Banque PT, Maths A, 2011. – Algèbre

(Corrigé Marc REZZOUK, mrezzouk@free.fr)

1 - Partie A

1. $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible ssi $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

On a alors $\det\left(\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{-1}\right) = \det(\mathrm{I}_2) = 1 = \det(\mathrm{A}) \times \det\left(\mathrm{A}^{-1}\right)$ donc $\det\left(\mathrm{A}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}}$.

2. On trouve

$$\mathrm{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ; \mathrm{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} ; \mathrm{A}_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Supposons que A est inversible d'inverse dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

Alors $\det(\mathrm{A}) \times \det\left(\mathrm{A}^{-1}\right) = 1$ donc, les deux déterminants étant des entiers, $\det(\mathrm{A}) \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, supposons que $\det(\mathrm{A}) \in \{-1, 1\}$.

Comme $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, A est inversible.

Par exemple en inversant un système, on trouve que

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Comme $\frac{1}{\det(\mathrm{A})} \in \{-1, 1\}$, on a bien $\mathrm{A}^{-1} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

4. $\mathrm{A}_4 \in \mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$ ssi $5 - bc = 1 \Leftrightarrow bc = 4$.

Il vient $(b, c) \in \{(1, 4), (-1, -4), (4, 1), (-4, -1), (2, 2), (-2, -2)\}$.

2 - Partie B

1. Solution n

$\circ$

1 :$\mathrm{A} \times \mathrm{A}^{p-1} = \mathrm{I}_2$ donc A est inversible, d'inverse A^{p-1}.

Solution n

$\circ$

2 :$\det(\mathrm{A}^p) = (\det(\mathrm{A}))^p = 1$ donc $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.

On a $(\det(\mathrm{A}))^p = 1$ et $\det(\mathrm{A}) \in \mathbb{Z}$ donc $\det(\mathrm{A}) \in \{-1, 1\}$.

2. D'après A.3), $\mathrm{A}^{-1} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$.

D'autre part, $\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^p = \left(\mathrm{A}^p\right)^{-1} = \mathrm{I}_2$ donc $\mathrm{A}^2 \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

3. Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit X_i un vecteur propre associé à λ_i.

On a $\mathrm{A}^p \mathrm{X}_i = \lambda_i^p \mathrm{X}_i = \mathrm{X}_i$ donc, puisque $\mathrm{X}_i \neq 0$, $\lambda_i^p = 1$.

En particulier $|\lambda_i| = 1$.

4. Le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé (dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$) donc A est trigonalisable et en particulier $\operatorname{tr} \mathrm{A} = \lambda_1 + \lambda_2$.

5. Il vient $|\operatorname{tr} \mathrm{A}| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| \leqslant 2$. Comme $\operatorname{tr} \mathrm{A} \in \mathbb{Z}$, il vient $\operatorname{tr} \mathrm{A} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6. On trouve $\mathrm{C}^2 = \mathrm{I}_2$ et $\mathrm{D}^3 = \mathrm{I}_2$ donc ces matrices appartiennent à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

7. $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^2 - \operatorname{tr} \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} + \det \mathrm{A}$.

8. Comme $\operatorname{tr} A \in \{-2,-1,0,1,2\}$ et $\det A \in \{-1,1\}$, on obtient 10 polynômes caractéristiques possibles.
Parmi eux, 4 ont des racines réelles différentes de -1 ou 1 donc ne peuvent provenir d'une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.
Voici les résultats, $j = e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

χ_A	x^2-1	x^2+x-1	x^2+1	x^2+x+1	x^2-x-1
v.p.	$-1,1$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$	$-i,i$	j,j^2	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$
		à rejeter			à rejeter

χ_A	$(x+1)^2$	x^2-2x-1	x^2+2x-1	x^2-x+1	$(x-1)^2$
v.p.	-1	$1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}$	$-j,-j^2$	1
		à rejeter	à rejeter		

On rejette les polynômes dont certaines racines sont en module > 1.

9. Dans les 6 cas restants,
il y a 4 cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc la matrice A correspondante est diagonalisable.
Il reste les cas $\chi_A = (x \pm 1)^2$.
Traitons par exemple le cas $\chi_A = (x-1)^2$.
Si A n'est pas diagonalisable alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ par trigonalisation.
Mais alors A^p est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} 1 & p\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (par exemple avec la formule de binôme de Newton ou bien directement par récurrence) ce qui contredit $A^p = I_2$.
Ainsi A est diagonalisable (et en fait **égale** à I_2)
On fait exactement de même dans l'autre cas ($A = -I_2$) et finalement toutes les matrices sont diagonalisables.
On cherche alors dans chaque cas le premier entier q non nul tel que $A^q = I_2$ en raisonnant sur sa matrice diagonalisée et on obtient

χ_A	x^2-1	x^2+1	x^2+x+1	$(x+1)^2$	x^2-x+1	$(x-1)^2$
v.p.	$-1,1$	$-i,i$	j,j^2	-1	$-j,-j^2$	1
entier $q = h(A)$	2	4	3	2	6	1

Notons également que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_2 \Leftrightarrow p$ multiple de $h(A)$.

10. On cherche un entier multiple des entiers q précédents et le plus petit possible, c'est le plus petit commun multiple de $1,2,3,4,6$ à savoir 12.
On a pour tout $A \in \mathcal{C}_2(A)$, $A^{12} = I_2$ (et 12 est le plus petit entier possible vérifiant cette propriété).

3 - Partie C

1. Voir cours.

2. Le procédé de Gram-Schmidt permet d'obtenir à partir de la base canonique $(X^i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ une base orthonormale vérifiant la première condition (avec les Vect).
L'unicité qui provient de la deuxième condition ne figure plus au programme. Montrons-là.
La vecteur π_i est un vecteur directeur unitaire de la droite, supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{i-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_i[X]$. Il y en a deux possibles. On sait qu'un tel vecteur a vérifie $\varphi(a, X^i) \neq 0$ (car $X^i \notin \mathbb{R}_{i-1}[X]$), le vecteur π_i est donc l'unique vecteur qui vérifie $\varphi(\pi_i, X^i) > 0$ (c'est soit a soit $-a$).

En réalité, on montre les formules de Gram-Schmidt donne directement π_i,
$\pi_i = \dfrac{1}{\|\mathrm{P}_i\|}\mathrm{P}_i$ avec $\mathrm{P}_i = \mathrm{X}^i - \sum\limits_{k=0}^{i-1} \varphi(\mathrm{X}^i, \pi_k)\pi_k$.
(en effet $\varphi(\mathrm{P}_i, \mathrm{X}^i) = \|\mathrm{X}^i\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{i-1} [\varphi(\mathrm{X}^i, \pi_k)]^2 = \|\mathrm{P}_i\|^2 > 0$ par Pythagore).
On trouve (il vaut mieux normaliser tout à la fin),

$$\pi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{X}, \pi_2 = \frac{3}{4}\sqrt{10}\left(\mathrm{X}^2 - \frac{1}{3}\right), \pi_3 = \frac{5}{4}\sqrt{14}\left(\mathrm{X}^3 - \frac{3}{5}\mathrm{X}\right).$$

3. 3.a La famille $(\pi_i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$ est une base de E donc P s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathrm{P} =_{i=0}^{3} \alpha_i\pi_i.$$

3.b La base précédente étant orthonormale, $\|\mathrm{P}\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{3} \alpha_i^2$ et par hypothèse $\|\mathrm{P}\|^2 = 1$.

3.c **i.** Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
II. Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{P}(x)| = \left|_{i=0}^{3}\alpha_i\pi_i(x)\right| &\leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{3}\alpha_i^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{3}\pi_i^2(x)} \text{ d'après c.i.}\\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{3}\pi_i^2(x)} \text{ d'après b.}\end{aligned}$$

iii. Soit $\mathrm{N}_i = \sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |\pi_i(x)|$. On trouve sans difficulté (pour π_3, on dresse un tableau de variation),

$$\mathrm{N}_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \mathrm{N}_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \mathrm{N}_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}, \mathrm{N}_3 = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Il vient pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|\mathrm{P}(x)| \leqslant \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

En conclusion, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |\mathrm{P}(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.