

Partie I

I.A 1) La formule du binôme donne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

2) Pour $k \geq 1$, $k \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$.

Donc $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx$.

3) Pour $k \geq 2$, $k(k-1) \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$.

Donc $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2$.

4) $\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2-k}{n^2} + \frac{k}{n^2}$ donne avec 1), 2) et 3):

$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 - 2x^2 + \frac{n(n-1)x^2}{n^2} + \frac{x}{n} = \frac{x-x^2}{n}$.

I.B 1) a) $S_V(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in V} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Pour $k \in W$ on a $\sqrt{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| > 1$ donc $\sqrt{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| < n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2$.

Par suite, $\sqrt{n} S_W(x) < n \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x(1-x)$ par I.A.4

D'où $S_W(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) $f(x) = x(1-x)$ a un maximum égal à $\frac{1}{4}$ (obtenu pour $x = \frac{1}{2}$).

Donc $S_W(x) \leq \frac{1}{4\sqrt{n}}$ et $S(x) = S_V(x) + S_W(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}$

2) a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit: $\left|\sum_{k=0}^n a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=0}^n b_k^2}$.

b) Pour $a_k = \left|x - \frac{k}{n}\right| \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$ et $b_k = \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$ on obtient:

$S(x) \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ (en utilisant I.A.1 et I.A.4).

De $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ on déduit $S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

I.C 1) Pour $f(x) = x^2$ on calcule en écrivant $k^2 = k(k-1) + k$ et en utilisant les I.A.2 et I.A.3:

$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2} (n(n-1)x^2 + nx) = \frac{(n-1)x^2 + x}{n}$.

Par suite, $B_n(f)(x) - x^2 = \frac{x(1-x)}{n}$ d'où $\|B_n(f) - f\|_\infty = \frac{1}{4n}$ puisque $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, le maximum étant atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

2) Immédiat avec le I.A.1.

3) a) Si f est δ -lipschitzienne, $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \leq \delta|\frac{k}{n} - x|$ d'où $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \delta S(x) \leq \delta \frac{1}{2\sqrt{n}}$ avec le I.B.2.

C'est vérifié pour tout $x \in [0, 1]$ donc $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$.

b) Si f est de classe C^1 , elle est δ -lipschitzienne sur $[0, 1]$ par l'inégalité des accroissements finis (avec $\delta = \|f'\|_\infty$). On peut donc lui appliquer le a) et $c = \frac{\delta}{2}$.

c) L'inégalité des accroissements finis s'applique plus généralement à une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur un segment: f est donc δ -lipschitzienne sur $[0, 1]$ avec $\delta = \|f'\|_\infty$ et le résultat du b) est encore valable.

4) Soit $r > 0$ et un entier n tel que $\frac{c}{\sqrt{n}} < r$. Le polynôme $P = B_n(f)$ vérifie pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|P(x) - f(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \leq r \text{ donc } f(x) - r \leq P(x) \leq f(x) + r.$$

Partie II

II.A 1) $\frac{1}{1-x^2}$ est la somme de la série géométrique de raison x^2 et de premier terme 1, donc $b_n = 1$ si n est pair, 0 si n est impair.

2) En prenant $a_n = 2b_n$ on obtient $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$ qui vérifie bien $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ au voisinage de 1^- . Mais la suite (a_n) diverge puisque $a_{2n} = 2$ et $a_{2n+1} = 0$.

II.B 1) Par dérivation de $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ pour $t \in]-1, 1[$ on obtient $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}$ avec le même rayon de convergence égal à 1. La série diverge pour $t = 1$ et pour $t = -1$ puisque son terme général ne tend pas vers 0.

2) En posant $t = x^2$ et en changeant n en $n+1$ on obtient $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{2n}$ pour $x \in]-1, 1[$.

Par suite, $u_{2n} = n+1$ et $u_{2n+1} = 0$.

$\psi(x) = (1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(x^{2n} - x^{2n+1})$ pour $x \in]-1, 1[$. Par suite, $v_{2n} = n+1$ et $v_{2n+1} = -(n+1)$.

3) Puisque $v_{2n} + v_{2n+1} = 0$ on déduit $\tilde{v}_{2n+1} = 0$ et $\tilde{v}_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$.

4) En prenant $a_n = 4v_n$, on obtient $f(x) = \frac{4}{(1+x)^2(1-x)}$ qui vérifie bien $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ au voisinage de 1^- . Mais la suite (\tilde{a}_n) diverge puisque $\tilde{a}_{2n+1} = 0$ alors que \tilde{a}_{2n} tend vers 2.

II.C 1) Pour $x \in [0, 1[$ et $k \leq n$ on a $x^k \geq x^n$. De plus $a_n \geq 0$.

On en déduit: $f(x) \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k \geq \sum_{k=0}^n a_k x^n = A_n x^n$.

2) Par hypothèse, $(1-x)f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $1-\varepsilon \leq x < 1$ entraîne $(1-x)f(x) \leq 2$.

Comme $e^{-1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini on déduit qu'il existe $N > 0$ tel que $n \geq N$ entraîne $1-\varepsilon \leq e^{-1/n} < 1$ et donc $(1-e^{-1/n})f(e^{-1/n}) \leq 2$, d'où $f(e^{-1/n}) \leq \frac{2}{1-e^{-1/n}}$.

3) Pour $x = e^{-1/n}$ et $n \geq N$ on a $A_n e^{-1} \leq f(e^{-1/n}) \leq \frac{2}{1-e^{-1/n}}$ d'où:

$$\tilde{a}_n \leq \frac{2e}{(n+1)(1-e^{-1/n})} \leq \frac{2ee^{1/n}}{n(e^{1/n}-1)} \leq 2e^2 \text{ puisque } e^x - 1 \geq x \text{ et } n \geq 1.$$

La suite \tilde{a}_n est majorée pour $n \geq N$, donc aussi pour tout n .

II.D 1) a) $(1-x) \sum_{k=0}^n A_k x^k = \sum_{k=0}^n A_k x^k - \sum_{k=0}^n A_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^n A_k x^k - \sum_{k=1}^{n+1} A_{k-1} x^k = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) x^k - A_n x^{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k x^k - A_n x^{n+1}$. Comme pour $x \in]-1, 1[$, $|A_n x^{n+1}| \leq A_n |x|^{n+1} \leq (n+1)\mu |x|^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on déduit $(1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) $\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{k=0}^{N-1} A_k x^k + \sum_{k=N}^{+\infty} A_k x^k \leq \sum_{k=0}^{N-1} A_{N-1} x^k + \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)\mu x^k$ (puisque $x \geq 0$, que la suite A_k est croissante et que $A_k \leq (k+1)\mu$). Par suite, $\frac{f(x)}{1-x} \leq A_{N-1} \frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)x^k$.

c) On en déduit (toujours pour $x \in [0, 1[$): $f(x) \leq A_{N-1} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)(x^k - x^{k+1})$.

$$\sum_{k=N}^n (k+1)(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=N}^n (k+1)x^k - \sum_{k=N+1}^{n+1} kx^k = (N+1)x^N + \sum_{k=N+1}^n x^k - (n+1)x^{n+1}$$

qui tend vers $(N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}$ quand n tend vers l'infini.

$$\text{On a donc } f(x) \leq A_{N-1} + \mu \left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} \right).$$

2) a) Par hypothèse, $(1-x)f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1, donc $(1-e^{-x})f(e^{-x})$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $0 < x \leq \varepsilon$ entraîne $(1-e^{-x})f(e^{-x}) \geq \frac{1}{2}$.

D'autre part, $e^{-x} \geq 1-x$ entraîne pour $x > 0$: $\frac{1}{1-e^{-x}} \geq \frac{1}{x}$. On en déduit $f(e^{-x}) \geq \frac{1}{2x}$ pour $0 < x \leq \varepsilon$. En posant $x = \frac{\lambda}{N}$ on obtient $f(e^{-\frac{\lambda}{N}}) \geq \frac{N}{2\lambda}$ pour $N \geq N_0$.

b) En prenant $x = e^{-\frac{\lambda}{N}}$ dans II.D.1.c on obtient avec II.D.2.a (pour $N \geq N_0$):

$$A_{N-1} \geq \frac{N}{2\lambda} - \mu \left((N+1)e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda} e^{-\frac{\lambda}{N}}}{1-e^{-\frac{\lambda}{N}}} \right).$$

$$\text{Avec } \tilde{a}_{N-1} = \frac{A_{N-1}}{N} \text{ on obtient } \tilde{a}_{N-1} \geq \frac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda} \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{e^{-\frac{\lambda}{N}}}{N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}})} \right).$$

c) Avec $1-e^{-x} \sim x$ au voisinage de 0 on déduit que $N(1-e^{-\frac{\lambda}{N}}) \sim \lambda$ quand N tend vers l'infini. Par suite le membre de droite du II.D.2.b a pour limite (quand N tend vers l'infini): $\frac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{2\lambda} (1 - 2\mu e^{-\lambda} (\lambda + 1)) = 2\nu$.

d) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} (\lambda + 1) = 0$ entraîne que $\nu > 0$ pour λ assez grand.

3) Pour un tel λ on obtient $\tilde{a}_n \geq \nu > 0$ pour $n \geq N_0 + 1$.

- II.E 1) $\int_0^1 g^+(t)dt = \int_0^{e^{-1}-\varepsilon} 0dt + \frac{1}{2}e\varepsilon + \int_{e^{-1}}^1 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}e\varepsilon + 1.$
 $\int_0^1 g^-(t)dt = \int_0^{e^{-1}} 0dt + \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-1} + \varepsilon} \varepsilon + \int_{e^{-1}+\varepsilon}^1 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{e^{-1} + \varepsilon} - \ln(e^{-1} + \varepsilon).$
- 2) Pour $P(x) = x^k$: $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} (1-x^{k+1})f(x^{k+1})$. Comme $\frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^k}$ tend vers $\frac{1}{k+1}$ quand x tend vers 1 on déduit avec $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = 1$ que $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n)$ tend vers $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 P(t)dt$ quand x tend vers 1.
Par linéarité de la limite et de l'intégrale le résultat s'étend à tout polynôme.
- 3) La fonction $g^- - \frac{\varepsilon}{2}$ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$. On peut donc lui appliquer le résultat du I.C.4 pour $r = \frac{\varepsilon}{2}$: il existe un polynôme P tel que $g^-(x) - \varepsilon \leq P(x) \leq g^-(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
De même la fonction $g^+ + \frac{\varepsilon}{2}$ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer le résultat du I.C.4 pour $r = \frac{\varepsilon}{2}$: il existe un polynôme Q tel que $g^+(x) \leq Q(x) \leq g^+(x) + \varepsilon$ pour $x \in [0, 1]$.
Comme $g^-(x) \leq g(x) \leq g^+(x)$ on a bien obtenu $g^-(x) - \varepsilon \leq P(x) \leq g(x) \leq Q(x) \leq g^+(x) + \varepsilon$ pour $x \in [0, 1]$.
- 4) Puisque $x_N = e^{-1/N}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, on déduit du II.E.2 que
 $(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geq \int_0^1 P(t)dt - \varepsilon$ pour $N \geq A$.
De même, $(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leq \int_0^1 Q(t)dt + \varepsilon$ pour $N \geq B$.
Les deux inégalités sont donc vérifiées pour $N \geq N_1 = \max(A, B)$.
- 5) $x_N^n = e^{-\frac{n}{N}} \geq e^{-1} \Leftrightarrow n \leq N$. Par suite $x_N^n g(x_N^n) = 0$ si $n > N$ et 1 si $n \leq N$, donc
 $(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n g(x_N^n) = (1-x_N)A_N$. Puisque $a_n x_N^n \geq 0$ on déduit du II.E.3:
 $(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \leq (1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n g(x_N^n) = (1-x_N)A_N \leq (1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n)$.
Puis avec le II.E.4: $\int_0^1 P(t)dt - \varepsilon \leq (1-x_N)A_N \leq \int_0^1 Q(t)dt + \varepsilon$ pour $N \geq N_1$.
Puis avec le II.E.3: $\int_0^1 g^-(t)dt - 2\varepsilon \leq (1-x_N)A_N \leq \int_0^1 g^+(t)dt + 2\varepsilon$.
 $\int_0^1 g^+(t)dt = \frac{1}{2}e\varepsilon + 1 \leq 1 + 2\varepsilon$ donne $(1-x_N)A_N \leq 1 + 4\varepsilon \leq 1 + 5\varepsilon$.
 $\int_0^1 g^-(t)dt = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{e^{-1} + \varepsilon} - \ln(e^{-1} + \varepsilon) \geq -\ln(e^{-1} + \varepsilon) = 1 - \ln(1 + e\varepsilon) \geq 1 - e\varepsilon$ en utilisant
 $\ln(1+x) \leq x$. On obtient $\int_0^1 g^-(t)dt \geq 1 - 3\varepsilon$ d'où $(1-x_N)A_N \geq 1 - 5\varepsilon$.
- 6) On a donc démontré que $\lim_{N \rightarrow +\infty} (1 - e^{-1/N})A_N = 1$.
Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{a}_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{A_N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{N+1} (1 - e^{-1/N})A_N \frac{1}{N(1 - e^{-1/N})} = 1$.