Corrigé Maths 2 CCP 2011

PARTIE I

1) 1) Pour tout x réel, $|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2}$ donc puisque la série de terme général $\frac{2|x|}{n^2\pi^2}$ converge, la règle de comparaison des séries à termes positifs prouve que la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente ce qui assure que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

1) 2) Si $x \in [-a, a]$ alors $|u_n(x)| \leq \frac{2|x|}{n^2\pi^2} \leq \frac{2|a|}{n^2\pi^2}$ donc puisque la série de terme général $\frac{2|a|}{n^2\pi^2}$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$. On a $u_n(n) = \frac{2}{(1+\pi^2)n} \Rightarrow \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| \geq \frac{2}{(1+\pi^2)n}$ et puisque la série de terme général $\frac{2}{(1+\pi^2)n}$ diverge alors la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

1) 3) Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et puisqu'il y a convergence normale de la série $\sum u_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}$ cela prouve que U est continue sur $\mathbb{R}$.

2) 1) Comme $x \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2\pi^2}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln\left(x^2 + n^2\pi^2\right)$ alors la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n est $x \mapsto \ln\left(x^2 + \pi^2 n^2\right) - \ln\left(\pi^2 n^2\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

2) 2) Pour tout x réel, $0 \leq v_n(x)$ et $v_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2\pi^2}$ donc puisque la série de terme général $\frac{x^2}{n^2\pi^2}$ converge, la règle des équivalents des séries à termes positifs prouve que la série de terme général $v_n(x)$ est convergente ce qui assure que la série $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) 3) Soit $a > 0$, puisque la série $\sum v_n' = \sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$ alors V est dérivable sur $[-a, a]$ et $\forall x \in [-a, a], V'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = U(x)$. Ainsi puisque $V(0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = 0$ alors V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

3) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$: $q_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, q_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, comme $q_n(x) \geq 1$ alors la suite $(q_n(x))_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la suite $(\ln(q_n(x)))_{n\geq 0}$ converge ce qui équivaut à la convergence de la série de terme général $v_n(x)$, donc d'après la question 2)2) la suite (q_n) donc la suite (p_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. On a en utilisant la continuité de la fonction exponenetielle

$$p(x) = x \lim_{n\to+\infty} q_n(x) = x \lim_{n\to+\infty} \exp(\ln(q_n(x))) = x \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right) = x \exp(V(x))$$
$$= x \exp\left(\int_0^x U(t)\,dt\right).$$

PARTIE II

1) 1) La fonction g_x est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc le théorème de la convergence normale de Dirichlet assure que la fonction g_x est égale en tout point $t \in \mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier.

1) 2) La fonction g_x est paire donc $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, b_n(x) = 0$.

1) 3) -) Si $x = 0$, alors $a_0(0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi 1dt = 2$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n}[\sin(nt)]_0^\pi = 0$.

-) Si $x \neq 0$, alors $a_n(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi ch\left(\frac{xt}{\pi}\right) \cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re}(\int\limits_0^\pi \left(e^{\frac{xt}{\pi}} + e^{-\frac{xt}{\pi}}\right) e^{int} dt) =$

$\frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\pi}{in\pi+x} e^{\left(\frac{in\pi+x}{\pi}\right)t} + \frac{\pi}{in\pi-x} e^{\left(\frac{in\pi-x}{\pi}\right)t}\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{2(-1)^n \pi x sh(x)}{x^2+n^2\pi^2} + i2n\pi\left(\frac{\pi}{x^2+n^2\pi^2} - \frac{(-1)^n \pi ch(x)}{x^2+n^2\pi^2}\right)\right)$
$= \frac{2(-1)^n x sh(x)}{x^2+n^2\pi^2}$.

2) 1) D'après 1)1) de la partie II, pour tout $t \in]-\pi, \pi]$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$g_x(t) = ch\left(\frac{xt}{\pi}\right) = \frac{sh(x)}{x} + sh(x) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x) \cos(nt)$ donc pour $t = \pi$ on a

$\forall x \in \mathbb{R}^*, ch(x) = sh(x)\left(\frac{1}{x} + U(x)\right) \Rightarrow U(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} - \frac{1}{x}$.

2) 2) On a au voisinage de 0, $\frac{ch(x)}{sh(x)} - \frac{1}{x} = \frac{xch(x)-sh(x)}{xsh(x)} \sim \frac{x(1+o(x))-\left(x+o\left(x^2\right)\right)}{x^2} = \frac{o\left(x^2\right)}{x^2} \Rightarrow \lim\limits_{t\to0^+} \left(\frac{ch(t)}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right) = 0$ ce qui assure que l'intégrale $\int\limits_0^x \left(\frac{ch(t)}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right) dt$ est faussement impropre et donc d'après la question précédente pour $x \neq 0$, $V(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \int\limits_\varepsilon^x \left(\frac{ch(t)}{sh(t)} - \frac{1}{t}\right) dt = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \left(\ln\left(\frac{sh(x)}{x}\right) - \ln\left(\frac{sh(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right) = \ln\left(\frac{sh(x)}{x}\right)$ car $\lim\limits_{\varepsilon\to0} \frac{sh(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$.

2) 3) D'après la question précédente pour $x \neq 0$, $\frac{sh(x)}{x} = \exp(V(x)) \Rightarrow sh(x) = x\exp(V(x))$, et par continuité

l'égalité est vraie pour $x=0$ donc en utilisant la question 3) de la partie I, on a $sh\left(x\right)=p\left(x\right)=x\exp\left(V\left(x\right)\right)=x\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

PARTIE III

1) 1) Pour t au voisinage de 0 on a, $\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\sim\frac{xt}{\pi t}=\frac{x}{\pi}\Rightarrow\lim\limits_{t\to0^+}h\left(x,t\right)=\frac{x}{\pi}$.

1) 2) D'après la question précédente l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty}\left|h\left(x,t\right)\right|dt$ est faussement impropre en 0 et au voisinage de $+\infty,\left|h\left(x,t\right)\right|\leq\frac{1}{\exp(\pi t)-1}\sim\exp\left(-\pi t\right)$, et puisque l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty}\exp\left(-\pi t\right)dt$ converge alors l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty}\left|h\left(x,t\right)\right|dt$ converge donc finalement l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty}\left|h\left(x,t\right)\right|dt$ converge ce qui assure que $t\mapsto h\left(x,t\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) 1) Pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc h possède des dérivées partielles par rapport à x en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et à tout ordre. Soit pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $H\left(x,t\right)=\frac{\exp(itx)}{\exp(\pi t)-1}$. On a $\forall\left(x,t\right)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\partial^nH}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{(it)^n\exp(itx)}{\exp(\pi t)-1}\right)=\frac{t^n}{\exp(\pi t)-1}\mathrm{Im}\left(\exp\left(i\frac{n\pi}{2}+itx\right)\right)=\frac{t^n\sin\left(tx+\frac{n\pi}{2}\right)}{\exp(\pi t)-1}$. Ainsi

-) si n est pair, $n=2m$, alors $\frac{\partial^{2m}h}{\partial x^{2m}}\left(x,t\right)=\frac{t^{2m}(-1)^m\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}$;

-) si n est impair, $n=2m+1$, alors $\frac{\partial^{2m+1}h}{\partial x^{2m+1}}\left(x,t\right)=\frac{t^{2m+1}(-1)^m\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}$.

2) 2) Pour tout x réel, la fonction $t\mapsto h\left(x,t\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et d'après la question 1) 2) de la partie III elle est intégrable sur $]0,+\infty[$. Si $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et au voisinage de 0, $\left|\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right|\sim\frac{1}{\pi}t^{n-1}\left|\sin\left(tx+\frac{n\pi}{2}\right)\right|$, donc l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right|dt$ est faussement impropre en 0, et puisque pour $t>0,t^2\left|\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right|\leq\frac{t^{n+2}}{\exp(\pi t)-1}\Rightarrow\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\left|\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right|=0$, alors l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right|dt$ converge donc finalement l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)\right|dt$ converge ce qui assure que $t\mapsto\frac{\partial^nh}{\partial x^n}\left(x,t\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

3) Soit $n\in\mathbb{N}$, alors

-) La fonction h est n fois continûment dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ d'après III) 2) 1),

-) Pour tout x réel et pour tout $p\in\{1,...,n\}$, $t\mapsto h\left(x,t\right)$ et $t\mapsto\frac{\partial^ph}{\partial x^p}\left(x,t\right)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après III) 2) 2),

-) $\forall p\in\{1,...,n\},\forall\left(x,t\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\left|\frac{\partial^ph}{\partial x^p}\left(x,t\right)\right|\leq\frac{t^p}{\exp(\pi t)-1}=\varphi_p\left(t\right)$ avec φ_p positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\varphi_p\left(t\right)\underset{0}{\sim}\frac{t^{p-1}}{\pi}$ donc φ_p a une limite finie en 0 et $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\varphi_p\left(t\right)=0$,

donc d'après le théorème de dérivation des intégrales paramétrées la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\forall p\in\{1,...,n\}\,,f^{(p)}\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^ph}{\partial x^p}\left(x,t\right)dt$. Ainsi la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\forall m\in\mathbb{N},f^{(2m)}\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(-1)^mt^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}dt$ et $f^{(2m+1)}\left(x\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(-1)^mt^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}dt$.

4) 1) Si $t>0$ on a $\frac{1}{\exp(\pi t)-1}=\frac{\exp(-\pi t)}{1-\exp(-\pi t)}$ d'où puisque $0<\exp\left(-\pi t\right)<1$ alors $\frac{1}{\exp(\pi t)-1}=\exp\left(-\pi t\right)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\exp\left(-n\pi t\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\exp\left(-n\pi t\right)$.

4) 2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\mapsto\exp\left(-n\pi t\right)\sin\left(tx\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\left|\exp\left(-n\pi t\right)\sin\left(tx\right)\right|\leq\exp\left(-n\pi t\right)$, et comme $t\mapsto\exp\left(-n\pi t\right)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $t\mapsto\exp\left(-n\pi t\right)\sin\left(tx\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Dès lors on a

$\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-n\pi t\right)\sin\left(tx\right)dt=\mathrm{Im}\left(\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-n\pi t+itx\right)dt\right)=\mathrm{Im}\left(\lim\limits_{y\to+\infty}\left[\frac{\exp(-n\pi t+itx)}{-n\pi+ix}\right]_0^y\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{-n\pi+ix}\right)=\frac{x}{x^2+n^2\pi^2}=\frac{u_n(x)}{2}$ car $\left|e^{ixy}\right|=1\Rightarrow\lim\limits_{y\to+\infty}\exp\left(-n\pi y\right)\exp\left(ixy\right)=0$.

4) 3) Si $q = \exp(-\pi t)$, $t > 0$, donc $q \neq 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} q^k = q\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1-q^n}{q^{-1}-1}$ d'où $h_n(x,t) = \frac{1-\exp(-n\pi t)}{\exp(\pi t)-1} \sin(tx)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
-) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h_{n,x} : t \mapsto h_n(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme finie de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question III) 4) 2),
-) La suite $(h_{n,x})_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto h(x,t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
-) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a en utilisant ce qui précède, $|h_n(x,t)| \leq \left|\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\right| = |h(x,t)|$ et puisque $t \mapsto |h(x,t)|$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question III) 1) 2),
alors le théorème de la convergence dominée assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} h(x,t)\,dt = f(x)$. Dès lors puisque $\int\limits_0^{+\infty} h_n(x,t)\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t)\sin(tx)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^{+\infty} \exp(-k\pi t)\sin(tx)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k(x)}{2}$ d'après la question III) 4) 2), alors $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k(x)}{2} = \frac{U(x)}{2}$.