Banque filière PT
Math II-A

<u>**Exercice 1**</u>

1) La loi $*$ est clairement interne dans $\mathbf{H}$, et $\left(1,\vec{0}\right)$ est élément neutre.

L'associativité étant admise, il suffit de vérifier que $(x,\vec{u})*\left(\dfrac{x}{x^2+\vec{u}\cdot\vec{u}},\dfrac{-\vec{u}}{x^2+\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)=\left(1,\vec{0}\right)$

Q^{-1} existe si $Q\neq\left(0,\vec{0}\right)$.

$\mathbf{H}^*$ est un groupe non commutatif car en général $\vec{u}\wedge\vec{u}'\neq\vec{u}'\wedge\vec{u}$.

2) $Q*Q'=Q'*Q$ si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{u}'=\vec{u}'\wedge\vec{u}$, soit si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

$Q'\in\mathbf{H}$ vérifie : $\forall Q\in\mathbf{H}$, $Q*Q'=Q'*Q$ si et seulement si $\vec{u}'$ est colinéaire à tous les vecteurs de E, soit si et seulement si $\vec{u}'=\vec{0}$.

3) $\overline{Q*Q'}=\overline{Q'}*\overline{Q}$: vérification immédiate.

$Q*\overline{Q}=\left(x^2+\vec{u}\cdot\vec{u},\vec{0}\right)$.

$$\begin{aligned}(Q*Q')*\left(\overline{Q*Q'}\right)&=Q*\left(Q'*\overline{Q'}\right)*\overline{Q}\\&=\left(N\left(Q'\right),\vec{0}\right)*\left(Q*\overline{Q}\right)\\&=\left(N\left(Q'\right),\vec{0}\right)*\left(N\left(Q\right),\vec{0}\right)\\&=\left(N\left(Q\right).N\left(Q'\right),\vec{0}\right).\end{aligned}$$

d'où $N\left(Q*Q'\right)=N\left(Q\right).N\left(Q'\right)$.

Pour $Q=(\cos\theta,\sin\theta\,\vec{a})$ avec $\vec{a}$ unitaire, $N\left(Q\right)=1$ donc $Q\in S$.

Réciproquement, si $Q\in S$, soit $\theta\in\mathbf{R}$ tel que $\begin{cases}\cos\theta=x\\\sin\theta=\|\vec{u}\|\end{cases}$

et $\vec{a}=\begin{cases}\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\text{ si }\vec{u}\neq\vec{0}\\\text{un vecteur unitaire quelconque sinon.}\end{cases}$

Alors, $x=\cos\theta$ et $\vec{u}=\sin\theta\,\vec{a}$ donc $Q=(\cos\theta,\sin\theta\,\vec{a})$.

$N:(x,\vec{u})\mapsto x^2+\vec{u}\cdot\vec{u}$ est un morphisme de $(\mathbf{H}^*,*)$ sur $\left(\mathbf{R}_+^*,\times\right)$ donc son noyau S est un sous-groupe de $(\mathbf{H}^*,*)$.

4) Si $\vec{v}$ non nul est orthogonal à $\vec{a}$, alors $(\vec{v},\vec{a}\wedge\vec{v})$ est une base orthonormale directe du plan $(\mathbf{R}\vec{a})^{\perp}$, et $R\left(\vec{v}\right)=\cos\theta\,\vec{v}+\sin\theta\,\vec{a}\wedge\vec{v}$.

Si $\vec{u}$ est quelconque, $\vec{u}=\vec{v}+\left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right).\vec{a}$ avec $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{a}$, donc

$$\begin{aligned}R\left(\vec{u}\right)&=\cos\theta\,\vec{v}+\sin\theta\,\vec{a}\wedge\vec{v}+\left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right).\vec{a}\\&=\cos\theta\,\left(\vec{u}-\left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right).\vec{a}\right)+\sin\theta\,\vec{a}\wedge\vec{u}+\left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right).\vec{a}\\&=\cos\theta\,\vec{u}+\left(1-\cos\theta\right)\,\left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right).\vec{a}+\sin\theta\,\vec{a}\wedge\vec{u}.\end{aligned}$$

5) Pour $Q=(\cos\theta,\sin\theta\,\vec{a})$ dans S, on a $Q^{-1}=(\cos\theta,-\sin\theta\,\vec{a})$ et avec $M=(x,\vec{u})$, on a successivement :

$Q*M=(x\,\cos\theta-\sin\theta\,\vec{a}\cdot\vec{u},\,\cos\theta\,\vec{u}+x\,\sin\theta\,\vec{a}+\sin\theta\,\vec{a}\wedge\vec{u})$

$(Q*M)*Q^{-1}=(x\,,\,\cos2\theta\,\vec{u}+(1-\cos2\theta)\left(\vec{a}\cdot\vec{u}\right).\vec{a}+\sin2\theta\,\vec{a}\wedge\vec{u})$

qui est de la forme $(x,R_Q\left(\vec{u}\right))$, où, si $Q=\left(1,\vec{0}\right)$, alors $R_Q=\mathrm{Id}_E$, et sinon, R_Q est la rotation vectorielle de E d'axe dirigé par $\vec{a}$ et d'angle 2θ.

6) L'application

$$\begin{array}{rccc}\rho: & S & \to & O^+\left(E\right)\\ & Q & \mapsto & R_Q\end{array}$$

est trivialement surjective, et de plus :

$\forall M\in H,\ \Phi_{Q*Q'}\left(M\right)=\left(Q*Q'\right)*M*\left(Q*Q'\right)^{-1}=Q*\Phi_{Q'}\left(M\right)*Q^{-1}=\left(\Phi_Q\circ\Phi_{Q'}\right)\left(M\right)$.

D'où $R_{Q*Q'}=R_Q\circ R_{Q'}$ et ρ est un morphisme surjectif de $(S,*)$ sur $\left(O^+\left(E\right),\circ\right)$.

$R_Q=R_{Q'}$ équivaut à $\begin{cases}\vec{a}=\vec{a}'\\\theta=\theta'\pmod{\pi}\end{cases}$ donc $Q=Q'$ ou $Q=-Q'$, et ρ n'est pas injectif.

Exercice 2

1) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et est équivalente à $t \mapsto \ln t$ au voisinage de 0, donc φ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Pour tout t de $]0,x]$, $\frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{1+t^2} \le 1$ donc $-1 \le \varphi(x) \le \frac{-1}{1+x^2}$ et $\lim\limits_{0^+} \varphi = -1$.

$\lim\limits_{+\infty} t^{3/2} \dfrac{\ln t}{1+t^2} = 0$ donc pour t assez grand, $\left|\frac{\ln t}{1+t^2}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}}$ ce qui établit l'existence de $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$.

Avec le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\, du$, et on a donc $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$.

2) La fonction $u \mapsto \sqrt{u} - \ln(1+u)$ a pour dérivée $u \mapsto \frac{\left(1-\sqrt{u}\right)^2}{2\sqrt{u}.(1+u)}$ donc est croissante sur $[0,+\infty[$. Comme elle prend la valeur 0 en 0, elle est positive sur $[0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$ fixé. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$, et d'après ce qui précède, $\dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \le \dfrac{\sqrt{x}\sqrt{t}}{1+t^2} \le \dfrac{\sqrt{x}}{t^{3/2}}$, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\, dt$.

La fonction $\alpha : (x,t) \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,A]\times[0,+\infty[$, et vérifie $0 \le \alpha(x,t) \le \sqrt{A}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2} = \varphi_A(t)$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_A$ converge, d'où la continuité de f sur $[0,A]$ puis sur $[0,+\infty[$.

3) Pour tout (x,t) de $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$ donc sur $[\varepsilon,+\infty[\times [0,+\infty[$

$$0 \le \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \le \frac{t}{(1+t^2)(1+\varepsilon t)} = \varphi_\varepsilon(t).$$

La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_\varepsilon$ et le résultat du **2)** montrent que f est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$, donc sur $]0,+\infty[$.

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \frac{1}{1+x^2}\frac{x+t}{1+t^2} - \frac{x}{1+x^2}\frac{1}{1+xt}.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt \\
&= \lim_{X\to+\infty} \int_0^{X} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt \\
&= \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+X^2} \ln\left(\frac{1+X^2}{(1+xX)^2}\right) + \frac{x}{1+x^2}\operatorname{Arctan}(X)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

4) Pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \\
&= \frac{\pi}{4}\ln\left(1+x^2\right) - \varphi(x).
\end{aligned}$$

On en déduit, puisque $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$,

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\ln x.$$

5) La fonction $u \mapsto \ln(1+u) - \frac{u}{1+u}$ a pour dérivée $u \mapsto \frac{u}{(1+u)^2}$, donc est croissante sur $[0,+\infty[$. Comme elle vaut 0 en 0, elle est positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt \\ &\geq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{xt}{(1+xt)(1+t^2)}\,dt \\ &\geq f'(x).\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ et f n'est pas dérivable en 0. La courbe représentative de f présente une tangente verticale en ce point.

Exercice 3

1) Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} 2\operatorname{sh}\theta - X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\left[X(X-2\operatorname{sh}\theta)-1\right] \\ &= (1-X)\left((X-\operatorname{sh}\theta)^2 - \operatorname{ch}^2\theta\right) \\ &= (1-X)\left(X-e^{\theta}\right)\left(X+e^{-\theta}\right).\end{aligned}$$

Pour tout θ, A est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Si $\theta = 0$, on peut prendre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ associés respectivement à 1 (double) et -1.

Si $\theta \neq 0$, on peut prendre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\theta}}}\begin{pmatrix} e^{\theta} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\theta}}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ e^{\theta} \end{pmatrix}$ associés respectivement à 1, e^{θ} et $-e^{-\theta}$.

2) En posant $\begin{cases} x' &= & x \\ y' &= & y-1 \\ z' &= & z \end{cases}$ l'équation de (S) devient :

$$2\operatorname{sh}\theta\, x'^2 + y'^2 + 2x'z' - 1 = 0,$$

qui est invariante par $(x',y',z') \leftarrow (-x',-y',-z')$ donc Ω est centre de symétrie de (S).
(S) est un hyperboloïde à une nappe (de révolution si $\theta = 0$). L'équation réduite

$$X^2 + \exp\theta Y^2 - e^{-\theta}Z^2 = 1$$

s'obtient dans le repère $\mathcal{R}_2$ d'origine Ω et de base la famille des vecteurs propres trouvée au **2**). La matrice de passage peut s'écrire, pour $\theta \neq 0$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & e^{\theta}/\sqrt{1+e^{2\theta}} & -1/\sqrt{1+e^{2\theta}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{1+e^{2\theta}} & e^{\theta}/\sqrt{1+e^{2\theta}} \end{pmatrix}.$$

On constate que cette matrice vaut aussi pour le cas $\theta = 0$. P étant orthogonale, pour tout θ de $\mathbf{R}$

$$P^{-1} = \tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ e^{\theta}/\sqrt{1+e^{2\theta}} & 0 & 1/\sqrt{1+e^{2\theta}} \\ -1/\sqrt{1+e^{2\theta}} & 0 & e^{\theta}/\sqrt{1+e^{2\theta}} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{cases} X &= y-1 \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\theta}}}\left(e^{\theta}x+z\right) \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\theta}}}\left(-x+e^{\theta}z\right) \end{cases}$$

3) Sections par $X = h$: $\begin{cases}\text{hyperboles d'axes transverses parallèles à } \Omega Y \text{ si } |h| < 1, \text{ et à } \Omega X \text{ si } |h| > 1 \\ \text{deux droites sécantes } Z = \pm e^{\theta} Y \text{ si } |h| = 1.\end{cases}$

Sections par $Z = k$: ellipses centrées sur ΩZ.

Avec $\theta = \ln 2$, on obtient pour sections :

par $X = 1$, les droites $Z = \pm 2.Y$, par $X = 3$, l'hyperbole $-\frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{16} = 1$,

et par $Z = 0$, l'ellipse $X^2 + 2Y^2 = 1$.

4) Avec $\gamma = \operatorname{Arctan} c$ la relation $a^2 + b^2 = 1 + c^2$ s'écrit $\cos^2\gamma\left(a^2+b^2\right) = 1$ d'où l'existence de α tel que

$$\begin{cases} a = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \\ b = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\gamma} \end{cases}$$

puis avec $\beta = \alpha + \gamma$, par les formules d'addition, $\begin{cases} a = \cos\beta + \tan\gamma\sin\beta \\ b = \sin\beta - \tan\gamma\cos\beta \end{cases}$

d'où les formules avec $\tan\gamma = c$.

5) En utilisant le **4)** avec $(a,b,c) = \left(X, e^{\frac{\theta}{2}}Y, e^{-\frac{\theta}{2}}Z\right)$, on obtient, pour tout $M(X,Y,Z)$ de (S), l'existence de v tel que $\begin{cases} X = \cos v + e^{-\frac{\theta}{2}}Z\sin v \\ e^{\frac{\theta}{2}}Y = \sin v - e^{-\frac{\theta}{2}}Z\cos v \end{cases}$

d'où en posant $u = e^{-\frac{\theta}{2}}Z$, $\begin{cases} X = \cos v + u\sin v \\ Y = e^{-\frac{\theta}{2}}\sin v - e^{-\frac{\theta}{2}}u\cos v\,. \\ Z = e^{\frac{\theta}{2}}u \end{cases}$

Lorsque (u,v) décrit $\mathbf{R}^2$, cela représente un paramétrage de (S).

Pour v fixé, la droite D_v est donc contenue dans (S) , et lorsque v décrit $\mathbf{R}$, les droites D_v engendrent (S).

(S) est donc le support de la nappe réglée paramétrée par:

$M(u,v) = P(v) + u\vec{K}(v)$ avec $P(v)\begin{pmatrix}\cos v \\ e^{-\frac{\theta}{2}}\sin v \\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{K}(v)\begin{pmatrix}\sin v \\ -e^{-\frac{\theta}{2}}\cos v \\ e^{\frac{\theta}{2}}\end{pmatrix}$.

Le produit mixte $\left[\vec{K}(v), \dfrac{d\vec{K}}{dv}, \dfrac{d\vec{P}}{dv}\right]$ vaut donc

$$\begin{vmatrix} \sin v & \cos v & -\sin v \\ -e^{-\frac{\theta}{2}}\cos v & e^{-\frac{\theta}{2}}\sin v & e^{-\frac{\theta}{2}}\cos v \\ e^{\frac{\theta}{2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} = e^{\frac{\theta}{2}}\left[e^{-\frac{\theta}{2}}\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)\right] = 1.$$

Il est non nul, donc (S) n'est pas développable.