Concours Communs Polytechniques - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II
Filière MP

Arithmétique, étude de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \longmapsto AM - MA$.

Corrigé par M.TARQI-htpp :// alkendy.x10.mx

EXERCICE :

1. On a $3^1 \equiv 3[11]$, $3^2 \equiv 9[11]$, $3^3 \equiv 5[11]$, $3^4 \equiv 4[11]$ et $3^5 \equiv 1[11]$, donc $p = 5$.

2. On a $2012 = 5 \times 42 + 2$, donc :

$$\begin{array}{rcl} 3^{n+212} - 9 \times 5^{2n} & \equiv & 3^n \times 3^{5\times 42+2} - 9 \times 5^{2n} \\ & \equiv & 3^n \times 3^2 - 9 \times 5^{2n} \\ & \equiv & 9 \times 3^n - 9 \times (5^2)^n \\ & \equiv & 9 \times 3^n - 9 \times 3^n \equiv 0[11]. \end{array}$$

   Donc $3^{n+212} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

PROBLÈME :

PARTI I. ÉTUDE DU CAS $n = 2$

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et M, N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_A(\lambda M + \mu N) & = & A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ & = & \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) \\ & = & \lambda\varphi_A(M) + \mu\varphi_A(N). \end{array}$$

   Donc φ_A est bien linéaire, de plus, $\varphi(I_2) = \varphi_A(A) = 0$, c'est à dire$I_2$ et A sont dans $\ker \varphi_A$.
2. Les calculs montrent que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A(E_{11}) = cE_{21} - bE_{12} \\ \varphi_A(E_{12}) = -cE_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22} \\ \varphi_A(E_{21}) = bE_{11} + (d-a)E_{21} - bE_{22} \\ \varphi_A(E_{22}) = bE_{12} - cE_{21} \end{array} \right.$$

   D'où la matrice de φ_A dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme caractéristique de φ_A est donné par :

$$\chi_{\varphi_A}(X) = X^2(X^2 - (d-a)^2 - 4bc).$$

4. Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, on aura trois valeurs propres, 0 valeur propre double et les autres sont simples et comme $\mathrm{Vect}(I_2, A) \subset E_0$ (E_0 le sous-espace propre associé à 0) et $A \neq \lambda I_2$, alors $\dim E_0 = 2$ est donc φ_A est diagonalisable.
   Inversement, si φ_A est digonalisable, alors nécessairement le polynôme caractéristique de φ_A admettra des racines réelles autres que 0, sinon $A = 0$, et donc $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
5. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - (a+d)X + ad - bc$. La matrice A étant différente de λI_2, donc A est diagonalisable si et seulement si l'equation $X^2 - (a+d)X + ad - bc = 0$ admet deux racines réelles et distinctes, c'est à dire si et seulement si $(a+d)^2 - 4(ad - bc) = (d-a)^2 + 4bc > 0$ et ceci est équivalent à dire que φ_A est diagonalisable (la question 5.).

Partie II. Étude du cas général

6. (a) Écrivons D sous la forme $D = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l E_{ll}$, donc

$$\begin{aligned} DE_{ij} - E_{ij}D &= \sum_{l=1}^{n} \lambda_l E_{ll} E_{ij} - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l E_{ij} E_{ll} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \delta_{li} E_{lj} - \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \delta_{jl} E_{il} \\ &= \lambda_i E_{ij} - \lambda_j E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}. \end{aligned}$$

   (b) On a, pour tout couple (i, j) :

$$\begin{aligned} \varphi_A(B_{ij}) &= AB_{ij} - B_{ij}A \\ &= APE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}P^{-1}A \\ &= PDE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}DP^{-1} \\ &= P(DE_{ij} - E_{ij}D)P^{-1} = (\lambda - \lambda_j)B_{ij}. \end{aligned}$$

   (c) Les B_{ij} forment une famille de n^2 vecteurs propres de φ_A, de plus, la famille $(B_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est libre, en effet si $\sum_{1\le i,j\le n} \alpha_{ij} B_{ij} = 0$, alors nécessairement $\sum_{1\le i,j\le n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0$, et comme la famille $(E_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est libre (base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$), il est de même pour la famille $(B_{ij})_{1\le i,j\le n}$, en conclusion φ_A est diagonalisable.
7. (a) i. Le polynôme caractéristique de φ_A est invariant par la passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, donc les valeurs de φ_A, considéré comme un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, sont les mêmes que de φ_A, considéré comme un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire elles sont réelles.
   ii. A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique, et comme les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique, alors A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.
   iii. On a $\varphi_A(X^tY) = AX^tY - X^tYA = zX^tY - X^t({}^tAY) = zX^tY - X\overline{z}^tY = (z - \overline{z})X^tY$, et comme $X^tY \neq 0$, $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

(b) On sait que 0 est une valeur propre de φ_A, car par exemple $\varphi_A(A) = 0$, donc il existe $z \in \mathbb{C}$, valeur propre de A, tel que $z - \overline{z} = 0$, donc z est un réel.

(c) On a, pour tout (i,j), $\varphi_A(P_{ij})X = \lambda_{ij}P_{ij}X$ ou encore $AP_{ij}X - P_{ij}AX = \lambda_{ij}P_{ij}X$, donc $AP_{ij}X = (\lambda + \lambda_{ij})P_{ij}X$, il suffit de prendre $\mu_{ij} = \lambda + \lambda_{ij}$.

(d) Considérons l'application linéaire suivante :

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MX \end{array}$$

Montrons que cette application est surjective, en effet, considérons un $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- Si $Y = 0$, on prend $M = 0$;
- Si $Y \neq 0$, on complète X et Y pour avoir deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui commencent par X et Y, et soit v l'application linéaire qui transforme $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$ et M la matrice canoniquement associée à v, donc on a bien $Y = MX$.

La famille $(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc son image par Ψ est génératrice de $\operatorname{Im}\Psi = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car Ψ est surjective, ainsi $(P_{i,j}X)_{1\leq i,j\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de A, de la quelle on peut extraire une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.

PARTIE III : ÉTUDE DES VECTEURS PROPRES DE φ_A ASSOCIÉS À LA VALEUR PROPRE 0

8. Il est clair que $\varphi_A(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\operatorname{Vect}(I, A, ..., A^{m-1}) \subset \mathbb{R}[A]$. Soit maintenant P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, alors il existe Q et R des polynômes tels que :

$$P = Q\pi_A + R$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < m$. Donc $P(A) = R(A) \in \operatorname{Vect}(I, A, ..., A^{m-1})$, d'où l'égalité.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i = 0$, si l'un des α_i est non nul, le polynôme $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i X^i$ contredit la définition du polynôme minimal de A, donc nécessairement $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0$ et donc la famille $(I, A, ..., A^{m-1})$ est base de $\mathbb{R}[A]$

9. Il est clair que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi_A(P(A)) = 0$ et donc $\mathbb{R}[A] \subset \ker(\varphi_A)$ et par conséquent $\dim\ker(\varphi_A) \geq \dim\mathbb{R}[A] = m$.

10. *Un cas d'égalité*

(a) Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3$ des scalaires tels que $(*)$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}(y) = 0$, si on applique u^{n-1}, l'égalité $(*)$ devient $\alpha_0 u^{n-1}(y) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$, on applique une autre fois u^{n-2} à $(*)$ on obtient $\alpha_1 = 0$ et par le même raisonnement, on appliquant à chaque fois u^{n-i} $(0 \leq i \leq n-1)$, on obtient $\alpha_i = 0$ pour tout i. La famille est donc bien libre.

(b) Posons $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-1}$. Puisque $(y, u(y), ..., u^{n-1}(y))$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit donc de montrer que

$$v(u^i(y)) = w(u^i(y)),$$

pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$.

On a déjà $v(y) = w(y)$. Comme v et w commutent avec u ($B \in \ker(\varphi_A)$, alors ils commutent avec tous les u^i, $i \in \mathbb{N}$. Donc

$$v(u^i(y)) = u^i(v(y)) = u^i(w(y)) = w(u^i(y)),$$

et par conséquent $v = w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-1}$.

(c) Il est evident que $\mathrm{Vect}\{I_n, A, ..., A^{n-1}\} \subset \ker(\varphi_A)$. Soit $B \in \ker(\varphi_A)$ et v l'ensomorphisme canoniquement associé à B, alors il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ (les comoposantes de $v(y)$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ tels que $v(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}(y))$, et donc, d'après la question 10.(b), $v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{n-i}$.

Matriciellement, $B = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^{n-i} \in \mathrm{Vect}\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$ et par conséquent :

$$\ker \varphi_A = \mathrm{Vect}\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}.$$

11. *Cas où u est diagonalisable*

(a) $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si u et v commutent. Soit $1 \leq k \leq p$ et $x \in E_u(\lambda_k)$, alors $u(x) = \lambda_k x$ et donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x),$$

donc $v(x) \in E_u(\lambda_k)$, d'où $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$.

Inversement, puisque u est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} E_u(\lambda_k)$. Pour montrer que $uv = vu$, il suffit de montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, $\forall x \in E_u(\lambda_k),\ \ uv(x) = vu(x)$. On a

$$\forall x \in E_u(\lambda_k),\ \ vu(x) = v(\lambda_k x)\lambda_k v(x) = uv(x).$$

D'où le résultat.

(b) Soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, ..., \mathscr{B}_p)$ une base adaptée à la décomposition précédente, la matrice de v est donc de la forme :

$$M(v, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} B_1 & O & \cdots & O \\ O & B_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & B_p \end{pmatrix}$$

avec $B_k = Mat(v\mid_{E_u(\lambda_k)}, \mathscr{B}_k)$.

Inversement, toutes les matrices de type sont dans $\ker(\varphi_A)$ (d'après l'équivalence démontrée dans la question 11.(a)).

(c) Soit $B \in \ker(\varphi_A)$. Notons u_k (resp. v_k) l'endomorphisme de $E_u(\lambda_k)$ induit par u (resp. v). D'après ce qui précède $vu = vu$ si et seulement si pour tout $k = 1, 2, ..., p$, $v_k u_k = u_k v_k$.

Mais $u_k = \lambda_k \mathrm{I}_{E_u(\lambda_k)}$, alors tout élément de $\in \mathscr{L}(E_u(\lambda_k))$ commute avec u_k, soit donc φ l'application de $\ker(\varphi_A)$ dans $\prod_{k=1}^{p} \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi(B) = (B_1, B_2, ..., B_p)$$

On vérifie facilement que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc

$$\dim \ker(\varphi_A) = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2.$$

(d)
- Si $p=7$, toutes les valeurs propres sont simples, donc $\sum_{k=1}^{p} m_k^2 = \sum_{k=1}^{7} 1^2 = 7$.
- Si $p=6$, 5 valeurs propres simples et 1 valeur propre double, donc $\sum_{k=1}^{6} m_k^2 = 5\times 1^2 + 2^2 = 9$.
- Si $p=5$, 3 valeurs propres simples et 2 valeurs propres doubles, donc $\sum_{k=1}^{5} m_k^2 = 3\times 1^2 + 2\times 2^2 = 11$.
- Si $p=4$, 1 valeur propre simples et 3 valeurs propres doubles, donc $\sum_{k=1}^{4} m_k^2 = 1\times 1^2 + 3\times 2^2 = 13$.
- Si $p=3$, 1 valeur propre simple et 2 valeurs propres triples, donc $\sum_{k=1}^{3} m_k^2 = 1\times 1^2 + 2\times 3^2 = 19$.
- Si $p=2$, 1 valeur propre simple et 1 valeur propre d'ordre 5, donc $\sum_{k=1}^{2} m_k^2 = 1\times 1^2 + 1\times 5^2 = 26$.
- Si $p=1$, 1 valeur propre 7, donc $\sum_{k=1}^{1} m_k^2 = 1\times 7^2 = 49$, dans ce cas $\ker(\varphi_A) = \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$.

PARTIE IV : ÉTUDE DES VECTEURS DE φ_A ASSOCIÉS À UNE VALEUR PROPRE NON NULLE

12. On a : $\varphi_A(I_n) = 0$ et puisque B est vecteur propre de φ_A associé à α, $\varphi_A(B) = AB - BA = \alpha B$, donc la propriété $p(k)$: $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$ est vraie pour $k=0$ et $k=1$, supposons qu'elle est vraie à l'ordre k. On a :

$$\begin{aligned} AB^{k+1} - B^{k+1}A &= (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) \\ &= \alpha k B^k B + B^k \alpha B \\ &= \alpha(k+1)B^k. \end{aligned}$$

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

13. Posons $P(B) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k B^k$. Par linéarité de φ_A et le résultat démontré dans la question 12, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_A(P(B)) &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \varphi_A(B^k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{m} \alpha_k k B^k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{m} k B^{k-1} = \alpha P'(B)B. \end{aligned}$$

14. On a $\pi_B(B) = 0$ et donc $0 = \varphi_A(\pi(B)) = \alpha \pi_N'(B)B$, donc le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est un polynôme anulateur de B et de degré est strictement inférieure à $\deg \pi_B$, donc il est nul.
15. D'après la question 14., on a : $X\pi_B' = d\pi_B$ donc X divise π_B. On reprend le même raisonement mais cette fois avec le polynôme $X\pi_B'$ au lieu de π_B, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_A((X\pi_B')(B)) = \alpha(X\pi_B')'(B)B \\ &= \alpha\pi'(B)B + \alpha B\pi_B''(B)B \\ &= \alpha B^2 \pi_B''(B) \end{aligned}$$

On montre ensuite que $X^2\pi_B''-d(d-1)\pi_B$ est le polynôme nul, donc X^2 divise π_B. Un raisonnement par récurrence descendant, montre que X^d divise π_B, et par unicité du polynôme minimal, $\pi_B = X^d$ et donc $B^d = 0$.

•••••••••••