Centrale 2012. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Produit de convolution.

I.A - *Généralités.*

I.A.1) a) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ il vient que, en notant $\varphi_x(t) = f(t)g(x-t)$, on a $|\varphi_x(t)| \leqslant \|g\|_\infty |f(t)|$ pour tout réel x, ce qui prouve que φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \times \|g\|_\infty$ $\square$

b) Si $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il en va de même de $t \longmapsto g_x(t) \underset{\text{DEF}}{=} g(x-t)$ et $\|g_x\|_2 = \|g\|_2$ par le changement de variable $t \longmapsto x - t$ admissible car $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Le produit de deux élément de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ étant un élément de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et l'inégalité de Schwarz dans l'espace préhilbertien $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\mathcal{L}^2$ montre alors que $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \times \|g\|_2$ $\square$

I.A.2) Immédiat par le changement $t \longmapsto u = x - t$ admissible car $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même. $\square$

I.A.2) Supposons f et g à support compact inclus respectivement dans $[-A, A]$ et $[-B, B]$.
Alors $f * g(x) = \displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t$.
Or pour $t \in [-A, A]$ si $|x| > A + B$ on a $|x - t| > B$ donc $g(x - t) = 0$.
Il en découle que $f * g$ est à support compact inclus dans $[-(A + B), A + B]$ $\square$

I.B - *Produit de convolution de deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.*

I.B.1) h est par définition uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ donné quelconque il existe $\beta > 0$ tel que $|h(x) - h(x - \alpha)| \leqslant \varepsilon$ pour tout réel x dès que $|\alpha| \leqslant \beta$ c'est à dire $\|h - T_\alpha(h)\|_\infty \leqslant \varepsilon$ dès que $|\alpha| \leqslant \beta$.
En d'autres termes si et seulement si $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \|h - T_\alpha(h)\|_\infty = 0$ $\square$

I.B.2) Comme noté en I.A.1.b), si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il en va de même de $T_\alpha(f)$ et ainsi $T_\alpha(f) * g$ est bien définie.
La changement de variable $t \longmapsto u = t - \alpha$ prouve alors que $T_\alpha(f * g) = T_\alpha(f) * g$ $\square$

I.B.3) Comme $T_\alpha(f)$, f et g appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, la question I.A.1.b) fournit alors :
$\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty = \|T_\alpha(f) * g - f * g\|_\infty = \|\big(T_\alpha(f) - f\big) * g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$ $\square$

I.B.4) Soient f à support compact inclus dans $[-A, A]$ (ce qui implique $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$) et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.
f et $T_\alpha(f)$ sont alors toutes deux nulles en dehors de $[-A - |\alpha|, A + |\alpha|]$ donc
$\|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = \displaystyle\int_{-A-|\alpha|}^{A+|\alpha|} |f(t-\alpha) - f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t = \int_{-A-1}^{A+1} |f(t-\alpha) - f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t$ pour $|\alpha| \leqslant 1$
Or classiquement si f est continue à support compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Il existe $\beta > 0$ tel que $|f(t - \alpha) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$ et tout $t \in \mathbb{R}$
Il en découle que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leqslant \sqrt{2(A + 1)} \times \varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \min(1, \beta)$ i.e. $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$
Des questions I.B.1. et I.B.3. on en déduit que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

I.B.5) Soient désormais f et g deux éléments de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Pour montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il suffit, comme dans la question précédente, d'établir que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$.

• Compte-tenu de la question précédente, il suffit d'établir que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.
En effet supposons que ce soit le cas et soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque.
Il existe alors φ continue à support compact telle que $\|f - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon$ et on a alors

$$\begin{aligned}\|T_\alpha(f) - f\|_2 &\leqslant \|T_\alpha(f) - T_\alpha(\varphi)\|_2 + \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\\ &= \|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + 2\|\varphi - f\|_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\\ &\leqslant |T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 + 2\varepsilon \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Or puisque φ est continue à support compact, d'après la démonstration de la question précédente il existe $\beta > 0$ tel que $\|T_\alpha(\varphi) - \varphi\|_2 \leqslant \varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$
Ainsi $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leqslant 3\varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$ ce qui prouve que $\|T_\alpha(f) - f\|_2 \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$ et établit donc le résultat. $\square$

• Reste à prouver que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.
Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et pour n entier non nul soit un réel $\alpha_n > 0$ choisi de sorte que
$\sqrt{\alpha}_n |f(-n)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\sqrt{\alpha}_n |f(n)| \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Soit alors la fonction f_n continue à support compact définie par $f_n(t) = f(t)$ pour $t \in [-n, n]$, $f_n(t) = 0$ pour $|t| \geqslant n + \alpha_n$ et f_n affine sur $[-n - \alpha_n, -n]$ et sur $[n, n + \alpha_n]$
On a $\|f - f_n\|_2^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus[-n-\alpha_n, n+\alpha_n]} |f|^2 + \int_{-n-\alpha_n}^{-n} |f - f_n|^2 + \int_{n}^{n+\alpha_n} |f - f_n|^2 \underset{\text{DEF}}{=} I_n + J_n + K_n$

Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Comme $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ il existe N_0 tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus[-N_0,N_0]} |f|^2 \leqslant \varepsilon$. Donc

$\|f - f_n\|_2^2 \leqslant \varepsilon + J_n + K_n \quad \forall n \geqslant N_0$

En outre $\sqrt{K_n} \leqslant \sqrt{\displaystyle\int_{[n,n+\alpha_n]} |f|^2} + \sqrt{\displaystyle\int_{[n,n+\alpha_n]} |f_n|^2} \underset{\text{DEF}}{=} a_n + b_n$ par l'inégalité de Minkowski.

Or $a_n \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ pour $n \geqslant N_0$ et comme f_n est affine entre n et $n + \alpha_n$, égale à $|f(n)|$ en n et nulle en $n + \alpha_n$ on a $|f_n(t)| \leqslant |f(n)|$ pour $t \in [n, n + \alpha_n]$. Donc $b_n \leqslant \sqrt{\alpha}_n |f(n)| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$ pour $n \geqslant N_1$

Ainsi $K_n \leqslant 4\varepsilon$ pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. De même J_n.

Finalement $\|f - f_n\|_2^2 \leqslant 9\varepsilon$ pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$ ce qui établit le résultat. $\square$

I.C - *Continuité, dérivabilité, séries de Fourier.*

I.C.1) Supposons que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

a) 1/ $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue (donc a fortiori par morceaux) sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2/ $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3/ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(t)g(x-t)| \leqslant \|g\|_\infty \times |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$

ce qui établit que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

b) Supposons désormais en outre g uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque.
Il existe $\beta > 0$ tel que $|g(u+\alpha) - g(u)| \leqslant \varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$ et tout $u \in \mathbb{R}$.
Il en résulte que $|(f * g)(x+\alpha) - (f * g)(x)| \leqslant \|f\|_1 \times \varepsilon$ pour $|\alpha| \leqslant \beta$ et tout $x \in \mathbb{R}$ i.e. $f * g$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

I.C.2) Avec les hypothèses de l'énoncé il vient (outre I.C.1.a) en notant $\varphi(x,t) = f(t)g(x-t)$ que
$\dfrac{\partial^\ell \varphi}{\partial x^\ell}(x,t) = f(t)g^{(\ell)}(x-t)$ existe et vérifie les mêmes trois hypothèses que dans la question I.C.1.a) pour $\ell \leqslant k$

Il en résulte que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et que $(f * g)^{(k)} \equiv f * g^{(k)}$ $\square$

I.C.3) a) La série de Fourier d'une telle fonction h converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers h.

b) Commençons par remarquer que comme g est continue et périodique, elle est bornée et donc $f * g$ existe bien, est continue (I.C.1.a) et est clairement 2π-périodique.
D'après le a), $g(u) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inu}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et en outre $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|$ converge.

Donc $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)\right) \mathrm{d}\, t$ avec $u_n(t) = c_n(g)f(t)e^{in(x-t)}$.

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u_n(t)| \,\mathrm{d}\, t \leqslant \|f\|_1 \times |c_n(g)|$ donc $\displaystyle\sum \int_{\mathbb{R}} |u_n(t)| \,\mathrm{d}\, t$ converge de sorte que d'après le théorème de convergence $\mathcal{L}^1$ on a $(f * g)(x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_n(t) \,\mathrm{d}\, t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e^{inx}$ avec $\alpha_n = c_n(g) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int} \,\mathrm{d}\, t$

On a là un développement en série trigonométrique de $f * g$ qui converge normalement (car $|\alpha_n| \leqslant \|f\|_1 \times |c_n(g)|$) donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Or classiquement si une série trigonométrique converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors c'est le développement en série de Fourier de sa somme (par intégration terme à terme).

Ainsi $f * g$ est égale à la somme de sa série de Fourier et $c_n(f * g) = c_n(g) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int} \,\mathrm{d}\, t = c_n(g)\widehat{f}(n)$ $\square$

I.D - *Approximation de l'unité.*

I.D.1) Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque et soit x fixé. Comme f est continue en particulier en x :
il existe $\alpha = \alpha(x)$ tel que $\sup\limits_{t\in[-\alpha,\alpha]} \big|f(x-t) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$ pour $|t| \leqslant \alpha$

Et il existe N_0 tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} \delta_n \leqslant \varepsilon$ et $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \delta_n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_0$.

En remarquant que $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_n(t) \,\mathrm{d}\, t$ et $f * \delta_n = \delta_n * f$ il vient :

$\Delta_n(x) \underset{\text{DEF}}{=} |(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x,t) \,\mathrm{d}\, t + \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(x,t) + \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x,t) \,\mathrm{d}\, t$

avec $\varphi_n(x,t) = \big|f(x-t) - f(x)\big|\delta_n(t)$.

Or $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(x,t) \leqslant \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta_n(t) \,\mathrm{d}\, t \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) \,\mathrm{d}\, t = \varepsilon$. Donc :

$\Delta_n(x) \leqslant \varepsilon + \displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x,t) \,\mathrm{d}\, t + \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x,t) \,\mathrm{d}\, t \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \times \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} \delta_n(t) \,\mathrm{d}\, t + \int_{\alpha}^{+\infty} \delta_n(t) \,\mathrm{d}\, t\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d'où il résulte que $\Delta_n(x) \leqslant \Big(4\|f\|_\infty + 1\Big)\varepsilon$ pour $n \geqslant N_0$
ce qui établit bien la convergence simple de la suite $(f * \delta_n)$ vers f sur $\mathbb{R}$. $\square$

I.D.2) Si f est en outre à support compact, classiquement elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ de sorte que le α de la question précédente ne dépend pas de x. La démonstration de la question précédente prouve alors que $\Delta_n(x) \leqslant \Big(4\|f\|_\infty + 1\Big)\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
En d'autres termes la suite $(f * \delta_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. $\square$

I.D.3) a) h_n est clairement continue, positive et vérifie $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n = 1$.
Remarquons que $\displaystyle\lambda_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}\,t \geqslant 2\int_0^1 (1-t^2)^n t \,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 (1-u)^n \,\mathrm{d}\,u = \int_0^1 u^n \,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{n+1}$
Soit désormais $\alpha > 0$ donné quelconque. Il vient
$\displaystyle I_n(\alpha) \underset{\text{DEF}}{=} \int_\alpha^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ si $\alpha \geqslant 1$ et sinon $\displaystyle I_n(\alpha) = \int_\alpha^1 h_n(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{(1-\alpha^2)^n}{\lambda_n} \leqslant (n+1)(1-\alpha^2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
De même $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} h_n = I_n(\alpha)$. Donc la suite (h_n) est bien une approximation de l'unité. $\square$

b) Si f est continue à support inclus dans $\Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$ il résulte da la question I.A.3) que $f * h_n$ est à support inclus dans $\Big[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\Big]$. $\square$

Pour tout x on a $\displaystyle(f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h_n(x-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)h_n(x-t)\,\mathrm{d}\,t$.
Si en outre $x \in \Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$ on a $x - t \in [-1, 1]$ pour tout $t \in \Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$ donc $h_n(x-t) = \big(1-(x-t)^2\big)^n$ de sorte que $\displaystyle(f * h_n)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\big(1-(x-t)^2\big)^n \,\mathrm{d}\,t$ qui par développement est clairement une fonction polynomiale en x et établit donc le résultat. $\square$

c) Soit φ une fonction définie et continue sur $[a, b]$ puis soit ψ continue sur $\mathbb{R}$ à support compact qui coincide avec φ sur $[a, b]$, est nulle sur $]-\infty, a-1]$ et $[b+1, +\infty[$ et est affine sur $[a-1, a]$ et $[b, b+1]$.
Soit enfin f définie par $f(x) = \psi\big(a - 1 + (b-a+2)(t + \dfrac{1}{2})\big)$. Elle est continue à support inclus dans $\Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$.
D'après I.D.2) la suite $(f * h_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori sur $\Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$ vers f.
Or d'après la partie b) ci-dessus $f * h_n$ est polynomiale sur $\Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$.
Ainsi il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) qui converge uniformément vers f sur $\Big[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big]$.
Alors classiquemment (changement de variable affine) la suite de fonctions polynomiales (Q_n) définie par $Q_n(x) = P_n\Big(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x-a+1}{b-a+2}\Big)$ converge uniformément vers ψ sur $[a-1, b+1]$ donc a fortiori converge uniformément vers φ sur $[a, b]$. $\square$

I.D.4) Supposons qu'il existe une telle fonction g. On a en particulier $h_n * g = h_n$ pour tout entier n. Or d'après I.D.1) la suite $(h_n * g)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g puisque la suite (h_n) est une approximation de l'unité. Ainsi la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g.
Or $h_n(0) = \dfrac{1}{\lambda_n}$ et $\displaystyle\lambda_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}\,t$ tend vers 0 par le théorème de la convergence dominée (la suite $g_n(t) = (1-t^2)^n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle et y est dominée par la fonction constante égale à 1 bien intégrable sur $]0, 1[$).
Ainsi la suite $\big(h_n(0)\big)$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ ce qui est contradictoire avec le fait que la suite (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Donc une telle fonction g n'existe pas. $\square$

II. Transformée de Fourier.

II.A. - 1/ $x \longmapsto f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$
2/ $t \longmapsto f(t)e^{ixt}$ est continue donc a fortiori continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
3/ $\big|f(t)e^{ixt}\big| \leqslant |f(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Donc $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée par $\|f\|_1$ $\square$

II.B. - *Transformée de Fourier d'un produit de convolution.*

II.B.1) **a)** On commence par noter que, comme $g \in \mathcal{C}_b$, $f * g$ est bien définie et continue par la question I.C.1.a)

- Pour prouver que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ il suffit de prouver qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout réel $A > 0$ on ait $\displaystyle\int_{-A}^{A} |(f*g)(x)| \,\mathrm{d}\, x \leqslant M$.

Soient la fonction φ définie par $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)| \,\mathrm{d}\, t$, la suite (φ_n) définie par $\varphi_n(x) = \displaystyle\int_{-n}^{n} |f(t)g(x-t)| \,\mathrm{d}\, t$ ainsi que $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ donnés quelconques.

Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ il existe N_0 tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-n} |f| \leqslant \varepsilon$ et $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} |f| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N_0$. Il en découle que

$$\int_{-\infty}^{-n} |f(t)g(x-t)| \,\mathrm{d}\, t \leqslant \|g\|_\infty \times \varepsilon \text{ et } \int_{n}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| \,\mathrm{d}\, t \leqslant \|g\|_\infty \times \varepsilon \quad \forall n \geqslant N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant 2\|g\|_\infty \times \varepsilon \quad \forall n \geqslant N_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ i.e. la suite (φ_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

Donc $\displaystyle\int_{-A}^{A} \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-A}^{A} \varphi \quad (1)$

Or $\displaystyle\int_{-A}^{A} \varphi_n = \int_{-A}^{A} \left(\int_{-n}^{n} |f(t)g(x-t)| \,\mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, x = \int_{-n}^{n} \left(|f(t)| \int_{-A}^{A} |g(x-t)| \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, t$

par le théorème de Fubini sur un rectangle bien licite puisque $(x,t) \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue.

Donc $\displaystyle\int_{-A}^{A} \varphi_n \leqslant \int_{-n}^{n} \left(|f(t)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, t = \|g\|_1 \int_{-n}^{n} |f(t)| \,\mathrm{d}\, t \leqslant \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \,\mathrm{d}\, t = \|g\|_1 \times \|f\|_1$

De (1) on tire alors $\displaystyle\int_{-A}^{A} \varphi \leqslant \|g\|_1 \times \|f\|_1$ et par ailleurs on a $|(f*g)(x)| \leqslant \varphi(x)$.

Donc $\displaystyle\int_{-A}^{A} |(f*g)(x)| \,\mathrm{d}\, x \leqslant \|f\|_1 \times \|g\|_1$ pour tout $A > 0$ ce qui établit bien l'intégrabilité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$. □

En d'autres termes l'intégrale imbriquée $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, x$ existe.

- Au cours de la démonstration ci-dessus, on a établi au passage que si K et L sont deux segments inclus dans $\mathbb{R}$ on a $\displaystyle\iint_{K\times L} |f(t)g(x-t)| \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, t \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$ ce qui prouve que $(x,t) \longmapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Le théorème de Fubini prouve alors que

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, t = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, x = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x) \,\mathrm{d}\, x \quad (2)$$

- Par ailleurs $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, x = f(t) \int_{\mathbb{R}} g(x-t) \,\mathrm{d}\, x = f(t) \int_{\mathbb{R}} g$ donc l'autre intégrale imbriquée

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, t$ a un sens et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, t = \int_{\mathbb{R}} g \times \int_{\mathbb{R}} f$

Toujours par le théorème de Fubini il vient $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, t = \int_{\mathbb{R}} g \times \int_{\mathbb{R}} f$

De (2) on déduit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f*g = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g$ □

b) Soit u un réel fixé quelconque et soient f_1 et g_1 les fonctions définies par $f_1(t) = f(t)e^{-iut}$ et $g_1(t) = e^{-iut}$. Elles appartiennent bien à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et g_1 est bornée. On peut donc appliquer la question précédente.

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_{\mathbb{R}} f_1 * g_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iut} g(x-t) e^{-iu(x-t)} \,\mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, x = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)e^{-iux} \,\mathrm{d}\, t \right) \mathrm{d}\, x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \,\mathrm{d}\, t \right) e^{-iux} \,\mathrm{d}\, x = (\widehat{f*g})(u) \end{aligned}$$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1 = \widehat{f}(u)$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g = \widehat{g}(u)$

Ainsi $\widehat{f*g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$ □

II.B.2 Soit la fonction f paire définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = n$ pour $x \in \left[n - \dfrac{1}{n^3}, n + \dfrac{1}{n^3}\right]$, $f(n - \dfrac{2}{n^3}) = 0$, $f(n + \dfrac{2}{n^3}) = 0$,

f affine sur $\left[n - \dfrac{2}{n^3}, n - \dfrac{1}{n^3}\right]$ et sur $\left[n + \dfrac{1}{n^3}, n + \dfrac{2}{n^3}\right]$ pour $n \geqslant 2$ et nulle partout ailleurs (pour $x \geqslant 0$).

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable car paire et pour $x \geqslant 0$ on a $\displaystyle\int_0^x f \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{k^2}$ avec $n = \mathrm{Int}(x) + 1$

Si $(f*f)(0)$ était défini sa valeur serait $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)f(-t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}\,t$

Or $\displaystyle\int_0^{n+2/n^3} f^2 \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc $(f*f)(0)$ n'est pas défini. □

II.C. - *Sinus cardinal.*

II.C.1 $\displaystyle\widehat{k_n}(x) = \int_{-n}^{0} (1+\frac{t}{n})e^{-ixt}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^n (1-\frac{t}{n})e^{-ixt}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^n (1-\frac{t}{n})\left(e^{ixt}+e^{-ixt}\right)\mathrm{d}\,t$

$$= 2n\int_0^1 (1-u)\cos(nxu)\,\mathrm{d}\,u$$

donc $\widehat{k_n}(0) = n$ et par parties $\displaystyle\widehat{k_n}(x) = \frac{2}{nx^2}(1-\cos(nx)) = n\times\frac{2n}{(nx)^2}\sin^2(\frac{nx}{2})$ pour $x\neq 0$.

Ainsi $\displaystyle\widehat{k_n}(x) = n\times\varphi(\frac{nx}{2}) \quad \forall x\in\mathbb{R}$ □

II.C.2 φ est classiquement continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ donc est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de $\pm\infty$ il vient $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ ce qui prouve que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ □

II.C.3 On a K_n continue, positive et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_n = 1$ (vérification immédiate par changement de variable).

Par ailleurs K_n est paire donc, pour prouver que (K_n) est une approximation de l'unité, il suffit de prouver que pour tout $\alpha>0$ on a $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or $\displaystyle 2\pi\int_\alpha^{+\infty} K_n = n\int_\alpha^{+\infty}\varphi(\frac{nt}{2})\,\mathrm{d}\,t = 2\int_{n\alpha/2}^{+\infty}\varphi(u)\,\mathrm{d}\,u \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque φ est intégrable sur $\mathbb{R}$. □

II.D. - *Inversion de Fourier.*

II.D.1 • Commençons par remarquer que les deux membres de l'égalité proposée ont bien un sens :

1/ l'intégrale $I_n(t)$ est bien définie car l'inégalité classique $|\sin u|\leqslant|u|$ fournit $\left|k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}\right|\leqslant|\widehat{f}(-x)|$ et par hypothèse $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $x\longmapsto\widehat{f}(-x)$ également.

2/ comme $2\pi K_n = \widehat{k_n}$ la fonction K_n appartient à $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (question II.A) donc $f*K_n$ est bien défini car $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

• $\displaystyle I_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(k_n(x)e^{-itx}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{ixu}\,\mathrm{d}\,u\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x)f(u)e^{-i(t-u)x}\,\mathrm{d}\,u\right)\mathrm{d}\,x$

Pour t fixé soit la fonction g_t définie par $g_t(u,x) = k_n(x)f(u)e^{-i(t-u)x}$

On a $|g_t(u,x)| = k_n(x)|f(u)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ puisque k_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de Fubini on a donc $\displaystyle I_n(t) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g_t(u,x)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,x$.

• Par ailleurs la seconde intégrale imbriquée existe puisque $f*K_n$ est défini :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x)f(u)e^{-i(t-u)x}\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(f(u)\int_{\mathbb{R}} k_n(x)e^{-i(t-u)x}\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{k_n}(t-u)\,\mathrm{d}\,u = (f*K_n)(t)$$

Toujours par Fubini on a donc également $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g_t(u,x)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,x = (f*K_n)(t)$

• Ainsi on a bien $I_n(t) = (f*K_n)(t)$ pour tout réel t. □

II.D.2 • La suite (k_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1 donc la suite h_n définie par $h_n(x) = k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x\longrightarrow\widehat{f}(-x)e^{-itx}$ et cette suite est dominée sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x\longmapsto|\widehat{f}(-x)|$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Il en découle par le théorème de la convergence dominée que $\displaystyle I_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(-x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x)e^{itx}\,\mathrm{d}\,x$

• Pour prouver que $(f*K_n)(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$ on ne peut pas utiliser la question I.D.1) car on ne sait pas (a priori) que f est bornée (elle le sera a posteriori compte-tenu de la formule d'inversion !).

On va prouver directement dans le cas particulier de cette approximation de l'unité que le résultat est vrai.
On reprend les notations de $I.D.1$. pour prouver que $f*K_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.
Le début de la démonstration est exactement le même et on a comme alors :

$\Delta_n(x) \leqslant \varepsilon + \displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Or $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant |f(x)| \int_{\alpha}^{+\infty} K_n(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x-t)|K_n(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Comme (K_n) est une approximation de l'unité, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} K_n(t)\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par ailleurs $K_n(t) = \dfrac{1}{2\pi} \times n\varphi\big(\dfrac{nt}{2}\big) \leqslant \dfrac{2}{\pi n t^2}$ pour $t \neq 0$ et $t \longmapsto \dfrac{|f(x-t)|}{t^2}$ est intégrable sur $[\alpha, +\infty[$ car dominée au voisinage de l'infini par $t \longrightarrow |f(x-t)|$ intégrable. Donc

$\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} |f(x-t)|K_n(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \frac{2}{n\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{|f(x-t)|}{t^2}\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et de même $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} \varphi_n(x,t)\,\mathrm{d}\,t$.

Il en découle que $\Delta_n(x) \leqslant 3\varepsilon$ pour $n \geqslant N_0$ c'est à dire que la suite $(f * K_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.

- Un passage à la limite dans l'égalité $I_n(t) = f * K_n(t)$ fournit alors la formule d'inversion de Fourier. $\square$

III. Convolution et codimension finie.

III.A.1 L'application de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})^*$ définie par $\phi(g) = \varphi_g$ est clairement linéaire donc si la famille $\left(\varphi_{g_1}, \varphi_{g_2}, \ldots, \varphi_{g_p}\right)$ est libre il en va de même de la famille $\big(g_1, g_2, \ldots, g_p\big)$.

Pour établir la réciproque il suffit de prouver que ϕ est injective.

Soit donc $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{\mathbb{R}} f(-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Soit $A > 0$, $\varepsilon > 0$ et soit f continue à support compact définie par $f(t) = \overline{g}(-t)$ pour $t \in [-A, A]$, f nulle en dehors de $]-A-\varepsilon, A+\varepsilon[$ et affine sur $[-A-\varepsilon, -A]$ et sur $[A, A+\varepsilon]$.

On a en particulier $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ c'est à dire $\displaystyle\int_{-A}^{A} |g(t)|^2\,\mathrm{d}\,t + I_\varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1)$

avec $I_\varepsilon = \displaystyle\int_{-A-\varepsilon}^{-A} f(-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{A}^{A+\varepsilon} f(-t)g(t)\,\mathrm{d}\,t.$

Or g est bornée sur $\mathbb{R}$ mettons par M donc f également. De sorte que $|I_\varepsilon| \leqslant 2M^2\varepsilon$.

Par passage à la limite avec $\varepsilon \to 0$ dans (1) on obtient donc que $\displaystyle\int_{-A}^{A} |g(t)|^2\,\mathrm{d}\,t = 0.$

Par le théorème de positivité amélioré de l'intégration il vient que $g(t) = 0$ pour tout $t \in [-A, A]$ et finalement, puisque A est quelconque, que $g = 0$ $\square$

III.A.2 • Supposons $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang r et quitte à changer la numérotation supposons $\big(f_1, f_2, \ldots, f_r\big)$ libre.

On a alors clairement $K = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} f_k$.

Envisageons $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^r$ définie par $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)\big)$. Alors f est linéaire, $\operatorname{Ker} f = K$

Supposons $\dim\ \operatorname{Im} f < r$. Alors $\operatorname{Im} f$ est inclus dans un hyperplan de $\mathbb{K}^r$ donc il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ telle que $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_r f_r(x) = 0$ pour tout x de E c'est à dire telle que $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_r f_r \equiv 0$ ce qui est contraire au fait que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ soit libre.

Ainsi $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}^r$. Or par le théorème du rang, la restriction de f à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f = K$ induit un isomorphisme sur $\operatorname{Im} f$. Donc un tel supplémentaire est de dimension r en d'autres termes la codimension de K dans E est égale à r. $\square$

- Supposons désormais $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang infini. Pour tout entier r on peut extraire une famille $(f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_r})$ de rang r. La démonstration précédente prouve que la codimension de $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} f_{n_k}$ est égale à r.

Or $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker} f_n = K \subset \bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} f_{n_k}$ donc la codimension de K est supérieure ou égale à r.

Et cela pour tout entier r. Cette codimension est donc infinie. $\square$

III.A.3 On a $\varphi_{T_x(g)}(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) = (f*g)(x)$ donc $N_g = \displaystyle\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi_{T_x(g)}$. Or la démonstration de la question précédente est valable même si la famille de formes linéaires n'est pas dénombrable.

Ainsi la codimension de N_g est égale au rang des formes linéaires $\Big(\varphi_{T_x(g)}\Big)_{x\in\mathbb{R}}$ lequel est égal, d'après la question III.A.1), au rang de la famille de fonctions $\Big(T_x(g)\Big)_{x\in\mathbb{R}}$ c'est à dire à la dimension de V_g. $\square$

III.A.4 a) On a immédiatement $T_\alpha(g) = e^{-i\alpha\beta} g$ de sorte que la codimension de N_g est égale à 1. $\square$

b) • Soit $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$ avec $g_k(t) = e^{i\beta_k t}$ où les β_k sont n réels deux à deux distincts.

La famille $\left(g_k\right)_{k=1\dots n}$ est libre car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres $i\beta_k$ deux à deux distinstes de l'endomorphisme $f \longmapsto f'$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Notons $V_n = \operatorname{vect}(g_k)_{k=1\dots n}$ qui est donc de dimension n.
On a $T_\alpha(g)(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$ avec $\lambda_k = e^{-i\beta_k\alpha}$ de sorte que $V_g \subset V_n$ donc $\dim V_g \leqslant n$.
En conclusion partielle pour une telle fonction g la codimension de N_g est finie (au plus n).

• Supposons en outre désormais les β_k deux à deux distincts modulo 2π.
Pour $p \in \mathbb{N}$, les composantes de $T_p(g)$ sur la base $\left(g_k\right)_{k=1\dots n}$ de V_n sont $\left(a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p\right)$ avec $a_k = e^{-i\beta_k}$.
Donc le déterminant de la famille $\left(T_p(g)\right)_{p=0,\dots,n-1}$ sur cette base est le déterminant de Vandermonde $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ qui est non nul puisque les a_p sont deux à deux distincts car $\beta_i \neq \beta_j$ modulo 2π.
Cette famille est donc libre et comme elle est incluse dans V_g on a $\dim V_g \geqslant n$.
Finalement $\dim V_g = n$ donc N_g est de codimension n dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. □

III.B - *Hypothèse A.*

III.B.1) Soit $f \in N_g$ avec g vérifiant l'hypothèse A. On a par la question I.C.2) $f * g^{(k)} \equiv (f * g)^{(k)} \equiv 0$.
En particulier $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t) g^{(k)}(-t)\,\mathrm{d}\,t = f * g^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier k. Donc $N_g \subset L_g$ avec $L_g = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(\varphi_{g^{(k)}})$
Supposons en outre N_g de codimension finie. Il en va de même a fortiori de L_g vu l'inclusion ci-dessus.
Par la question III.A.2) la famille $\left(\varphi_{g^{(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est de rang fini donc également la famille $(g^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par la question III.A.1). Si on note p ce rang alors la famille $(g, g', \dots, g^{(p)})$ est liée ce qui se traduit bien par le fait que g satisfasse une équation différentielle linéaire à coefficients constants. □

III.B.2) Soit g vérifiant l'hypothèse A et telle que N_g soit de codimension finei. Alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants comme on vient de le voir.
Donc g est du type $g(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_r(t)e^{\lambda_r t}$ où $\left\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\right\}$ est l'ensemble des racines distinctes de l'équation caractéristique et où les P_k sont des polynômes.
Comme g est bornée tous les λ_k sont imaginaires purs et les polynômes P_k constants (classique par l'absurde).
Donc g est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t \longmapsto e^{i\beta t}$ et réciproquement une telle fonction satisfait bien l'hypothèse A et est telle que N_g soit de codimension finie par la première partie de la démonstration de la question III.A.4.b).
L'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace vect $\left(t \longmapsto e^{i\beta t}\right)_{\beta\in\mathbb{R}}$ □

III.C - *Cas général.*

III.C.1) Par la question III.A.3) on a $\dim V_g = \operatorname{rg}\left(T_\alpha(g)\right)_{\alpha\in\mathbb{R}} = n$.
Soit alors $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telle que $\left(T_{\alpha_1}(g), T_{\alpha_2}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g)\right)$ soit libre c'est à dire soit une base de V_g.
Pour tout réel α la fonction $T_\alpha(g) \in V_g$ donc se décompose sur cette base ce qui fournit le résultat demandé. □

III.C.2) a) Comme F est de dimension p, il en va de même de F^* et il suffit donc de démontrer que la famille $(e_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est génératrice dans l'espace F^* pour obtenir le résultat demandé.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $G \underset{\text{DEF}}{=} \operatorname{vect}(e_x)_{x\in\mathbb{R}}$ soit de dimension $r < p$.

Soit alors $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ telle que $\left(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_r}\right)$ soit une base de G.
Complétons la par $(\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_p)$ en une base de F^*.
Soit alors $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ la base anté-duale de cette base $\left(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_r}, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_p\right)$.
On a en particulier $e_{a_1}(f_p) = e_{a_2}(f_p) = \dots = e_{a_r}(f_p) = 0$ donc $e_x(f_p) = 0$ pour tout réel x puisque $\left(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_r}\right)$ est une base de G. Donc $f_p(x) = 0$ pour tout réel x donc $f_p \equiv 0$ ce qui est contradictoire avec $\varphi_p(f_p) = 1$. □

b) Notons que $\operatorname{Det}\left(f_i(a_j)\right) = \operatorname{Det}\left(e_{a_j}(f_i)\right)$
Envisageons l'application ϕ de F dans $\mathbb{C}^p$ définie par $\Phi(f) = \left(e_{a_1}(f), e_{a_2}(f), \dots, e_{a_p}(f)\right)$.
Par théorème de cours on a $\operatorname{rg}(\phi) = \operatorname{rg}\left(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_p}\right) = p$ donc ϕ est un isomorphisme de sorte que $\left(\phi(f_1), \phi(f_2), \dots, \phi(f_p)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ si et seulement $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F. □

III.C.3) La famille $\left(T_{\alpha_i}(g)\right)_{i=1,\dots,n}$ est une base de V_g. Par la question précédente il existe une famille $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ telle que la famille $\left(e_{a_i}\right)_{i=1,\dots,n}$ soit une base de V_g^*.

La question III.C.1) fournit alors le système aux inconnues $m_i(\alpha)$: $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} T_{\alpha_i}(g)(a_1)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_1) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} T_{\alpha_i}(g)(a_2)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} T_{\alpha_i}(g)(a_n)m_i(\alpha) = T_\alpha(g)(a_n) \end{cases}$

Le déterminant de ce système est la constante $\operatorname{Det}\Big(T_{\alpha_i}(g)(a_j)\Big)_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ non nulle par la question II.C.2.b)

Or les fonctions $\alpha \longmapsto T_\alpha(g)(a_j)$ i.e. les fonctions $\alpha \longmapsto g(a_j-\alpha)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et bornées puisque g l'est.

La résolution de ce système par les formules de Cramer montre alors que les fonctions $\alpha \longmapsto m_i(\alpha)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et bornées en tant que combinaisons linéaires des fonctions précédentes. □

III.C.4) On a $T_\alpha(h_r*g)(x) = (h_r*g)(x-\alpha) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_r(t)g(x-\alpha-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{\mathbb{R}} h_r(t)T_\alpha(g)(x-t)\,\mathrm{d}\,t = (h_r*T_\alpha(g))(x)$

donc $T_\alpha(h_r*g) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\alpha)h_r*T_{\alpha_i}(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(h_r*g)$ (1)

Ce qui prouve que V_{h_r*g} est de dimension au plus n. □

III.C.5) On a en (avec les notations précédentes) $T_{\alpha_i}(h_r*g)(a_j) = (h_r*g)(a_i-\alpha_j) \xrightarrow[r\to+\infty]{} g(a_j-\alpha_j) = T_{\alpha_i}(g)(a_j)$ d'après la question I.D.1).

Comme la fonction déterminant est continue il vient que $\operatorname{Det}\big(T_{\alpha_i}(h_r*g)(a_j)\big) \xrightarrow[r\to+\infty]{} \operatorname{Det}\big(T_{\alpha_i}(g)(a_j)\big) \neq 0$.

Donc pour r assez grand on a $\operatorname{Det}\big(T_{\alpha_i}(h_r*g)(a_j)\big) \neq 0$

Il en découle (par l'absurde) que la famille de fonctions $\big(T_{\alpha_i}(h_r*g)\big)_{i=1,\ldots,n}$ est libre donc est une base de V_{h_r*g} d'après (1).

Ainsi pour $r \geqslant r_0$ la dimension V_{h_r*g} est égale à celle de V_g. □

III.C.6) Comme 1 et -1 sont racines d'ordre r du polynôme $(1-t^2)^r$, ses dérivées s'annulent en 1 et -1 jusqu'à l'ordre $r-1$. Il en découle que h_r est de classe $\mathcal{C}^{(r-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

Ce qui prouve comme dans la question I.C.2) que h_r*g est de classe $\mathcal{C}^{(r-1)}(\mathbb{R})$

Comme $T_\alpha(h_r*g) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(h_r*g)$ on se retrouve exactement dans la situation de la question II.C.3) avec h_r*g à la place de la fonction g ce qui prouve que les fonctions m_i sont de classe $\mathcal{C}^{(r-1)}$ et bornées.

Or r est quelconque donc les fonctions m_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elles sont en outre bornées. □

III.C.7) Soit $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension finie.

D'après III.C.1) il vient $T_\alpha(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ c'est à dire

$g(x-\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\alpha)g(x-\alpha_i) \quad \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

En particulier pour $x=0$ on obtient $g(-\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(-\alpha_i)m_i(\alpha)$ ce qui prouve que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisque les m_i le sont.

En dérivant (1) par rapport à x (ce qui est bien licite puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$) il vient

$g^{(k)}(x-\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(\alpha)g^{(k)}(x-\alpha_i)$ donc $g^{(k)}(-\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} g^{(k)}(-\alpha_i)m_i(\alpha)$ pour tout entier k et tout réel α.

Ce qui prouve que toutes les dérivées de g sont bornées en tant que combinaisons linéaires des fonctions m_i qui sont bornées comme noté précédemment.

Ainsi si $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est telle que N_g soit de codimension finie alors g vérifie l'hypothèse A.

Il en découle d'après III.B) que l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace vect $\big(t \longmapsto e^{i\beta t}\big)_{\beta\in\mathbb{R}}$

——— *FIN* ———