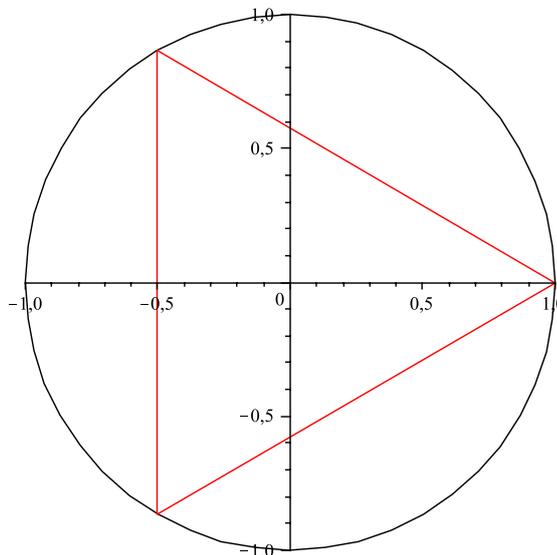


## CCP PSI 2 un corrigé.

### Partie 1.

1.1 Le dessin ne pose aucun problème.



On a  $P = (1, 0)$ ,  $Q = (-1/2, \sqrt{3}/2)$  et  $R = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$ . On en déduit que

$$(PQ) : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$

$$(PR) : y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$$

$$(QR) : x = -1/2$$

sont les équations des droites  $(PQ)$ ,  $(PR)$  et  $(QR)$ . Les équations cartésiennes des côtés sont les mêmes, avec une contrainte supplémentaire :  $x \in [-1/2, 1]$  pour  $PQ$  et  $PR$  et  $y \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$  pour  $(QR)$ .

Une droite d'équation  $ax + by + c = 0$  découpe le plan en deux parties : l'une où  $ax + by + c > 0$  et l'autre où  $ax + by + c < 0$ . En testant en l'origine, on sait quelle partie correspond à quel signe. On trouve alors immédiatement que  $M(x + iy) \in T$  si et seulement si

$$2x + 1 > 0, \quad x - \sqrt{3}y - 1 < 0, \quad x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

**1.2.1** Avec la propriété (2), on a immédiatement  $(1, 1, 1)$  qui est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1.

**1.2.2** Toute matrice étant trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ , la trace (qui est un invariant de similitude) est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. Ainsi,

$$\text{Tr}(A) = 1 + \lambda + \bar{\lambda} = 1 + 2a$$

$A^2$  est, elle, semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients sont les carrés des valeurs propres de  $A$  et de même

$$\text{Tr}(A^2) = 1 + \lambda^2 + \bar{\lambda}^2 = 1 + 2(a^2 - b^2)$$

**1.2.3**  $\text{Tr}(A) > 0$  découle de la propriété (1) (la trace est  $> 0$  comme somme des coefficients diagonaux qui sont  $> 0$ ).

On a  $(A^2)_{i,i} = \sum_{k=1}^3 a_{i,k} a_{k,i} > a_{i,i}^2$  (toujours avec (1)) et donc  $\text{Tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$ .

L'inégalité de Schwarz donne  $(u|v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$  ce qui s'écrit, avec les vecteurs proposés

$$(\text{Tr}(A))^2 = (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})^2 = (u|v)^2 \leq 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2) < 3\text{Tr}(A^2)$$

**1.2.4** Avec les expressions obtenues en **1.2.2** on a donc

$$1 + 2a = \text{Tr}(a) > 0$$

$$0 < \text{Tr}(A^2) - (\text{Tr}(A))^2 = 2(1 + a^2 - 3b^2 - 2a) = (a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1)$$

**1.2.5** La condition  $2a + 1 > 0$  indique que  $M(\lambda)$  est à droite du côté  $(QR)$ .

La condition  $(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$  indique que soit  $M(\lambda)$  est au dessus de  $PR$  et en dessous de  $PQ$  soit l'inverse. Or, le second quart de plan est entièrement hors de  $D$  (comme le montre le dessin par exemple).  $M(\lambda)$  est donc dans le premier quart de plan et on a  $(a - \sqrt{3}b - 1) < 0$  et  $(a + \sqrt{3}b - 1) < 0$ .

La question **1.1** nous permet d'affirmer que

$$M(\lambda) \in T$$

**1.3.1**  $2r \cos(\theta) = \lambda + \bar{\lambda}$  donne immédiatement

$$\alpha = \frac{1 + 2r \cos(\theta)}{3}$$

$$j\lambda + j^2\bar{\lambda} = j\lambda + j\bar{\lambda} = 2\text{Re}(j\lambda) = 2r \cos(\theta + 2\pi/3) \text{ et ainsi}$$

$$\beta = \frac{1 + 2r \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3}$$

Enfin, on a de même  $j^2\lambda + j\bar{\lambda} = 2\text{Re}(j^2\lambda) = 2r \cos(\theta + 4\pi/3) = -2r \cos(\theta + \frac{\pi}{3})$  et donc

$$\gamma = \frac{1 - 2r \cos(\theta + \frac{\pi}{3})}{3}$$

**1.3.2** On a immédiatelement  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  car  $1 + j + j^2 = 0$ .  $A$  vérifie donc la propriété (2).

Par ailleurs,  $M(\lambda) \in T$  donne  $\lambda + \bar{\lambda} = 2\text{Re}(\lambda) > -1$  et donc  $\alpha > 0$ .

De même,  $j\lambda + j^2\bar{\lambda} = 2\text{Re}(j\lambda) = -\text{Re}(\lambda) - \sqrt{3}\text{Im}(\lambda) > -1$  (avec **1.1**) et  $\beta > 0$ .

Enfin,  $\gamma > 0$  s'obtient de même avec la troisième condition vue en **1.1**.

Finalement,  $A$  vérifie aussi (1) et donc la propriété  $(ST > 0)$ .

**1.3.3** Le calcul donne

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^3 = I_3$$

$X^3 - 1$  annihilant  $J$ , les valeurs propres de  $J$  sont racines de  $X^3 - 1$  et ne peuvent valoir que  $1, j, j^2$ .

Si on trouve un vecteur propre pour chacune de ces potentielles valeurs, on aura le spectre et on pourra affirmer (les sous-espaces propres étant en somme directe) que les sous-espaces propres sont de dimension 1. On trouve que  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, j, j^2)$  et  $(1, j^2, j)$  conviennent. Ainsi,

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, j, j^2\}, \quad E_1(J) = \text{Vect}((1, 1, 1)), \quad E_j(J) = \text{Vect}((1, j, j^2)), \quad E_{j^2}(J) = \text{Vect}((1, j^2, j))$$

**1.3.4** On a immédiatement

$$A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2 = P(J) \quad \text{avec} \quad P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

Comme  $J$  est diagonalisable, il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $Q^{-1}JQ = \text{diag}(1, j, j^2)\Delta$ . Une récurrence simple indique que pour tout entier naturel  $p$ ,  $Q^{-1}J^pQ = \Delta^p$ . On en déduit, par combinaisons linéaires, que

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}P(J)Q = P(Q^{-1}JQ) = \text{diag}(P(1), P(j), P(j^2))$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc (avec  $1 + j + j^2 = 0$  et les formules de **1.3.1**)

$$P(1) = 1, \quad P(j) = \lambda \quad \text{et} \quad P(j^2) = \bar{\lambda}$$

## Partie 2.

**2.1** La  $i$ -ième coordonnée de  $AU$  est  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$  d'après (2). On en déduit que

$$AU = U$$

c'est à dire que  $U$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1 ( $U$  étant non nul).

**2.2.1** Comme  $BX = 0$ , sa  $k$ -ième coordonnée est nulle  $\sum_{j=1}^n b_{k,j}x_j = 0$  ce qui donne

$$b_{k,k}x_k = - \sum_{j \neq k} b_{k,j}x_j$$

L'inégalité triangulaire donne (avec la définition de  $k$ )

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

Comme  $|x_k| > 0$  ( $X$  n'est pas nul), on en déduit l'inégalité demandée.

**2.2.2**  $B = A - \lambda I_n$  est bien non inversible (puisque  $\lambda$  est valeur propre) et la question précédente donne (les coefficients non diagonaux de  $B$  étant ceux de  $A$ )

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$$

Avec la propriété ( $ST > 0$ ) on a donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}$$

Avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit que  $|\lambda| - a_{k,k} \leq 1 - a_{k,k}$  et donc que

$$|\lambda| \leq 1$$

**2.2.3** Si  $|\lambda| = 1$ , on a égalité ci-dessus et on doit donc avoir égalité dans l'inégalité triangulaire c'est à dire avoir  $1 - a_{k,k} = |\lambda| - a_{k,k} = |\lambda - a_{k,k}| = |e^{i\theta} - a_{k,k}|$ . En élevant cette identité au caré, on obtient après simplification  $-2a_{k,k} = -2 \cos(\theta)a_{k,k}$ . Comme  $a_{k,k} \neq 0$ , on a  $\cos(\theta) = 1$  et donc

$$\lambda = 1$$

**2.3.1** Le déterminant est invariant par transposition et donc  $A$  et  ${}^tA$  ont mêmes valeurs propres (puisque même polynôme caractéristique). En particulier,  $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$ .

Le rang est aussi invariant par transposition (le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes ou de ses lignes). Les images de  $A - I_n$  et de  ${}^tA - I_n$  ont donc même dimension. Par théorème du rang, on a alors

$$\dim(E_1(A)) = n - \text{rg}(A - I_n) = n - \text{rg}({}^tA - I_n) = \dim(E_1({}^tA))$$

**2.3.2** La  $i$ -ième coordonnée de  ${}^tAV$  est  $\sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j$ . Elle vaut aussi  $v_i$  (car  ${}^tAV = V$ ). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|v_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i}v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j|$$

En sommant ces inégalités, on a donc

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^n \left( |v_j| \sum_{i=1}^n a_{j,i} \right)$$

Avec la propriété (2), cette inégalité est une égalité. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc aussi (par exemple par l'absurde) des égalités. On a donc

$$\forall i, |v_i| = \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j|$$

Ceci signifie exactement que  ${}^tA|V| = |V|$  (pour tout  $i$ , les deux vecteurs ont même  $i$ -ième coordonnée). Si, par l'absurde, il existait un  $i$  tel que  $|v_i| = 0$  alors on aurait  $0 = \sum_{j=1}^n a_{i,j}|v_j|$  ce qui donnerait la nullité pour tout  $j$  de  $a_{i,j}|v_j|$  (une somme de quantité positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles) et donc de tous les  $v_j$  (propriété (1)). Ceci contredit  $V \neq 0$ . Ainsi

$$\forall i, |v_i| > 0$$

**2.3.3**  $Y$  étant un élément non nul de  $E_1({}^tA)$ , on a  $\forall i, y_i \neq 0$ . On peut en particulier poser  $Z = X - \frac{x_1}{y_1}Y$ . C'est un élément de  $E_1({}^tA)$  dont la première coordonnée est nulle. Avec la question précédente (en contraposant), c'est donc le vecteur nul.  $X$  est donc multiple de  $Y$  et

$$\dim(E_1({}^tA)) = 1$$

Soit  $V$  un vecteur non nul de  $E_1({}^tA)$  et  $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |v_i|} |V|$ .  $\Omega$  est un élément de  $E_1({}^tA)$  (question **2.3.2**) dont les coordonnées sont  $> 0$  à somme égale à 1.

$\Omega$  est le seul élément ayant ces propriétés car tout autre élément de  $E_1({}^tA)$  est multiple de  $\Omega$  (et la somme des coordonnées est multiple dans le même rapport).

Enfin,  ${}^tA\Omega = \Omega$  s'écrit

$$\forall i, \sum_{j=1}^n a_{j,i}\omega_j = \omega_i$$

**2.3.4** Les valeurs propres de  $A$  sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus,  $E_1(A)$  est de dimension 1 et une base en est  $(1, \dots, 1)$ .

Les valeurs propres de  ${}^tA$  sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus,  $E_1({}^tA)$  est de dimension 1 et les coordonnées d'un vecteur propres sont toutes  $> 0$  ou toutes  $< 0$ .

**2.4.**  $N$  est positive, vérifie l'axiome de séparation ( $N(X) = 0 \Rightarrow X = 0$  car les  $\omega_i$  sont  $> 0$ ), est homogène ( $N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$ ) et vérifie l'inégalité triangulaire ( $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$ ) est conséquence de l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$ ).  $N$  est donc une norme.

Posons  $Y = AX$  ; on a  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$  et donc (avec la dernière égalité de **2.3.3**)

$$N(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i a_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i \right) |x_j| = \sum_{j=1}^n \omega_j |x_j| = N(X)$$

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé, on a donc  $|\lambda|N(X) = N(\lambda X) = N(AX) \leq N(X)$  et donc (puisque  $N(X) > 0$ ,  $X$  étant non nul)  $|\lambda| \leq 1$ . On retrouve

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{z/ |z| \leq 1\}$$

**2.5.1** Le même calcul que ci-dessus (mais sans les modules et donc avec des égalités) donne immédiatement  $\Phi(AX) = \Phi(X)$ .

**2.5.2** Si  $X \in \ker(\Phi) \cap E_1(A)$  alors  $X \in \text{Vect}(U)$  et  $\Phi(X) = 0$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $X = \lambda U$  et  $0 = \Phi(X) = \Phi(\lambda U) = \lambda \sum \omega_i = \lambda$ . Donc  $X = 0$ .  $E_1(A)$  et  $\ker(\Phi)$  sont ainsi en somme directe. Par ailleurs,  $\dim(E_1(A)) = 1$  et  $\dim(\ker(\Phi)) = n - 1$  (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan). La somme de ces dimensions est égale à la dimension de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

Des deux arguments précédents, on tire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$$

**2.5.3** On suppose  $AX = \lambda X$  et  $\lambda \neq 1$ . On a alors  $\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X)$ .  $\lambda \neq 1$  indique que  $\Phi(X) = 0$  c'est à dire que  $X \in \ker(\Phi)$ .

**2.5.4** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ . **2.5.1** montre que  $\ker(\Phi)$  est stable par  $f$  (si  $\Phi(X) = 0$  alors  $\Phi(AX) = 0$ ).  $E_1(A)$  est aussi stable par  $f$ . Dans une base adaptée à la décomposition de **2.5.2**, la matrice de  $f$  est bloc-diagonale du type  $\text{diag}(1, B)$ . Si 1 était valeur propre de  $B$  alors  $E_1(A)$  serait de dimension  $\geq 2$  (on aurait deux vecteurs propres de  $f$  indépendants, l'un étant dans  $E_1(A)$  et l'autre dans  $\ker(\Phi)$ ) ce qui est exclu. 1 n'est donc pas racine de  $\chi_B$ . Or  $\chi_f = (1 - X)\chi_B$  (déterminant diagonal par blocs) et 1 est donc racine simple de  $\chi_f$ . Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 1.