E3A Epreuve de Mathématique B MP 2012

Exercice I

1.

(a) C'est du cours : Soit $y \in \text{Im }(\pi) \cap \text{Ker }(\pi)$ donc $\exists x \in E$ tel que $y = \pi(x)$.

$\pi(y) = \pi^2(x) = 0$ or $\pi^2 = \pi$ donc $y = \pi(x) = 0$. Im (π) et Ker (π) sont donc en somme directe.

Par le théorème du rang, dim(Im $(\pi) \oplus$ Ker (π))=dim$E$ on en déduit le résultat.

Conclusion : $\boxed{\text{Im }(\pi) \oplus \text{Ker }(\pi) = E}$

(b) i. $\forall x \in E$, $\exists (y, z) \in \text{Im }(\pi) \times \text{Ker }(\pi)$ tel que $x = y + z$.

On a $\pi(x) = y$ et $y \perp z$ car Im $(\pi) \perp$ Ker (π).

On en déduit que $\|\pi(x)\|^2 = \|y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$ (d'après Pythagore).

De plus, on a égalité si et seulement si $z = 0$, donc si et seulement si $x \in \text{Im }(\pi)$.

Conclusion : $\boxed{\|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \text{ et égalité si et seulement si } x \in \text{Im }(\pi)}$

(b) ii. $\forall x \in E$, $\exists (y, z) \in \text{Im }(\pi) \times \text{Ker }(\pi)$ tel que $x = y + z$.

On a alors $< \pi(x), x >=< y, y + z >=< y, y >= \|y\|^2 \geqslant 0$

Conclusion : $\boxed{< \pi(x), x > \geqslant 0 \text{ et égalité si et seulement si } x \in \text{Ker }(\pi)}$

(c)

$\Longrightarrow$]

$\forall x \in E$, $\exists (y, z) \in \text{Im }(\pi) \times \text{Ker }(\pi)$ et $\forall x' \in E$, $\exists (y', z') \in \text{Im }(\pi) \times \text{Ker }(\pi)$ tel que

$x = y + z$ et $x' = y' + z'$.

On a alors :

$< \pi(x), x' >=< y, y' + z' >=< y, y' >$ et $< \pi(x'), x >=< y', y + z >=< y', y >=< y, y' >$, d'où $\pi^* = \pi$.

$\Longleftarrow$]

$\forall y \in \text{Im}(\pi)$ et $\forall z \in \text{Ker}(\pi)$, $\exists x \in E$ tel que $y = \pi(x)$.

On a donc $< y, z >=< \pi(x), z >=< x, \pi^*(z) >=< x, \pi(z) >=< x, 0 >= 0$ donc Im $(\pi) \perp$ Ker (π).

Conclusion : $\boxed{\pi \text{ est un projecteur orthogonal si et seulement si } \pi^* = \pi}$

2.

(a) Avec Cayley-Hamilton, $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = (0)$, donc

$M^2 = M \Longleftrightarrow \text{tr}(M)M - \det(M)I_2 = M \ (*)$

Si (M, I_2) était liée alors comme I_2 est non nul, il existerait un λ dans $\mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_2$ et $M^2 = M$ donnerait $\lambda^2 = \lambda$ soit $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$: impossible car M est la matrice d'un projecteur **strict**. Donc (M, I_2) est libre et donc d'après $(*)$, $M^2 = M \iff \text{tr}(M) = 1$ et $\det(M) = 0$.

Comme $M = {}^t M$, on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\text{tr}(M) = a + d$ et $\det M = a(1-a) - b^2$

Conclusion : $\boxed{M \text{ est la matrice d'un projecteur strict orthogonal si et seulement si } \begin{cases} d = 1 - a \\ b = c \\ a(1-a) = b^2 \end{cases}}$

(b) Le polynôme $P(x) = x(1-x)$ n'est positif que si $x \in [0, 1]$ donc $a(1-a) = b^2 \geqslant 0$ implique que $a \in [0, 1]$

Conclusion : $\boxed{a \in [0, 1]}$

(c) $N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de N sont donc a et 0. Si $a = 0$ alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: absurde car M est "stricte" donc $a \neq 0$ et par le corollaire de la deuxième caractérisation, N admettant 2 valeurs propres 2 à 2 distinctes est diagonalisable et comme $a \in [0, 1]$ on conclut :

Conclusion : $\boxed{N \text{ est diagonalisable et } \text{sp}(N) = \{0, a\} \subset [0, 1]}$

(d) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que $M_{\mathcal{B}}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M de π_2 dans cette base est d'après la question précédente a) de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ et donc $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ est la matrice de $\pi_1 \circ \pi_2$. On peut conclure grâce à la question précédente.

Conclusion : $\boxed{\pi_1 \circ \pi_2 \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans } [0, 1]}$

3.

(a) $(\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1)^* = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ car π_1 et π_2 sont symétriques. On en déduit d'après le théorème spectral que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Soit λ une valeur propre de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, donc il existe un vecteur x de E, non nul tel que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x) = \lambda x$, donc avec le 1°)a) $\|\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x)\| = \|\pi_1(\pi_2 \circ \pi_1(x))\| \leqslant \|\pi_2 \circ \pi_1(x)\| \leqslant \|\pi_1(x)\| \leqslant \|x\|$

donc $\|\lambda x\| \leqslant \|x\|$ et comme x est non nul, on obtient $|\lambda| \leqslant 1$.

D'autre part avec ce même vecteur x, on a avec le 1°)b) $< \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(x), x > = < \pi_2(\pi_1(x)), \pi_1(x) > \geqslant 0$ donc $< \lambda x, x > \geqslant 0$ soit $\lambda \|x\|^2 \geqslant 0$ et comme x est non nul, on a $\lambda \geqslant 0$.

On peut conclure :

Conclusion : $\boxed{\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1 \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans } [0,1]}$

(b) Soit $y \in \text{Im}(\pi_1)$, on a $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(y) = \pi_1(\pi_2 \circ \pi_1(y))$, il existe donc $x \in E$ tel que $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1(y) = \pi_1(x)$

Conclusion : $\boxed{\text{Im}(\pi_1) \text{ est stable par } \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1}$

(c) On démontre de la même manière que $\text{Im}(\pi_1)$ est stable par $\pi_1 \circ \pi_2$.

Sur $\text{Im}(\pi_1)$, π_1 agit comme l'identité donc l'induit $\widehat{\pi_1 \circ \pi_2} = \pi_1 \widehat{\circ \pi_2 \circ} \pi_1$ et l'induit de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable car $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable et enfin comme le spectre de $\pi_1 \widehat{\circ \pi_2 \circ} \pi_1$ est inclus dans celui de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$, les valeurs propres sont dans $[0,1]$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'induit de } \pi_1 \circ \pi_2 \text{ sur } \text{Im}(\pi_1) \text{ est diagonalisable à spectre inclus dans } [0,1]}$

(d) On a pour tout sev F et H de E, $(F+H)^\perp = F^\perp \cap H^\perp$.

En effet $F \subset F+H$ donc $(F+H)^\perp \subset F^\perp$ idem pour $H \subset F+H$, donc $(F+H)^\perp \subset F^\perp \cap H^\perp$. Réciproquement si $x \in F^\perp \cap H^\perp$ alors $\forall y+z \in F+H$, $< x, y+z >=< x,y > + < x,z >= 0+0 = 0$ donc $x \in (F+H)^\perp$. On l'applique à $F =$Im(π_1) et $H =$Ker(π_2), comme Im$(\pi_1)^\perp$=Ker(π_1) et Ker$(\pi_2)^\perp$=Im(π_2), enfin si $x \in G^\perp$, alors $\pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x)) = \pi_1(x) = 0$ on peut conclure :

Conclusion : $\boxed{G^\perp = \text{Ker}(\pi_1) \cap \text{Im}(\pi_2) \text{ et } \pi_1 \circ \pi_2 \text{ y est nul}}$

(e) On a $G + G^\perp =$Im(π_1)+Ker$(\pi_2) + G^\perp$. Sur Im(π_1) , $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable (à valeurs propres dans $[0,1]$) et sur Ker$(\pi_2) + G^\perp$, $\pi_1 \circ \pi_2$ est nulle. On peut donc trouver une base de vecteurs propres de $\pi_1 \circ \pi_2$ de $G + G^\perp = E$.

Conclusion : $\boxed{\pi_1 \circ \pi_2 \text{ est diagonalisable à valeurs propres dans } [0,1]}$

(f) Si $(e_1, \dots, e_{r_2})$ est une base orthonormée de Im(π_2) et $(e_{r_2+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de Ker(π_2), alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et donc Im$(\pi_2 \circ \pi_1)$ =vect$(\pi_1 \circ \pi_2(e_1), \dots, \pi_1 \circ \pi_2(e_n))$ =vect$(\pi_1 \circ \pi_2(e_1), \dots, \pi_1 \circ \pi_2(e_{r_2}))$ d'où rg$(\pi_1 \circ \pi_2) \leqslant$rg$(\pi_2) = r_2$.

Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nul de $\pi_1 \circ \pi_2$ d'après le rang, on a $p \leqslant r_2$ et

Tr$(\pi_1 \circ \pi_2) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p \leqslant p$ car toutes les valeurs propres sont dans $[0,1]$

On peut conclure :

Conclusion : $\boxed{\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) \leqslant r_2}$

Pour l'égalité on utilise la formule Tr$(u) = \sum_{k=1}^{n} < u(e_i), e_i >$ avec $u = \pi_1 \circ \pi_2$:

$$\text{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = \sum_{k=1}^{n} < \pi_1 \circ \pi_2(e_i), e_i >= \sum_{k=1}^{r_2} < \pi_1 \circ \pi_2(e_i), e_i >= \sum_{k=1}^{r_2} < \pi_1(e_i), e_i > \leqslant 1 \cdot r_2$$

avec Cauchy-Schwarz et le 1°)a) pour l'inégalité ci-dessus.

Donc on aura égalité si $\forall k \in [\![1, r_2]\!] : < \pi_1(e_i), e_i >= 1$, ce qui impose avec le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz que $\pi_1(e_i)$ et e_i soit liés donc que $e_i \in \mathrm{Im}(\pi_1)$ soit donc $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1)$.

Réciproquement, si $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1)$ alors $\forall k \in [\![1, r_2]\!] : < \pi_1(e_i), e_i >= 1$ et donc $\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = r_2$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) = r_2 \text{ SSI } \mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1)}$

Exercice II

1. (a)

On a $\boxed{M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,O_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & AE+B \\ C & CE+D \end{pmatrix}}$.

(b)

On choisit E tel que $AE+B = O_n$ donc $E = -A^{-1}B$ d'où $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,O_n,I_n} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix}$, la formule des déterminants par blocs donne

$\det(M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,O_n,I_n}) = \det(M_{A,B,C,D}) = \det A \det(-CA^{-1}B + D)$

Conclusion : $\boxed{\det(M_{A,B,C,D}) = \det A \det(D - CA^{-1}B)}$

2. (a)

$\det(M_{A,B,C,D}) = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A(D - CA^{-1}B)) = \det(AD - ACA^{-1}B)) = \det(AD - CB))$ car $AC = CA$

Conclusion : $\boxed{\det(M_{A,B,C,D}) = \det(AD - CB))}$

(b) i. $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & B \\ C & \lambda I_n - D \end{pmatrix})$. si λ n'est pas une valeur propre de A alors $\lambda I_n - A$ est inversible et commute avec C donc d'après la question précédente,

$\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det((\lambda I_n - A)(\lambda I_n - D) - CB) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$ avec $U = -(A+D)$ et $V = AD - CB$.

Considérons P définie par $P(x) = \chi_{M_{A,B,C,D}}(x) - \det(x^2 I_n + xU + V)$. P est une fonction polynomiale qui admet une infinité de racines ($\mathbb{C} - \mathrm{sp}(A)$. Donc cette fonction est identiquement nulle :

Conclusion :

$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C} ,\ \chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V) \text{ avec } U = -(A+D) \text{ et } V = AD - CB.}$

(b) ii. Pour $\lambda = 0$, on obtient tout de suite le résultat :

Conclusion : $\boxed{\det(M_{A,B,C,D} = \det(AD - CB))}$

3. (a) ${}^t({}^tBB) = {}^tBB$ et $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ${}^tX{}^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 \geqslant 0$

$\forall \lambda \in \mathrm{sp}({}^tBB)$ $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ tel que ${}^tBBX = \lambda X$ donc ${}^tX{}^tBBX = \lambda{}^t(X)X = \lambda \|BX\|^2 \geqslant 0$ et comme $\|BX\|^2 > 0$, on en déduit que $\lambda \geqslant 0$

<u>**Conclusion**</u> : $\boxed{{}^tBB \text{ est symétrique et positive à spectre dans } \mathbb{R}^+}$

(b) Avec le 2°) , on a $\boxed{\chi_S(\lambda) = \det((\lambda-1)^2 I_n - {}^tBB) = \chi_{{}^tBB}((\lambda-1)^2)}$

(c)

C'est du cours : conséquence du théorème spectral.

(d)

Soit μ une valeur propre de ${}^tBB$, alors $\mu \geqslant 0$ (c'est le a)) et en résolvant $\mu = (\lambda - 1)^2$ on obtient que $1 \pm \sqrt{\mu}$ sont valeurs propres de S.

Si S est définie positive alors il faut que pour toute valeur propre μ de ${}^tBB$, $1 - \sqrt{\mu} > 0$ soit $0 \leqslant \mu < 1$.

Réciproquement si toutes les valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de ${}^tBB$ vérifie $\mu_i < 1$, alors les valeurs propres de S sont les $1 \pm \sqrt{\mu_i}$ et pour tout i, $1 \pm \sqrt{\mu_i} > 0$.

<u>**Conclusion**</u> : $\boxed{S \text{ est définie positive SSI les valeurs propres de } {}^tBB \text{ sont } <1}$

4. (a) Comme $2A_{n-1}$ et iA_{n-1} commutent, on peut appliquer la formule du 2°) : $\det A_n = \det(-3A_{n-1}^2)$. Par récurence, on montre que A_n est de taille $2^n \times 2^n$, donc $-3A_{n-1}^2$ est de taille $2^{n-1} \times 2^{n-1}$

<u>**Conclusion**</u> : $\boxed{\det A_n = (3)^{2^{n-1}} (\det A_{n-1})^2}$

(b)

On en déduit que si $n \geqslant 2$ alors :

$\det A_n = (3)^{2^{n-1}} (\det A_{n-1})^2 = (3)^{2^{n-1}} [(3)^{2^{n-2}} (\det A_{n-2})^2]^2 = (3)^{2^{n-1}} [(3)^{2^{n-1}} (\det A_{n-2})^{2^2}]$

$= (3)^{2.2^{n-1}} [(\det A_{n-2})^{2^2}] = \cdots = (3)^{(n-1)2^{n-1}} (\det A_1)^{2^{n-1}} = (3)^{n2^{n-1}}$

<u>**Conclusion**</u> : $\boxed{\det A_n = (3)^{n2^{n-1}} \text{ et } \det A_1 = -3}$

(c) On réapplique le 2°) d'où

$\chi_{A_n} = \det(\lambda^2 I_n - 3A_{n-1}^2) = (3)^{2^{n-1}} \det(\dfrac{\lambda^2}{3} I_n - A_{n-1}^2) = (3)^{2^{n-1}} \det(\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} I_n - A_{n-1}) \det(\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} I_n + A_{n-1})$

<u>**Conclusion**</u> : $\boxed{\chi_{A_n}(\lambda) = (3)^{2^{n-1}} \chi_{A_{n-1}}(\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}}) \chi_{-A_{n-1}}(\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}})}$

(d) comme les valeurs propres de A_1 sont $\pm\sqrt{3}$, on en déduit que

<u>**Conclusion**</u> : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_n \text{ sont } \pm(\sqrt{3})^n \text{ (2 valeurs propres d'ordre } 2^{n-1})}$

Exercice III

1. (a)

OB étant un diamètre, $\boxed{ON_tB \text{ est un triangle rectangle en } N_t}$.

(b)

Le centre du cercle est le milieu de OB d'où l'équation est $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}/x^2 + y^2 - y = 0 \text{ et } \mathcal{D}'/y = 1}$

(c)

La droite (OM_t) a pour équation $\begin{vmatrix} x & t \\ y & 1 \end{vmatrix}$ soit $x - ty = 0$.

$$N_t(x,y) \in \mathcal{C} \cap (OM_t) \iff \begin{cases} x = ty \\ x^2 + y^2 - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = ty \\ (1+t^2)y^2 - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = ty \\ y = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \text{car } y \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{N_t\left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)}$

(d) **Conclusion** : $\boxed{\overrightarrow{N_tM_t}\left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)}$

2. (a) $P(-t) = s_{Oy}(P(t)$ donc étude sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^+$ et symétrie de la courbe par rapport à s_{Oy}.

La fonction P est de classe C^∞ sur I et l'on a $\mathcal{D}\begin{cases} x' = \dfrac{3t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} \\ y' = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

On en déduit un tableau de variation où x et y sont strictement cruissantes sur I avec $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 1$ donc $\mathcal{D}'$ est asymptote à la courbe.

(b) En t_0, P est stationnaire car $x'(0) = y'(0) = 0$. On effectue des DL : $x(t) = t^3 + o(t^3)$ et $y(t) = t^2 + o(t^3)$ d'où $P''(0) = (0,2)$ et $P'''(0) = (6,0)$. On en déduit

Conclusion : $\boxed{P_O \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$.

(c) Notons Δ^+ la région comprise entre la courbe Γ et $\mathcal{D}'$ et les abscisses positives. Par symétrie l'aire recherchée vaut $2\mathcal{A}(\Delta^+)$.

L'aire de Δ^+ est obtenue en "voyant" Δ^+ comme réunion des segments $[P_t, Q_t]$ où O, P_t, Q_t sont alignés et $Q_t \in \mathcal{D}'$. On effectue donc le changement de variable : $\mathcal{D}\begin{cases} x = \lambda\dfrac{t^3}{1+t^2} \\ y = \lambda\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ 1 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1+t^2}{t^2} \\ 0 \leqslant t \leqslant +\infty \end{cases}$

Le jacobien vaut $\dfrac{D(x,y)}{D(\lambda,t)} = -\dfrac{\lambda t^4}{(1+t^2)^2}$.

D'où $\mathcal{A}(\Delta^+) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\int_1^{\frac{1+t^2}{t^2}} \frac{\lambda t^4}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{t^4}{(1+t^2)^2})\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi$

Conclusion : $\boxed{\text{L'aire recherchée vaut } \frac{3}{4}\pi}$

3. (a) M' a pour affixe $\dfrac{z}{|z|^2}$, donc $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^2}$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM} = 1}$

(b)

Conclusion : $\boxed{U_t(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2})}$

(c) L'image par σ de Γ est donc la parabole d'équation $y = x^2$ privé du point O.