightarrow{x_1} \in E_{\lambda_1}(g)$. De même $f(\overrightarrow{x_2}) - \mu\overrightarrow{x_2} \in E_{\lambda_2}(g)$.

Or $E_{\lambda_1}(g) \cap E_{\lambda_2}(g) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, donc $f(\overrightarrow{x_1}) - \mu\overrightarrow{x_1} = \mu\overrightarrow{x_2} - f(\overrightarrow{x_2}) = \overrightarrow{0}$. On a donc $f(\overrightarrow{x_1}) = \mu\overrightarrow{x_1}$ et $f(\overrightarrow{x_2}) = \mu\overrightarrow{x_2}$, d'où la conclusion.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } \overrightarrow{x} \in E_\mu(f), \text{ il existe un couple } (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \in E_{\lambda_1}(g) \times E_{\lambda_2}(g) \text{ tel que} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \text{ avec en outre } \overrightarrow{x_1} \in E_{\lambda_1}(g) \text{ et } \overrightarrow{x_2} \in E_{\lambda_2}(g).\end{array}}$$

2.4.3 Le résultat précédent prouve que pour tout $\overrightarrow{x} \in E_\mu(f)$, il existe $\overrightarrow{x_1} \in E_{\lambda_1}(g) \cap E_\mu(f)$ et $\overrightarrow{x_2} \in E_{\lambda_2}(g) \cap E_\mu(f)$ tel que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$. On a ainsi démontré :

$$E = (E_{\lambda_1}(g) \cap E_\mu(f)) \oplus (E_{\lambda_2}(g) \cap E_\mu(f)).$$

De plus, si $\overrightarrow{x} \in (E_{\lambda_1}(g) \cap E_\mu(f)) \cap (E_{\lambda_2}(g) \cap E_\mu(f))$, alors $\overrightarrow{x} \in E_{\lambda_1}(g) \cap E_{\lambda_2}(g)$ donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, d'où le résultat.

$$\boxed{(E_\mu(f) \cap E_{\lambda_1}(g)) \oplus \left(E_\mu(f) \cap E_{\lambda_{2(g)}}\right) = E_\mu(f)}$$

2.4.4 D'après le résultat précédent, chacun des sous-espaces propres associés à f possède une base constituée de vecteurs propres de g. En juxtaposant ces bases, A étant diagonalisable, on obtient une base de E composée de vecteurs propres communs à f et g.

$$\boxed{\text{Il existe une base de } E \text{ constituée de vecteurs propres communs à } f \text{ et } g.}$$

Problème II

1. Intégrales de Wallis

1.1 On a trivialement $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2},\ W_1 = 1}$$

1.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cos^n\theta \ \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos^n\theta \ \mathrm{d}\theta = W_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left(\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}\theta\right)' \mathrm{d}\theta.$$

Comme les fonctions $\theta \mapsto \sin\theta$ et $\theta \mapsto \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}\theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut effectuer l'intégration par parties suivantes :

$$W_{n+2} = W_n + \left[\sin\theta \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos^{n+1}\theta \ \mathrm{d}\theta = W_n - \frac{1}{n+1}W_{n+2}.$$

On peut alors écrire :

$$W_{n+2} = W_n - \frac{1}{n+1}W_{n+2} \ \Leftrightarrow \ W_{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = W_n \ \Leftrightarrow \ W_{n+2}\frac{n+2}{n+1} = W_n.$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

1.3 Pour tout entier n, on pose $v_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. En vertu du résultat ci-dessus, on peut écrire pour tout entier n :

$$v_{n+1} = W_{n+1} \times (n+2)W_{n+2} = W_{n+1} \times (n+1)W_n = v_n.$$

Cela prouve que la suite (v_n) est constante, et permet d'écrire pour tout entier n : $v_n = v_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}}$$

1.4 Soit n un entier et θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $\cos\theta \in [0,1]$, on peut écrire :

$$0 \leq \cos\theta \times \cos^n\theta \leq \cos^n\theta.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit directement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Et comme $\theta \mapsto \cos^{n+1}\theta$ est à valeurs positives et n'est pas nulle, on en déduit encore $W_{n+1} > 0$, ce qui donne le résultat.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} > 0}$$

En injectant la relation $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ dans la triple inégalité précédente, on obtient alors :

$$W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n,$$

d'où en divisant par $W_n > 0$:

$$1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}.$$

On déduit alors du lemme des gendarmes que la suite $\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)$ converge vers 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1}$$

1.5 La relation ci-dessus assure que l'on a $W_n \sim W_{n+1}$ au voisinage de $+\infty$. De la relation obtenue en 1.3 on déduit alors

$$\frac{\pi}{2} \sim (n+1)W_{n+1}^2$$

ce qui donne directement

$$W_{n+1} \sim \left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)^{1/2}.$$

D'où le résultat.

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

2. Étude d'une suite

2.1 Limite de la suite $(\mathbf{u_n})$

2.1.1 On sait que si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ, μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. On en déduit alors par récurrence immédiate que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.

$$\boxed{S_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } n.}$$

On peut alors écrire :

$$P(S_n \leq n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} S_n = k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = 1 - u_n.$$

$$\boxed{P(S_n \leq n) = 1 - u_n}$$

2.1.2 Posons $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Puisque $E(X_1) = 1$ et $\sigma(X_1) = 1$, et puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, le théorème de la limite centrée assure que

$$\frac{\overline{X_n} - E(X_1)}{\sigma(X_1)/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X_n} - 1}{1/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, c'est-à-dire que quels que soient les réels $a < b$:

$$\lim_{n,+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \in [a,b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

$$\boxed{(T_n) \text{ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite}}$$

2.1.3 On a :

$$P(S_n \leq n) = P(S_n - n \leq 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(T_n \leq 0)$$

On déduit alors de la question précédente la formule :

$$P(S_n \leq n) \underset{n,+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$

Et comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité paire, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi prouvé $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - u_n) = \frac{1}{2}$, ce qui donne le résultat.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

2.2 Expression intégrale du terme général de la suite u

2.2.1 *Initialisation.* En $n = 0$, la propriété s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 + \int_0^x e^t \mathrm{d}t.$$

Celle-ci est trivialement vraie puisque l'on a $\displaystyle\int_0^x e^t \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$ pour tout réel x.

Héritage. Soit n un entier tel que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

Puisque pour tout réel x les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, on peut effectuer l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t &= \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)' e^t \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En injectant alors cette relation (que l'on vient de démontrer pour tout x réel) dans l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t.$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et termine la démonstration.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t}$$

2.2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = n$, la relation ci-dessus permet d'écrire

$$1 = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + e^{-n} \int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t,$$

puis

$$\underbrace{1 - e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}}_{u_n} = \int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!} e^{t-n} \mathrm{d}t.$$

Il suffit alors de poser $s = n - t$ (ce qui donne $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$) dans l'intégrale ci-dessus pour obtenir le résultat.

$$\boxed{u_n = \int_0^n \frac{s^n}{n!} e^{-s} \mathrm{d}s}$$

3. Mise en place d'un changement de variables

3.1 La fonction f étant définie par $f(x) = xe^{x-1}$, elle est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit trivialement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1].}$$

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, il est clair qu'elle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1; et comme f' est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, elle possède la même propriété.

$$\boxed{f \text{ et } f' \text{ possèdent un développement limité à tout ordre au voisinage de } 1.}$$

Posons alors $h = x - 1$. Lorsque x tends vers 1, le réel h tends vers 0, ce qui permet d'écrire :
$f(1+h) = (1+h)e^{-h} = (1+h)(1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)) = 1 - h + \frac{h^2}{2} + h - h^2 + o(h^2) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.
On en déduit alors le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 en remplaçant h par $x - 1$.

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)}$$

Et comme on sait que f' admet un développement limité à l'ordre 1 en 1, celui-ci est obtenu en dérivant le développement ci-dessus.

$$\boxed{f'(x) = 1 - x + o(x-1)}$$

On en déduit directement des équivalents de $1 - f$ et de f' au voisinage de 1.

$$\boxed{1 - f(x) \sim \frac{(x-1)^2}{2}}$$

$$\boxed{f'(x) \sim 1 - x}$$

3.2 On a $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$, ce qui permet de donner le tableau de variation suivant pour f.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

On voit alors que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0,1] \text{ sur } [0,1].}$$

3.3 Il suffit de démontrer $\lim\limits_{y\to 1^-} \dfrac{1-f^{-1}(y)}{\sqrt{2(1-y)}} = 1$.

Soit $y \in [0,1[$. On déduit de la question précédente qu'il existe un unique $x \in [0,1[$ tel que $y = f(x)$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1-f^{-1}(y)}{\sqrt{2(1-y)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2(1-f(x))}}.$$

La relation $x = f^{-1}(y)$ assure alors que lorsque y tends vers 1^-, le réel x tend également vers 1^- (car f^{-1} est continue sur $[0,1]$, voir la question suivante). Il suffit donc de montrer

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{2(1-f(x))}} = 1.$$

On utilise pour cela la relation $1 - f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{(x-1)^2}{2}$ obtenue à la question 3.1, qui donne $\sqrt{2(1-f(x))} \underset{x\to 1^-}{\sim} |x-1|$, et comme $|x-1| = 1-x$ on en déduit $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{2(1-f(x))}} = 1$, ce qui donne le résultat.

$$\boxed{1 - f^{-1}(y) \underset{y\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}}$$

3.4 Puisque f réalise une bijection continue de $[0,1]$ dans lui-même, il vient que f^{-1} est continue sur $[0,1]$.

$$\boxed{f^{-1} \text{ est continue sur } [0,1].}$$

Puisque f est dérivable sur $[0,1[$ et puisque sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, alors comme $f^{-1}([0,1[) = [0,1[$, il vient que f' est dérivable sur $[0,1[$ de sorte que l'on ait la relation $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$. On en déduit ensuite que $(f^{-1})'$ est continue sur $[0,1[$, puisque f' et f^{-1} le sont.

$$\boxed{f' \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[\text{ de sorte que } (f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}.}$$

3.5 Si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $x = \cos\theta \in [0,1]$, ce qui prouve que $f^{-1}(\cos\theta)$ est bien défini. Et comme f^{-1} est à valeurs dans $[0,1]$, on en déduit que $g(\theta) = f'\left(f^{-1}(\cos\theta)\right)$ est bien défini. D'autre part, g est trivialement continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en tant que composée de fonctions continues.

$$\boxed{\theta \mapsto f'\left(f^{-1}(\cos(\theta))\right) \text{ est définie et continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Posons $u = \cos\theta$ et $v = f^{-1}(u)$; il est clair que lorsque θ tends vers 0^+, u et v tendent vers 1^-. Or on a
$$g(\theta) = f'\left(f^{-1}(\cos\theta)\right) = f'\left(f^{-1}(u)\right) = f'(v).$$
D'après la question 3.1 on a $f'(v) \sim 1 - v$, donc d'après la question 3.3 on peut écrire :
$$f'\left(f^{-1}(u)\right) \sim 1 - f^{-1}(u) \sim \sqrt{2(1-u)}.$$
Enfin on a $\sqrt{2(1-u)} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$ et $1 - \cos\theta \sim \frac{\theta^2}{2}$ donc $g(\theta) \sim \left(\theta^2\right)^{1/2}$. D'où le résultat.

$$\boxed{g(\theta) \underset{\theta\to 0^+}{\sim} \theta}$$

3.6 On remarque déjà que l'on a pour tout θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$$g(\theta) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'\left(f^{-1}(\cos\theta)\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(\cos\theta) = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos\theta = 1 \;\Leftrightarrow\; \theta = 0.$$
On en déduit alors que h est bien définie et continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, en tant que quotient d'une fonction continue par une fonction continue ne s'annulant pas.

$$\boxed{h \text{ est définie et continue sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Enfin, on déduit de la question précédente que h est équivalent à $\frac{\theta}{\theta} = 1$ lorsque θ tends vers 0^+, ce qui assure qu'elle est prolongeable par continuité au voisinage de 0^+, en associant la valeur 1 en 0 au prolongement.

$$\boxed{h \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$$

4. Une autre expression du terme général de la suite u

4.1 Un premier changement de variable

Il suffit de poser $t = \frac{s}{n}$ dans l'expression intégrale de u_n obtenue en 2.2.2; on obtient alors $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 \left(te^{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$, et par suite le résultat.

$$\boxed{u_n = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t}$$

4.2 Un second changement de variable plus délicat

4.2.1 F est l'unique primitive de f^n qui s'annule en 0. En tant que telle, elle est continue sur $[0, 1]$.

$$\boxed{F \text{ est continue en } 1.}$$

4.2.2 On commencer par remarquer que pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$t = f^{-1}(\cos\theta) \;\Leftrightarrow\; \theta = \mathrm{Arccos}\,(f(t))\,,$$

ce qui prouve que $\theta \mapsto f^{-1}(\cos\theta)$ définie une bijection sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'autre part, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, en tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.
Soit $x \in [0, 1[$. Les remarques ci-dessus prouvent que la fonction $\theta \mapsto f^{-1}(\cos\theta)$ réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\left[\mathrm{Arccos}(f(x)), \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, x]$, ce qui assure que l'on peut opérer le changement de variable $t = f^{-1}(\cos\theta)$ dans l'intégrale $F(x) = \int_0^x (f(t))^n\,\mathrm{d}t$. On obtient alors :

$$\int_0^x (f(t))^n\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\mathrm{Arccos}(f(x))} \left(f \circ f^{-1}(\cos\theta)\right)^n \frac{d}{d\theta}\,\left(f^{-1}(\cos\theta)\right)\mathrm{d}\theta$$

On remarque alors que l'on a

$$\frac{d}{d\theta}\,\left(f^{-1}(\cos\theta)\right) = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) \times \left(f^{-1}\right)'(\cos\theta) = -\sin\theta \times \frac{1}{f' \circ f^{-1}(\cos\theta)} = -h(\theta).$$

D'où le résultat.

$$\boxed{F(x) = \int_{\mathrm{Arccos}(f(x))}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

4.2.3 On a prouvé que h se prolonge par continuité au voisinage de 0, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta$ est convergente (en l'occurrence faussement impropre). On en déduit par définition :

$$\lim_{X \to 0^+} \int_X^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Considérons alors la relation suivante, valable pour tout $x \in [0, 1[$:

$$F(x) = \int_{\mathrm{Arccos}(f(x))}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Comme F est continue en 1 et comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \mathrm{Arccos}(f(x)) = 0$, on obtient le résultat en faisant tendre x vers 1^- dans la relation ci-dessus.

$$\boxed{\int_0^1 \left(te^{1-t}\right)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

On déduit alors directement le second résultat en utilisant la question 4.1.

$$\boxed{u_n = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

5. Enfin la formule de Stirling

En utilisant les questions 2.1.3 et 4.2.3 on obtient

$$\frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta \sim \frac{1}{2}.$$

Soit

$$2n^{n+1}e^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta \sim n!.$$

En utilisant le résultat admis après la qustion 1.5 on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta \sim h(0)W_n \sim h(0)\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Et comme on a prolongé h en lui associant la valeur 0 en 1 on en déduit

$$n! \sim 2n^{n+1}e^{-n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

ce qui donne le résultat.

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$