Banque PT – Math II-A

Exercice n^{0}1:

1) Les plans d'équations $x\cos t + y\sin t - 1 = 0$ et $x - z\cos t = 0$ n'étant pas parallèles, les équations

$$\begin{cases} x\cos t + y\sin t - 1 = 0 \\ x - z\cos t = 0 \end{cases}$$

définissent bien une droite Δ_t pour tout réel t. On constate :

$\Delta_{t+2\pi} : \begin{cases} x\cos t + y\sin t - 1 = 0 \\ x - z\cos t = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta_{\pi-t} : \begin{cases} -x\cos t + y\sin t - 1 = 0 \\ x + z\cos t = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta_{-t} : \begin{cases} x\cos t - y\sin t - 1 = 0 \\ x - z\cos t = 0 \end{cases}$

donc $\Delta_{t+2\pi} = \Delta_t$; $\Delta_{\pi-t}$ se déduit de Δ_t par $(x,y,z) \leftarrow (-x,y,z)$
et Δ_{-t} se déduit de Δ_t par $(x,y,z) \leftarrow (x,-y,z)$.
On en déduit :

$$\boxed{\Delta_{t+2\pi} = \Delta_t \ ; \quad \Delta_{\pi-t} = S_{yOz}(\Delta_t) \ ; \quad \Delta_{-t} = S_{xOz}(\Delta_t) \ .}$$

Ainsi, $\mathcal{S}$ étant engendrée par les droites Δ_t pour t réel est obtenue toute entière lorsque t décrit un intervalle d'amplitude 2π, et est symétrique par rapport aux plans de coordonnées yOz et xOz, donc aussi par rapport à l'axe Oz.

2) Δ_t se projette orthogonalement sur xOy selon $\delta_t : \begin{cases} x\cos t + y\sin t = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
qui est la tangente au cercle de centre O de rayon 1 du plan xOy au point $m_t(\cos t, \sin t, 0)$; il en résulte :

$$\boxed{\Delta_t \text{ est tangente au cylindre de révolution d'axe } \left(O, \vec{k}\right) \text{ et de rayon 1.}}$$

Les points de contact sont les points de Δ_t se projetant orthogonalement sur xOy en m_t; en notant leurs coordonnées x, y, z, on a donc : $x = \cos t, y = \sin t$ et z vérifie $\quad \cos t - z\cos t = 0$, soit :
- si $t \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$: $z = 1$;
- si $t = \varepsilon\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$: $z \in \mathbb{R}$. $\Delta_{\varepsilon\frac{\pi}{2}}$ est alors la droite d'équations $x = 0, y = \varepsilon$ et c'est une génératrice du cylindre.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{un point de contact est situé dans le plan d'équation } z = 1.}$$

Le calcul précédent montre que pour tout réel t, Δ_t passe par $M_t : \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de Δ_t est : $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t\cos t \\ \cos^2 t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ (il est unitaire).

Le produit mixte $\left[\vec{u}_t, \vec{j}, \overrightarrow{OM}_t\right]$ vaut $\begin{vmatrix} -\sin t\cos t & 0 & \cos t \\ \cos^2 t & 1 & \sin t \\ -\sin t & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin t\cos t & \cos t \\ -\sin t & 1 \end{vmatrix} = 0$. Il en résulte :

$$\boxed{\Delta_t \text{ est coplanaire avec la droite } \left(O, \vec{j}\right).}$$

Réciproque :

♠ un paramétrage du cylindre de révolution d'axe $\left(O, \vec{k}\right)$ de rayon 1 est $t \mapsto (\cos t, \sin t, \lambda)$ $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$;
Toute droite D passant par un point de ce cylindre situé dans le plan d'équation $z = 1$ possède un paramétrage de la forme $\begin{cases} x = \cos t + u\alpha \\ y = \sin t + u\beta \\ z = 1 + u\gamma \end{cases}$ $\quad u \in \mathbb{R}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et t sont fixés.

$\clubsuit$ Cette droite D est incluse dans le plan tangent au cylindre le long de la génératrice de paramètre t d'équation $x\cos t + y\sin t = 1$ si et seulement si pour tout $u \in \mathbb{R}$: $\cos t(\cos t + u\alpha) + \sin t(\sin t + u\beta) = 1$, soit $\alpha\cos t + \beta\sin t = 0$;

$\diamondsuit$ D et Oy sont coplanaires si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cos t \\ \beta & 1 & \sin t \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \cos t \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \gamma\cos t = 0$;

$\heartsuit$ le système $\begin{cases} \alpha\cos t + \beta\sin t = 0 \\ \alpha - \gamma\cos t = 0 \end{cases}$ caractérise la direction de Δ_t;
D est donc la droite passant par M_t et de même direction que Δ_t : $D = \Delta_t$.

$$\boxed{\text{Toute droite tangente au cylindre en un point du plan } z = 1 \text{ et coplanaire avec } Oy \text{ est de la forme } \Delta_t.}$$

3) $\vec{u}_t$ étant unitaire, le projeté orthogonal H_t de O sur $\Delta_t = (M_t, \vec{u}_t)$ vérifie : $H_t = M_t + \left(\overrightarrow{M_tO}.\vec{u}_t\right)\vec{u}_t$.
$\overrightarrow{M_tO}.\vec{u}_t = \sin t\cos^2 t - \sin t\cos^2 t + \sin t = \sin t$.

$$M_t + \left(\overrightarrow{M_tO}.\vec{u}_t\right)\vec{u}_t = \begin{pmatrix} \cos t - \cos t\sin^2 t \\ \sin t + \sin t\cos^2 t \\ 1 - \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin t(1 + \cos^2 t) \\ \cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } H_t \text{ sont : } \left(\cos^3 t, \sin t(1 + \cos^2 t), \cos^2 t\right).}$$

$t \mapsto \left(\cos^3 t, \sin t(1 + \cos^2 t), \cos^2 t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc la courbe décrite par H_t pour $t \in \mathbb{R}$ est une courbe fermée, obtenue lorsque t décrit un intervalle d'amplitude 2π. De plus, les plans conservant la famille $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ obtenus au **1)** contiennent O, donc ce sont aussi des plans de symétrie pour la courbe décrite par H_t.
$t \mapsto H_t$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, cette courbe est rectifiable, et sa longueur l vérifie, compte-tenu des symétries : $l = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\|\frac{d\overrightarrow{H_t}}{dt}\right\| dt$

$$\frac{d\overrightarrow{H_t}}{dt} = \begin{pmatrix} -3\cos^2 t\sin t \\ \cos t + \cos^3 t - 2\sin^2 t\cos t \\ -2\cos t\sin t \end{pmatrix} = \cos t\begin{pmatrix} -3\sin t\cos t \\ 3\cos^2 t - 1 \\ -2\sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d\overrightarrow{H_t}}{dt}\right\|^2 &= \cos^2 t\left(9\sin^2 t\cos^2 t + 9\cos^4 t - 6\cos^2 t + 1 + 4\sin^2 t\right) \\ &= \cos^2 t\left(9\cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t) - 6\cos^2 t + 1 + 4 - 4\cos^2 t\right) \\ &= \cos^2 t\left(5 - \cos^2 t\right) \end{aligned}$$

On a donc $l = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left(5 - \cos^2 t\right)^{1/2} dt$ d'où, comme $2 \leq \left(5 - \cos^2 t\right)^{1/2} \leq \sqrt{5}$:
$8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \leq l \leq 4\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt$. On a bien :

$$\boxed{8 \leq l \leq 4\sqrt{5}}$$

4) Les intersections de $\mathcal{S}$ avec les trois plans de coordonnées sont les ensembles des points d'intersection de Δ_t avec ces trois plans lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.
• $\Delta_t \cap xOy$ est l'ensemble des points de E dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :

$$\begin{cases} x\cos t + y\sin t - 1 = 0 \\ x - z\cos t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\sin t = 1 \\ x = z = 0 \end{cases}$$

Cette intersection est non vide si $t \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, auquel cas il s'agit du point de coordonnées $(0, 1/\sin t, 0)$. Lorsque t décrit $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $1/\sin t$ décrit $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ donc

$$\boxed{\mathcal{S} \cap xOy \text{ est la réunion des demi-droites incluses dans } Oy \text{ telles que } |y| \geq 1.}$$

• De même, $\Delta_t \cap xOz$ est défini par : $\begin{cases} x\cos t + y\sin t - 1 = 0 \\ x - z\cos t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cos t = 1 \\ y = 0 \\ x - z\cos t = 0 \end{cases}$

Cette intersection est non vide si $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, auquel cas on a le point $(1/\cos t, 0, 1/\cos^2 t)$, qui est sur la parabole d'équation $z = x^2$ du plan $y = 0$. Lorsque t décrit $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $1/\cos t$ décrit $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ donc

$$\boxed{\mathcal{S} \cap xOz \text{ est la réunion des branches de la parabole } z = x^2 \text{ du plan } xOz \text{ telles que } z \geq 1.}$$

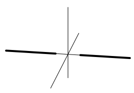
• Enfin, $\Delta_t \cap yOz$ est défini par : $\begin{cases} x\cos t + y\sin t - 1 = 0 \\ x - z\cos t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y\sin t = 1 \\ z\cos t = 0 \end{cases}$

qui est non vide si $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, alors il y a un unique point d'intersection de coordonnées $(0, 1/\sin t, 0)$.
- Sinon, l'intersection se compose des deux droites $x = 0, y = \pm 1$ déjà rencontrées au **2)**.

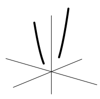
$$\boxed{\mathcal{S} \cap yOz \text{ est la réunion de } \mathcal{S} \cap xOy \text{ et des droites } x = 0, y = \pm 1.}$$

Représentations graphiques :

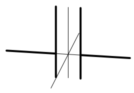
S inter xOy



S inter xOz



S inter yOz



5) $\mathcal{S}$ est la surface réglée engendrée par $\Delta_t = (M_t, \vec{u}_t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$, donc peut être paramétrée par : $(t, \lambda) \mapsto P(t, \lambda) = M_t + \lambda \vec{u}_t, \quad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, soit encore :

$$\begin{cases} x = \cos t - \lambda \sin t \cos t \\ y = \sin t + \lambda \cos^2 t \\ z = 1 - \lambda \sin t \end{cases} \qquad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2.$$

Si la surface est dévelopable, le plan tangent en un point régulier garde une direction fixe le long d'une génératrice, c'est-à-dire que sa normale ne dépend que de t. Calculons $\vec{n} = \left(\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} \wedge \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda}\right)(t, \lambda)$ en coordonnées cylindriques; en notant $\vec{p} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$ et $\vec{q} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$:

$M_t = O + \vec{p} + \vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{u}_t = \cos t\,\vec{q} - \sin t\,\vec{k}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(t, \lambda) &= \frac{d\vec{M}_t}{dt} + \lambda \frac{d\vec{u}_t}{dt} \\ &= \vec{q} + \lambda \left(-\sin t\,\vec{q} - \cos t\,\vec{p} - \cos t\,\vec{k}\right) \\ &= -\lambda \cos t\,\vec{p} + (1 - \lambda \sin t)\vec{q} - \lambda \cos t\,\vec{k} \end{aligned} \qquad \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \vec{u}_t$$

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (\lambda - \sin t)\vec{p} - \lambda \sin t \cos t\, \vec{q} - \lambda \cos^2 t\, \vec{k} \\ &= \lambda \left(\vec{p} - \cos t(\sin t\, \vec{q} + \cos t\, \vec{k})\right) - \sin t\, \vec{p} \\ &= \lambda \vec{n}_\infty + \vec{n}_0\end{aligned}$$

On constate que $P(t,\lambda)$ est stationnaire si et seulement si :
$(\lambda = 0$ et $t = 0 \pmod \pi)$ ou $(\lambda = \varepsilon \in \{-1,1\}$ et $t = \varepsilon\pi/2 \pmod{2\pi})$
ce qui fournit quatre points stationnaires de coordonnées : $(-1,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,-1,0)$, $(0,1,0)$.
D'autre part, les vecteurs $\vec{n}_\infty$ et $\vec{n}_0$ n'étant pas colinéaires pour tout t réel,

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ n'est pas développable.}}$$

6) On peut obtenir une équation de $\mathcal{S}$ en éliminant t entre les équations définissant Δ_t.
Le système linéaire en $\cos t$ et $\sin t$: $\begin{cases} x\cos t + y \sin t = 1 \\ z \cos t = x \end{cases}$
possède une solution unique si $yz \neq 0$, qui est :

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{z} \\ \sin t = \dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{x^2}{z}\right) \end{cases}$$

On en déduit la relation, valable pour tout point de $\mathcal{S}$ tel que $yz \neq 0$:
$\left(\dfrac{x}{z}\right)^2 + \dfrac{1}{y^2}\left(1 - \dfrac{x^2}{z}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{x^2}{z^2} = \dfrac{1}{y^2 z^2}\left(z - x^2\right)^2$.
C'est l'équation d'une surface incluse dans Σ : $y^2(z^2 - x^2) - (z - x^2)^2 = 0$.
D'autre part, si M est un point de $\mathcal{S}$ dont les coordonnées (x,y,z) sont telles que $yz = 0$, alors d'après l'étude du **4)** :
- si $y = 0$, alors en particulier $z = x^2$;
- si $z = 0$, alors en particulier $x = 0$.

On constate dans ces deux cas que M est aussi dans Σ. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est incluse dans } \Sigma.}$$

Les points de $\left(O, \vec{j}\right)$ tels que $y \in]-1,1[$ sont dans Σ mais pas dans $\mathcal{S}$.

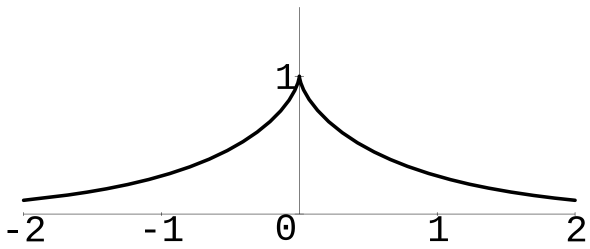
$$\boxed{\text{L'inclusion est stricte.}}$$

Exercice n^{0}2:

1) Étude de la courbe $\mathcal{C}_1$ de représentation paramétrique : $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = (t - \operatorname{th} t)\,\vec{i} + \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\,\vec{j} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.
x et y sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$;
x est impaire et y est paire, donc $\mathcal{C}_1$ est symétrique par rapport à Oy, et on peut réduire l'étude à $[0, +\infty[$.
Pour tout t de $\mathbb{R}$,
$x'(t) = 1 - (1 - \operatorname{th}^2 t) = \operatorname{th}^2 t \geq 0$
$y'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$ est du signe de $-t$.
On en déduit le tableau de variations suivant:

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$-$	
$y(t)$	1	$\searrow$	0

qui montre que l'axe Ox est asymptote, la courbe étant au-dessus.
De plus, le point de paramètre 0 est stationnaire.
$\forall t \in \mathbb{R},\ (x'(t), y'(t)) = \left(\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}, -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\right) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}(\operatorname{sh} t, -1)$
donc le vecteur de coordonnées $(\operatorname{sh} t, -1)$ dirige la tangente en tout point; en particulier la tangente au point $(0, 1)$ est verticale.



2) Une équation de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}_1$ au point M de coordonnées $(x(t), y(t))$ est donnée par :
$\begin{vmatrix} x - t + \operatorname{th} t & -\operatorname{sh} t \\ y - 1/\operatorname{ch} t & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - t + \operatorname{th} t + y \operatorname{sh} t - \operatorname{th} t = 0.$

$$\boxed{\Delta : x + y \operatorname{sh} t - t = 0}$$

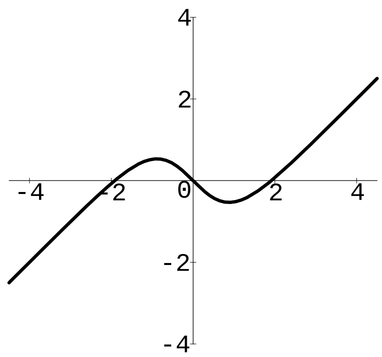
Δ coupe Ox au point T de coordonnées $(t, 0)$.
$\overrightarrow{MT}$ a pour coordonnées $(\operatorname{th} t, -1/\operatorname{ch} t)$ donc $MT^2 = \operatorname{th}^2 t + 1/\operatorname{ch}^2 t = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ de } \mathcal{C}_1, \quad MT = 1.}$$

3) $\varphi : t \mapsto t - 2\,\mathrm{th}\, t$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport au point O, et on peut réduire l'étude à $\mathbb{R}_+$.
$\varphi'(t) = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{ch}^2\, t} = \dfrac{\mathrm{ch}^2\, t - 2}{\mathrm{ch}^2\, t}$ est du signe de $\mathrm{ch}\, t - \sqrt{2}$.
ch induisant une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, il existe un unique réel positif t_0 tel que $\mathrm{ch}\, t_0 = \sqrt{2}$.

t	0		t_0		$+\infty$
$\varphi'(t)$	-1	$-$	0	$+$	
$\varphi(t)$	0	$\searrow$	m_0	$\nearrow$	$+\infty$

Avec une calculatrice : $t_0 \approx 0,88$ et $m_0 \approx -0,53$.
$\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{th}\, t = 1$ donc la droite d'équation $y = t - 2$ est asymptote à la courbe de φ. Comme pour tout t de $\mathbb{R}$, $\mathrm{th}\, t < 1$, la courbe est globalement au-dessus.
Par symétrie, la droite d'équation $y = t + 2$ est aussi asymptote, la courbe de φ étant au-dessous.



4) Γ_α a pour équation : $x^2 + y^2 - 2\alpha x = 1 - \alpha^2 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + y^2 = 1$

$$\boxed{(\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{ est la famille des cercles centrés sur } Ox \text{ et de rayon } 1.}$$

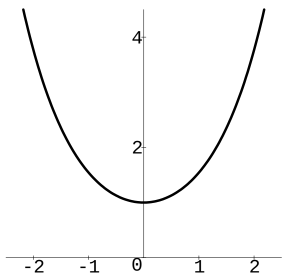
On note dans la suite $\Omega_\alpha(\alpha, 0)$ le centre de Γ_α.
Il existe un point M de paramètre t de $\mathcal{C}_1$ sur Γ_α si et seulement si t vérifie :
$(t - \alpha - \mathrm{th}\, t)^2 + \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, t} = 1$
$(t - \alpha)^2 - 2\,\mathrm{th}\, t\,(t - \alpha) + \mathrm{th}^2\, t + \left(1 - \mathrm{th}^2\, t\right) = 1$
$(t - \alpha)\,(t - \alpha - 2\,\mathrm{th}\, t) = 0$
donc $t = \alpha$, ou $\varphi(t) = \alpha$.
L'examen des variations de φ montre que l'équation $\varphi(t) = \alpha$ possède 1, 2 ou 3 solutions, et qu'il n'y a qu'une solution si et seulement si $|\alpha| > \alpha_0$ avec $\alpha_0 = |\varphi(t_0)| \approx 0,53$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \alpha_0 \approx 0,53 \text{ tel que, si } |\alpha| > \alpha_0, \text{ l'intersection de } \mathcal{C}_1 \text{ avec } \Gamma_\alpha \text{ se réduit à deux points.}}$$

Pour tout α de $\mathbb{R}$, la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point M de paramètre α rencontre Ox au point Ω_α, et $M\Omega_\alpha = 1$; M est donc sur Γ_α, et la tangente en M à Γ_α est orthogonale au rayon $[\Omega_\alpha M]$, donc à la tangente à $\mathcal{C}_1$ en M.

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha \text{ de } \mathbb{R}, \text{ les tangentes à } \mathcal{C}_1 \text{ et à } \Gamma_\alpha \text{ au point d'intersection } (\alpha - \operatorname{th}\alpha, 1/\operatorname{ch}\alpha) \text{ sont orthogonales.}}$$

5)



En notant $M(x, \operatorname{ch} x)$ le point courant de $\mathcal{C}_2$, $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dx} = (1, \operatorname{sh} x)$ donc une abscisse curviligne s vérifie $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$.

Le vecteur tangent unitaire est alors $\overrightarrow{T}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}, \operatorname{th} x\right)$.

En notant $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{T}\right)$ l'angle polaire de $\overrightarrow{T}$, on a donc $\quad \cos\theta = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \sin\theta = \operatorname{th} x$

d'où $\quad \tan\theta = \operatorname{sh} x \quad$ et $\quad \left(1 + \tan^2\theta\right)\dfrac{d\theta}{dx} = \operatorname{ch} x$, soit : $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \neq 0$.

Donc $\mathcal{C}_2$ est birégulière et le rayon de courbure au point d'abscisse x est donné par :
$\rho = \dfrac{ds}{d\theta} = \operatorname{ch}^2 x$

$$\boxed{\text{Le rayon de courbure au point } A \text{ d'abscisse } \alpha \text{ de } \mathcal{C}_2 \text{ est } \rho = \operatorname{ch}^2\alpha.}$$

La tangente (τ) en A à $\mathcal{C}_2$ a pour équation : $y - \operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh}\alpha(x - \alpha)$, soit encore :

$$\boxed{(\tau) : y = x\operatorname{sh}\alpha + \operatorname{ch}\alpha - \alpha\operatorname{sh}\alpha\ .}$$

6) Les tangentes aux points A_1 et A_2 de $\mathcal{C}_2$ d'abscisses respectives α_1 et α_2 sont orthogonales si et seulement si $\operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_2 = -1$. Avec cette condition,

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_1} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_2} = \frac{\operatorname{ch}^2\alpha_1 + \operatorname{ch}^2\alpha_2}{\operatorname{ch}^2\alpha_1\operatorname{ch}^2\alpha_2} = \frac{1 + \operatorname{sh}^2\alpha_1 + 1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2}{(1 + \operatorname{sh}^2\alpha_1)(1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2)}$$

$$= \frac{2 + \operatorname{sh}^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2}{1 + \operatorname{sh}^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2 + \operatorname{sh}^2\alpha_1\operatorname{sh}^2\alpha_2} = \frac{2 + \operatorname{sh}^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2}{1 + \operatorname{sh}^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2 + 1} = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 1}$$

7) En notant $M(t, \operatorname{ch} t)$ le point courant de $\mathcal{C}_2$, et en adaptant les notations du **5)**, une abscisse curviligne s vérifie $\dfrac{ds}{dt} = \operatorname{ch} t$, et on peut prendre $s = \operatorname{sh} t$.

Les développantes de $\mathcal{C}_2$ sont caractérisées par : $P = M + (\lambda - s)\overrightarrow{T}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Un paramétrage est donc donné par :

$$\begin{aligned} P(t) &= (t, \operatorname{ch} t) + (\lambda - \operatorname{sh} t)\left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \operatorname{th} t\right) = \left(t + \frac{\lambda}{\operatorname{ch} t} - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \operatorname{ch} t + \lambda \operatorname{th} t - \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\right) \\ &= \left(t - \operatorname{th} t + \frac{\lambda}{\operatorname{ch} t}, \frac{1}{\operatorname{ch} t} + \lambda \operatorname{th} t\right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ces développantes possèdent des branches infinies, qui sont obtenues lorsque $t \to \pm\infty$, auquel cas $x \to \pm\infty$ et $y \to \pm\lambda$. Ox est asymptote si et seulement si $\lambda = 0$. On reconnaît alors $\mathcal{C}_1$.

$$\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ est la développante de } \mathcal{C}_2 \text{ admettant l'axe } \left(O, \vec{i}\right) \text{ comme asymptote.}}$$

Exercice n^{0}3:

1) f étant symétrique, il existe une base orthonormale $(v_i)_{(1\leq i\leq n)}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f.

Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\exists(\xi_i)_{(1\leq i\leq n)},\ x=\displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i v_i$.
En notant λ_i la valeur propre associée à v_i, on a :
$f(x)=\sum\limits_{i=1}^n \xi_i\lambda_i v_i$ d'où $f(x)\cdot x=\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i\xi_i^2\leq\sum\limits_{i=1}^n \alpha\xi_i^2=\alpha\|x\|^2$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad f(x)\cdot x\leq\alpha\|x\|^2}$$

Il y a égalité si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^n(\alpha-\lambda_i)\xi_i^2=0$ soit si et seulement si $\forall i\in\{1\cdots n\},\ (\alpha-\lambda_i)\xi_i^2=0$.
On n'a pas : $\forall i\in\{1\cdots n\},\ \lambda_i=\alpha$, car sinon $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et pour $i\neq j,\ a_{ij}=0$.
Donc $I=\{i\in\{1\cdots n\},\lambda_i<\alpha\}\neq\emptyset$, et $\forall i\in I$, $\xi_i=0$ autrement dit x est dans le sous-espace propre associé à α.

$$\boxed{\text{L'égalité n'est atteinte que si } x \text{ est nul, ou un vecteur propre associé à } \alpha.}$$

Avec $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $\hat{x}=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$, on a :
$|f(x)\cdot x|=\left|\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j\right|\leq\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}|x_i||x_j|=f(\hat{x})\cdot\hat{x}\leq\alpha\|\hat{x}\|^2=\alpha\|x\|^2.$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad |f(x)\cdot x|\leq\alpha\|x\|^2}$$

2) En notant $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la première inégalité du **1)** fournit :
$f(e_1)\cdot e_1\leq\alpha\|e_1\|^2$ soit encore : $a_{11}\leq\alpha$, donc en particulier :

$$\boxed{\alpha>0}$$

Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé. Alors, $|f(x)\cdot x|=|\lambda x\cdot x|=|\lambda|.\|x\|^2$.
En utilisant la seconde inégalité du **1)**, on en déduit : $|\lambda|.\|x\|^2\leq\alpha\|x\|^2\Leftrightarrow(\alpha-|\lambda|)\,\|x\|^2\geq 0$.
Comme $\|x\|>0$, on a $\alpha-|\lambda|\geq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } f \text{ alors on a } |\lambda|\leq\alpha.}$$

3) $x=(x_1,\ldots,x_n)$ est ici un vecteur propre associé à α, donc $f(x)\cdot x=\alpha\|x\|^2$; soit $\hat{x}=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$.
On a : $\|\hat{x}\|=\|x\|$ donc $f(x)\cdot x=\alpha\|\hat{x}\|^2$
Par inégalité triangulaire, $\left|\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j\right|\leq\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}|x_i||x_j|$
Cela se traduit par : $|f(x)\cdot x|\leq f(\hat{x})\cdot\hat{x}\Leftrightarrow\alpha\|\hat{x}\|^2\leq f(\hat{x})\cdot\hat{x}$
D'après le **1)**, c'est une égalité, et toujours d'après le **1)**, cette égalité $f(\hat{x})\cdot\hat{x}=\alpha\|\hat{x}\|^2$ montre que $\hat{x}$ est un vecteur propre de f associé à α.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ un vecteur propre associé à } \alpha\text{, alors } \hat{x} \text{ est aussi un vecteur propre associé à } \alpha.}$$

Montrons que pour tout $i\in\{1\ldots n\},\ x_i\neq 0$ par l'absurde. Supposons par exemple $x_1=0$, et posons $y=\hat{x}+te_1$ ($t\in\mathbb{R}$). Alors :

$$\begin{aligned}
f(y)\cdot y &= (f(\hat{x})+tf(e_1))\cdot(\hat{x}+te_1)\\
&= (\alpha\hat{x}+tf(e_1))\cdot(\hat{x}+te_1)\\
&= \alpha\|\hat{x}\|^2+t\,(\alpha\hat{x}\cdot e_1+\hat{x}\cdot f(e_1))+t^2 f(e_1)\cdot e_1\\
&= \alpha\|x\|^2+t\hat{x}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i+t^2 a_{11}\\
&= \alpha\|x\|^2+t\sum_{i=2}^{n} a_{i1}|x_i|+t^2 a_{11}
\end{aligned}$$

D'autre part,
$\|y\|^2=\|x\|^2+t^2$
Donc $f(y)\cdot y-\alpha\|y\|^2=-t^2\,(\alpha-a_{11})+t\sum\limits_{i=2}^{n} a_{i1}|x_i|$.
e_1 n'est pas vecteur propre de f, sinon $a_{i1}=0$ pour $i\in\{2\ldots n\}$.
D'après l'étude du **1)** (cas d'égalité) : $f(e_1)\cdot e_1<\alpha\|e_1\|$, soit $\alpha-a_{11}>0$.
Comme $x_1=0$, $\exists i\in\{2..n\},\ x_i\neq 0$ sinon x ne peut être vecteur propre; il en résulte $\sum\limits_{i=2}^{n} a_{i1}|x_i|>0$.

Donc $f(y)\cdot y-\alpha\|y\|^2$ est un trinôme en t possédant deux racines distinctes 0 et $\dfrac{1}{\alpha-a_{11}}\displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_{i1}|x_i|$. Pour tout réel t entre ces racines, $f(y)\cdot y>\alpha\|y\|^2$, ce qui contredit le **1)**.

$$\boxed{\forall i\in\{1\ldots n\},\ x_i\neq 0}$$

Montrons que le sous-espace propre associé à α est de dimension 1 par l'absurde. Supposons par exemple avoir trouvé deux vecteurs propres associés à α linéairement indépendants $x=(x_1,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,\ldots,y_n)$. Alors le vecteur y_1x-x_1y est dans le sous-espace propre associé à α, il est non nul car (x,y) est libre, et sa première coordonnée est nulle; cela contredit le résultat précédent.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à } \alpha \text{ est de dimension 1.}}$$

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ étant un vecteur propre associé à α, $\hat{x}$ en est un également, ainsi que $\widetilde{x}=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}\hat{x}$.

De plus, ce vecteur s'écrit $\widetilde{x}=(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ avec:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_i>0 \quad \text{pour tout } i \text{ variant de 1 à } n,\\
\text{et } &\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=1
\end{aligned}$$

4) La somme des composantes de $f(\widetilde{x})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est :
$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\right)\tilde{x}_j=\sum\limits_{j=1}^{n} C_j\tilde{x}_j$. Comme $f(\widetilde{x})=\alpha\widetilde{x}$, c'est aussi $\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{x}_i=\alpha$.
On a donc :

$$\boxed{\alpha=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_jC_j \quad (*)}$$

$\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{x}_jC_j\leq\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\tilde{x}_j\max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}}C_k\right)=\max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}}C_k\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{x}_j=\max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}}C_k$.
On démontre de même l'inégalité avec le min.

$$\boxed{\min_{j\in\{1\ldots n\}} C_j\leq\alpha\leq\max_{j\in\{1\ldots n\}} C_j}$$

5) Supposons par exemple que $\dfrac{p_1}{q_1} = \max\limits_{j\in\{1,\ldots,m\}} \dfrac{p_j}{q_j}$. Alors $\dfrac{p_1}{q_1} - \dfrac{\sum\limits_{j=1}^m p_j}{\sum\limits_{j=1}^m q_j} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^m p_1 q_j - q_j p_1}{q_1 \sum\limits_{j=1}^m q_j} \geq 0$.

On démontre de même l'inégalité avec le min.

$$\boxed{\forall (p_j, q_j)_{1\leq j\leq m} \in ({\mathbb{R}_+^*}^2)^m, \qquad \min_{j\in\{1,\ldots,m\}} \frac{p_j}{q_j} \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^m p_j}{\sum\limits_{j=1}^m q_j} \leq \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} \frac{p_j}{q_j}}$$

6) Soit $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice canonique de f^2. Alors, $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} > 0$ et $b_{ij} = b_{ji}$, donc f^2 est dans $\mathcal{E}$.
Le spectre de f^2 est constitué des carrés des valeurs propres de f, et en utilisant le **2)**, si λ est une valeur propre de f alors $\lambda^2 \leq \alpha^2$ donc α^2 est maximale dans le spectre de f^2; de plus, $f(\widetilde{x}) = \alpha\widetilde{x} \Rightarrow f^2(\widetilde{x}) = \alpha^2\widetilde{x}$.

$$\boxed{f^2 \text{ est dans } \mathcal{E} \text{ et } \alpha^2 \text{ est la valeur propre maximale de } f^2 \text{ associée au vecteur propre } \widetilde{x}.}$$

Appliquons $(*)$ à f^2 : $\alpha^2 = \sum\limits_{j=1}^n \tilde{x}_j D_j$ où D_j désigne la somme des éléments de la j-ième colonne de B.
$D_j = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^n \left(\sum\limits_{i=1}^n a_{ik}\right) a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^n C_k a_{jk}$
D'où $\alpha^2 = \sum\limits_{j=1}^n \left(\tilde{x}_j \sum\limits_{k=1}^n a_{kj}C_k\right)$.
Appliquons $(*)$ à f : $\alpha = \sum\limits_{j=1}^n \tilde{x}_j C_j$.
En faisant le rapport, on obtient l'égalité demandée :

$$\boxed{\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^n \left(\tilde{x}_j \sum\limits_{k=1}^n a_{kj}C_k\right)}{\sum\limits_{j=1}^n \tilde{x}_j C_j}}$$

L'encadrement du **5)** s'applique à l'expression ci-dessus car les réels impliqués sont strictement positifs; après simplification par les $\tilde{x}_j$, on obtient :

$$\boxed{\min_{j\in\{1,\ldots,n\}} \frac{\sum\limits_{k=1}^n a_{kj}C_k}{C_j} \leq \alpha \leq \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \frac{\sum\limits_{k=1}^n a_{kj}C_k}{C_j}}$$

7) Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 2 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 2 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 2 \\ 0 & 3-X & 1 \\ 1+X & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1+X)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3-X & 1 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix}$$
$$= -(1+X)\left((X-3)^2 - 2\right) = -(X+1)\left(X - 3 - \sqrt{2}\right)\left(X - 3 + \sqrt{2}\right)$$

On a donc

$$\boxed{\alpha = 3 + \sqrt{2} \approx 4,41}$$

L'encadrement du **4)** fournit $4 \leq \alpha \leq 5$.
Celui du **6)** donne $4,25 \leq \alpha \leq 4,6$.