Inégalité de Prékopa et Leindler.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1. Si $a=0$ ou $b=0$, l'inégalité à démontrer est évidente.
Sinon, on a d'abord

$$\lambda a+(1-\lambda)b \geqslant a^{\lambda}b^{1-\lambda} \Leftrightarrow \ln(\lambda a+(1-\lambda)b) \geqslant \lambda\ln(a)+(1-\lambda)\ln(b).$$

Cependant la fonction ln a pour dérivée $x>0 \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, fonction décroissante, et donc ln est une fonction concave. On a donc $\ln(\lambda a+(1-\lambda)b) \geqslant \lambda\ln(a)+(1-\lambda)\ln(b)$, ce qui démontre l'inégalité proposée.
Pour la deuxième inégallité, on procède de même. Il suffit de démontrer que la fonction $f_u : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^u \in \mathbb{R}$ est convexe. Or f_u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x>0, f_u''(x)=u(u-1)x^{u-2}>0.$$

L'inégalité proposée s'en déduit alors immédiatement.

2. Fixons $b \geqslant 0$ et étudions la fonction $f : a \in \mathbb{R}_+ \mapsto (a+b)^{\lambda}-(a^{\lambda}+b^{\lambda}) \in \mathbb{R}$. f est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall a>0, f'(a)=\lambda((a+b)^{\lambda-1}-a^{\lambda-1}).$$

Puisque $\lambda-1<0$, la fonction $x>0 \mapsto x^{\lambda-1} \in \mathbb{R}$ est décroissante et donc pour tout $a>0$, $f'(a) \leqslant 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $f(0)=0$, on a bien

$$(a+b)^{\lambda} \leqslant a^{\lambda}+b^{\lambda}.$$

3. Soit $\varphi : u \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u} f(x)dx = \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \frac{1}{F}\int_{0}^{u} f(x)dx$.
f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi' = \frac{1}{F}f > 0$.
φ est donc une application strictement croissante avec de plus

$$\lim_{u\to-\infty}\varphi(u)=\frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\lim_{u\to-\infty}\int_{0}^{u} f(x)dx\right)=\frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^{0} f(x)dx-\int_{-\infty}^{0} f(x)dx\right)=0,$$

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u)=\frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\lim_{u\to+\infty}\int_{0}^{u} f(x)dx\right)=\frac{1}{F}\left(\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx\right)=1.$$

φ établit donc une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.
Il suffit alors de poser $u=\varphi^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$. En effet, $\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)dx = \varphi(u(t)) = t$ pour tout $t \in]0,1[$.

La preuve de l'existence de la fonction v est absolument identique (en raisonnant à partir de $\psi : v \mapsto \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v} g(x)dx$).

4. La dérivée $\varphi' = \frac{1}{F}f$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $u=\varphi^{-1}$ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall t \in]0,1[,\ u'(t)=\frac{1}{\varphi'(u(t))}=\frac{F}{f(u(t))}>0.$$

On procède identiquement pour calculer v'. On obtient alors

$$\forall t \in]0,1[,\ v'(t)=\frac{1}{\psi'(v(t))}=\frac{G}{g(v(t))}>0.$$

5. Les fonctions u et v sont donc strictement croissantes sur $]0,1[$.
De plus, puisque $\lim\limits_{-\infty}\varphi=0$, $\lim\limits_{+\infty}\varphi=1$ et que $u=\varphi^{-1}$,

$$\lim_{t\to0}u(t)=-\infty,\ \lim_{t\to1}u(t)=+\infty.$$

De manière identique, on a

$$\lim_{t\to0}v(t)=-\infty,\ \lim_{t\to1}v(t)=+\infty.$$

Puisque $w=\lambda u+(1-\lambda)v$, w est d'abord une fonction strictement croissante de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$\lim_{t\to0}w(t)=-\infty,\ \lim_{t\to1}w(t)=+\infty$$

ce qui montre que w est une bijection strictement croissante de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
On a également $w' = \lambda u' + (1-\lambda)v' > 0$ donc w définit un changement de variable admissible de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
On peut alors écrire, en utilisant ce changement de variables et l'hypothèse sur f, g, h,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw = \int_0^1 h(w(t))w'(t)dt \geqslant \int_0^1 f(u(t))^\lambda g(v(t))^{1-\lambda} w'(t)dt.$$

D'autre part, d'après l'inégalité de la question 1, on a pour tout $t \in]0,1[$,

$$w'(t) = \lambda u'(t) + (1-\lambda)v'(t) \geqslant u'(t)^\lambda v'(t)^{1-\lambda} = \frac{F^\lambda}{f(u(t))^\lambda} \frac{G^{1-\lambda}}{g(v(t))^{1-\lambda}}$$

d'après l'expression de u' et v' obtenue à la question précédente.
En réinjectant cette inégalité dans l'intégrale, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)dw \geqslant \int_0^1 F^\lambda G^{1-\lambda} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx\right)^{1-\lambda},$$

ce qui démontre l'inégalité "P-L".

6. On a d'abord, puisque $t \mapsto e^{-t}$ est un fonction strictement décroissante,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda} \Leftrightarrow (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leqslant \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2.$$

L'inégalité proposée résulte alors de la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$ (car cette fonction est deux fois dérivable et de dérivée seconde égale à $2 > 0$).

7. Supposons d'abord $|y| \leqslant M$.
Si $|z| \leqslant \hat{M}$, il n'y a rien à démontrer puisque $\Psi(x) \leqslant 1$.
Sinon $|z| > \hat{M}$ et alors, d'après la décroissance stricte de $t \mapsto e^{-t}$,

$$\Psi(x) \leqslant \Psi_M(z) \Leftrightarrow \Theta^2 x^2 \geqslant (|z| - M)^2 \Leftrightarrow \Theta|x| \geqslant |z| - M \Leftrightarrow \Theta|x| + M \geqslant |z|.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire et la définition de $\Theta \leqslant 1$,

$$|z| \leqslant \Theta(|x| + |y|) \leqslant \Theta(|x| + M) \leqslant \Theta|x| + M.$$

L'inégalité proposée est donc démontrée.
En échangeant les rôles de x et y ainsi que ceux de λ et de $1-\lambda$, on en déduit que $\Psi(y) \leqslant \Psi_M(z)$ pour $|x| \leqslant M$.

8. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.
D'après la question 2, on a d'abord

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} = (f(x) + \epsilon\Psi(x))^\lambda (g(y) + \epsilon\Psi(y))^{1-\lambda} \leqslant (f(x)^\lambda + \epsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda)(g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda})$$

En développant et puisque $\epsilon^\lambda \leqslant \epsilon^\Lambda, \epsilon^{1-\lambda} \leqslant \epsilon^\Lambda$ (car $\epsilon \in]0,1[$), on obtient donc

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \epsilon^\Lambda (\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^\lambda f(x)^{1-\lambda}) + \epsilon \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

D'après la question 6, on a ensuite $\Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda} \leqslant \Psi(z)$ et par hypothèse sur f, g, h $f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant h(z)$. On a donc

$$f_\epsilon(x)^\lambda g_\epsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant h(z) + \epsilon^\Lambda (\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} + \Psi(y)^\lambda g(x)^{1-\lambda}) + \epsilon \Psi(z).$$

De plus, si $|y| > M$, on a évidemment $\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant \|g\|_\infty^{1-\lambda} (\Psi_M(z))^\Lambda$
Si maintenant $|y| \leqslant M$, on a d'après la question précédente $\Psi(x) \leqslant \Psi_M(z)$ et donc

$$\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leqslant \|g\|_\infty^{1-\lambda} (\Psi_M(z))^{1-\lambda} \leqslant \|g\|_\infty^{1-\lambda} (\Psi_M(z))^\Lambda$$

puisque $\Psi_M(z) \in [0,1]$.
De la même manière, on montre que $\Psi(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda \leqslant \|f\|_\infty^\lambda (\Psi_M(z))^\Lambda$.
L'inégalité voulue est donc bien démontrée.

9. On applique la question 5 avec les fonctions f_ϵ, g_ϵ et $h_\epsilon = h + \epsilon^\Lambda (\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}) \Psi_M^\Lambda + \epsilon \Psi$.
Puisque f_ϵ et g_ϵ sont strictement positives et Ψ, Ψ_M^Λ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (car négligeables devant $x \mapsto x^{-2}$ en l'infini), on a ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x)dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x)dx\right)^{1-\lambda}. \tag{1}$$

De plus, lorsque $\epsilon \to 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

D'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx + \epsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda}) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_M(x)^\Lambda dx$$

et, puisque $\Lambda > 0$, on a aussi

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

En passant à la limite dans (1), on obtient bien l'inégalité "P-L".

10. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.
Si x et y appartiennent à l'intervalle $[-n-1, n+1]$, l'inégalité est bien vérifiée (puisque $\chi_n(x) \leqslant 1$ et $\chi_n(y) \leqslant 1$ et qu'alors $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) = 1$).
Sinon, on a en particulier $\chi_n(x) = 0$ ou $\chi_n(y) = 0$ et l'inégalité est immédiatement vérifiée.

11. Posons $f_n = f\chi_n, g_n = g\chi_n$ et $h_{n+1} = g\chi_{n+1}$. Ces fonctions sont nulles en dehors de l'intervalle $[-n-2, n+2]$
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]0, 1[$.
On a d'abord $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$ et $\chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda}$ d'après la question précédente.
En multipliant ces inégalités entre nombres positifs, on a donc

$$h_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f_n(x)^\lambda g_n(y)^{1-\lambda}.$$

On applique maintenant la question 9 qui nous fournit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(x)dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx\right)^{1-\lambda}. \tag{2}$$

Cherchons à appliquer le théorème de convergence dominée.
On a d'abord $\chi_n(x) \to 1$ pour tout x réel. Ainsi $f_n(x) \to f(x), g_n(x) \to g(x), h_{n+1}(x) \to h(x)$ quelque soit x réel.
D'autre part, puisque $0 \leqslant \chi_n \leqslant 1$, on a $|f_n| \leqslant |f|, |g_n| \leqslant |g|$ et $|h_{n+1}| \leqslant |h|$.
Puisque $|f|, |g|$ et $|h|$ sont des fonctions intégrables, les hypothèses d'application du théorème sont vérifiées donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \quad \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

En passant à la limite dans l'inégalité (2), on obtient bien l'inégalité "P-L".

Partie II. Fonctions log-concaves.

12. L'application $b : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto < S(x); y >$ est bilinéaire donc continue. Par composition d'applications continues, $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp(- < S(x); x >)$ est bien continue.
D'autre part, on a pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, puisque $t \mapsto e^{-t}$ est strictement décroissante,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda} \Leftrightarrow q(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y)$$

où l'on a posé q la forme quadratique associée à b.
Or puisque b est symétrique

$$q(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda(1-\lambda)b(x, y) + (1-\lambda)^2 q(y)$$

et b étant de plus positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$b(x, y) \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \leq \frac{1}{2}(q(x) + q(y))$$

puisque pour tous a, b réels $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. On en déduit finalement (car $\lambda(1-\lambda) \geq 0$)

$$q(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant (\lambda^2 + \lambda(1-\lambda))q(x) + ((1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda))q(y) = \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y).$$

La fonction f est bien log-concave.

Partie III. Quelques applications géométriques.

13. Fixons pour le moment $x_{0,}y_0$ deux réels et posons $z_0 = \lambda x_0 + (1-\lambda)y_0$.
Les fonctions $f_0 : x \mapsto f(x_0, x)$, $g_0 : y \mapsto g(y_0, y)$, $h_0 : z \mapsto h(z_0, z)$ sont continues, positives, intégrables (car nulles sur $\mathbb{R}/[-M, M]$).
La question 11 nous montre alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_0(x)dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)dx\right)^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(x)dx\right)^{1-\lambda}$$

puisque d'après l'hypothèse sur f, g, h

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, h_0(\lambda x + (1-\lambda)y_0) \geqslant f_0(x)^{\lambda} g_0(y)^{1-\lambda}.$$

Posons alors $F(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0, x)dx$, $G(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_0, x)dx$ et $H(z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z_0, x)dx$.
Les fonctions F, G et H sont évidemment positives et intégrables (elles sont aussi nulles sur $\mathbb{R}/[-M, M]$). Elles sont de plus continues par théorème général sur les intégrales à paramètres.
En effet,

$$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x_0, x)| \leq \begin{cases} \max_{[-M,M]^2} |f| & \text{si } (x_0, x) \in [-M, M]^2, \\ 0 & \text{sinon }, \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \mapsto f(x_0, x) \in \mathbb{R}$ est continue. Ainsi F est continue et par un raisonnement analogue, G et H le sont également.
On vient donc démontrer que F, G et H sont des fonctions justiciables de la question 11. On en déduit donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)dx \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx\right)^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx\right)^{1-\lambda}$$

ce qui, au vu de la définition des intégrales doubles, fournit l'inégalité proposée.

14. L'ensemble $C(\mathcal{A})$ est non vide ($0 \in C(\mathcal{A})$) et de plus, quelque soit $f \in C(\mathcal{A})$,

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = \int\int_A f(x, y)dxdy \leqslant \int\int_A dxdy < +\infty$$

puisque $\mathcal{A}$ est bornée. La borne supérieure du texte est donc bien définie.
De plus, puisque $\mathcal{A}$ est un ouvert non vide, il existe $X_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que si $\|X - X_0\| \leqslant \varepsilon$ alors $X \in \mathcal{A}$.
Soit alors la fonction

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|X - X_0\| \geqslant \varepsilon, \\ \varepsilon - ||X - X_0\| & \text{si } \|X - X_0\| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

f est une fonction continue (comme composée de fonctions continues) à valeurs dans $[0, 1]$. On a donc $f \in C(\mathcal{A})$ et

$$V(\mathcal{A}) \geqslant \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy > 0$$

car f est positive et n'est pas identiquement nulle.

15. D'après la question précédente, on a d'abord

$$V(D(O, R)) \leqslant \int\int_{D(O,R)} dxdy = \pi R^2. \tag{3}$$

Soit de plus $\varepsilon \in]0, R[$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vaut 1 sur $[-(R-\varepsilon), R-\varepsilon]$, 0 sur $]-\infty, -(R-\varepsilon)] \cup [R-\varepsilon, +\infty[$ et qui est affine sur $[R-\varepsilon, R]$ et $[-R, -(R-\varepsilon)]$.
En posant $f(X) = \varphi(\|X\|)$, on définit donc un élément de $C(\mathcal{A})$ valant 1 sur $D(O, R-\varepsilon)$ et donc

$$V(D(O, R)) \geqslant \int\int_{D(O,R-\varepsilon)} dxdy = \pi(R-\varepsilon)^2. \tag{4}$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient, d'après (3) et (4), $V(D(O, R)) = \pi R^2$.
On procède de même pour calculer $V(]a, b[\times]c, d[)$. On a d'abord

$$V(]a, b[\times]c, d[) \leqslant \int\int_{]a,b[\times]c,d[} dxdy = (b-a)(d-c). \tag{5}$$

Soit $\varepsilon \in]0, \min(b-a, d-c)[$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vaut 1 sur $[a+\varepsilon/2, b-\varepsilon/2]$, 0 sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ et qui est affine sur $[a, a+\varepsilon/2]$ et $[b-\varepsilon/2, b]$.

Soit également $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vaut 1 sur $[c+\varepsilon/2, d-\varepsilon/2]$, 0 sur $]-\infty, c[\cup]d, +\infty[$ et qui est affine sur $[c, c+\varepsilon/2]$ et $[d-\varepsilon/2, d]$.

En posant $f(x,y) = \phi(x)\varphi(y)$, on définit donc un élément de $C(\mathcal{A})$ valant 1 sur $[a+\varepsilon/2, b-\varepsilon/2]\times[c+\varepsilon/2, d-\varepsilon/2]$ et donc

$$V(]a,b[\times]c,d[) \geqslant \int\int_{[a+\varepsilon/2,b-\varepsilon/2]\times[c+\varepsilon/2,d-\varepsilon/2]} dxdy = (b-a-\varepsilon)(d-c-\varepsilon). \tag{6}$$

Faisant tendre ε vers 0, on obtient, d'après (5) et (6), $V(]a,b[\times]c,d[) = (b-a)(d-c)$.

Dans les deux cas on trouve l'aire des parties proposées.

16. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des ouverts bornés.
    - Il existe $R > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{A}$, $\|X\| \leqslant R$ et pour tout $Y \in \mathcal{B}$, $\|Y\| \leqslant R$.
      Si $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ alors il existe $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$ tels que $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$ et l'inégalité triangulaire nous fournit alors $\|Z\| \leqslant R$. $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est donc borné.
    - Soit $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$; il existe $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{B}$ tels que $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$.
      $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant ouverts, il existe $r > 0$ tel que $D(X,r) \subset \mathcal{A}$ et $D(Y,r) \subset \mathcal{B}$. On a de plus $D(Z,r) = \lambda D(X,r) + (1-\lambda)D(Y,r) \subset \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ et donc $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ est ouvert.

    Soit $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$.

    La fonction h définie par la formule de l'énoncé est une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$. De plus, h est nulle en dehors de $\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$. En effet, si $h(Z) > 0$ alors il existe X, Y tels que $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$ et $f(X) > 0, g(Y) > 0$ ce qui implique $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}$ puis $Z \in \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$.

    En d'autres termes, on a donc $h \in C(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$. De plus, f, g, h sont justiciables de la question 13 car

    $$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqslant f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}$$

    et ainsi

    $$V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant \int\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy \geqslant \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy\right)^\lambda \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy\right)^{1-\lambda}.$$

    En passant au supremum sur $f \in C(\mathcal{A})$ puis sur $g \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ dans cette inégalité, on en déduit bien

    $$V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda}.$$

17. Soit $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$. On note toujours $h \in C(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$ la fonction du texte.

    On a d'abord

    $$\gamma(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}) \geqslant \int\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)u(x,y)dxdy$$

    puis, puisque $h(\lambda X+(1-\lambda)Y)u(\lambda X+(1-\lambda)Y) \geqslant (f(X)u(X))^\lambda (g(Y)u(Y))^{1-\lambda}$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$, la question 13 nous fournit

    $$\gamma(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B} \geqslant \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)u(x,y)dxdy\right)^\lambda \left(\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)u(x,y)dxdy\right)^{1-\lambda}.$$

    En passant au supremum sur $f \in C(\mathcal{A})$ puis sur $g \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ dans cette inégalité, on obtient l'inégalité voulue.