Banque PT – Math II-A

Exercice 1

1. La famille $\mathcal{F} = \big((x+h_k)^n\big)_{k=0,1,\dots,n}$ est une famille libre de E_n si et seulement si son déterminant dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ est non nul. La décomposition de $(x+h_k)^n$ dans cette base s'obtient par la formule du binôme, et on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} \mathrm{C}_n^0\, h_0^n & \mathrm{C}_n^0\, h_1^n & \dots & \mathrm{C}_n^0\, h_n^n \\ \mathrm{C}_n^1\, h_0^{n-1} & \mathrm{C}_n^1\, h_1^{n-1} & \dots & \mathrm{C}_n^1\, h_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{C}_n^n & \mathrm{C}_n^n & \dots & \mathrm{C}_n^n \end{vmatrix} = \det M_n \prod_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \neq 0$$

car les h_k sont deux à deux distincts.

$$\boxed{\big((x+h_k)^n\big)_{k=0,1,\dots,n} \text{ est une famille libre de } E_n.}$$

Cette famille comporte $n+1$ éléments, et $\dim E_n = n+1$; c'est donc une base de E_n, et en particulier, c'est aussi une famille génératrice. Il en va donc de même de la sur-famille $\big((x+h)^n\big)_{h\in\mathbb{R}}$.

$$\boxed{\big((x+h)^n\big)_{h\in\mathbb{R}} \text{ est une famille génératrice de } E_n.}$$

2. Notons T_h l'application de E_n dans lui-même définie pour tout polynôme P par $\forall x \in \mathbb{R},\quad T_h(P)(x) = P(x+h)$. On vérifie facilement que T_h est un endomorphisme de E_n, et que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ peut être défini par :

$$\mathcal{E}_n = \{\phi \in \mathcal{L}(E_n),\quad \forall h \in \mathbb{R},\quad \phi\circ T_h = T_h \circ \phi\}$$

Montrons que $\mathcal{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_n)$:

– $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$ car l'endomorphisme nul commute avec tout T_h.

– $\forall (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{E}_n^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R},$

$$\begin{array}{rcl|l} \phi_1 \circ T_h &=& T_h \circ \phi_1 & \times 1 \\ \phi_2 \circ T_h &=& T_h \circ \phi_2 & \times \lambda \\ \hline (\phi_1 + \lambda\,\phi_2)\circ T_h &=& T_h \circ (\phi_1 + \lambda\,\phi_2) & \end{array}$$

donc $\phi_1 + \lambda\,\phi_2 \in \mathcal{E}_n$.

De plus, $(\phi_2 \circ \phi_1)\circ T_h = \phi_2 \circ (\phi_1 \circ T_h) = \phi_2 \circ (T_h \circ \phi_1) = (\phi_2 \circ T_h)\circ \phi_1 = (T_h \circ \phi_2)\circ\phi_1 = T_h \circ (\phi_2 \circ \phi_1)$.

donc $\phi_2 \circ \phi_1 \in \mathcal{E}_n$.

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E_n) \text{ stable pour la composition des applications.}}$$

3. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall P \in E_n,\quad \big(P(x+h)\big)^{(k)} = P^{(k)}(x+h)$ (dérivée d'une composée), ce qui signifie que pour tout h de $\mathbb{R}$, $\phi_k \circ T_h = T_h \circ \phi_k$, soit encore

$$\boxed{\phi_k \text{ appartient à } \mathcal{E}_n.}$$

Par la formule de Taylor : $\forall P \in E_n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}$

$$P(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, P^{(k)}(x)$$

ce qui se traduit par :

$$T_h = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\,\phi_k \qquad (\star)$$

Prenons comme dans le 1. $n+1$ nombres réels deux à deux distincts $h_0, h_1, \dots, h_n$. En écrivant les équations $(\star)$ pour $h = h_0, h_1, \dots, h_n$ on obtient un système linéaire d'inconnues $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$, de déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!}\,h_0^n & \frac{1}{n!}\,h_1^n & \dots & \frac{1}{n!}\,h_n^n \\ \frac{1}{(n-1)!}\,h_0^{n-1} & \frac{1}{(n-1)!}\,h_1^{n-1} & \dots & \frac{1}{(n-1)!}\,h_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \det M_n \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \neq 0$$

La résolution de ce système permet donc d'exprimer ϕ_k comme combinaison linéaire de $T_{h_0}, T_{h_1}, \dots, T_{h_n}$. Soit alors $\phi \in \mathcal{E}_n$. ϕ commute avec $T_{h_0}, T_{h_1}, \dots, T_{h_n}$, donc avec toute combinaison linéaire de ces endomorphismes, et en particulier avec ϕ_k.

$$\boxed{\phi_k \text{ commute avec tout élément de } \mathcal{E}_n.}$$

Montrons que tout endomorphisme ϕ de $\mathcal{E}_n$ se décompose de manière unique sous forme de combinaison linéaire des $\phi_k,\ k = 0, 1 \dots, n$.

Supposons qu'une telle décomposition existe : $\phi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\phi_k$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\phi_k(x^n) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\frac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$

Le polynôme $\phi(x^n)$ de décompose de manière unique dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ de E_n; on en déduit l'unicité de la famille $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit maintenant la famille $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\frac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$.

On a successivement, pour tous réels x et h :

$$\begin{aligned} \phi\big((x+h)^n\big) &= \phi(x^n)(x+h) \quad \text{(par définition de } \mathcal{E}_n\text{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\frac{n!}{(n-k)!}\,(x+h)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\phi_k\big((x+h)^n\big) \end{aligned}$$

et les endomorphismes ϕ et $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\phi_k$, qui coïncident sur la famille génératrice $\big((x+h)^n\big)_{h\in\mathbb{R}}$, sont égaux; on a bien la décomposition $\phi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,\phi_k$.

$$\boxed{\text{La famille } (\phi_k)_{k=0,1,\dots,n} \text{ est une base de } \mathcal{E}_n.}$$

Exercice 2

1.1 La série $\sum_k u_k$ étant à termes positifs et convergente, à partir d'un certain rang n_0, $u_k \in [0,1[$.
Alors, $\ln\Big(\prod\limits_{k=n_0}^{n}(1-u_k)\Big) = \sum\limits_{k=n_0}^{n}\ln(1-u_k)$ est la somme partielle de rang n de la série $\sum_{k\geq n_0}\ln(1-u_k)$.
Or, comme la série $\sum_k u_k$ converge, son terme général u_k tend vers 0, et on a : $\ln(1-u_k) \sim -u_k$.
La règle des équivalents s'applique, puisque les séries considérées sont à termes de signe constant; donc la série $\sum_{k\geq n_0}\ln(1-u_k)$ converge.
Par définition, la suite de ses sommes partielles $\Big(\sum\limits_{k=n_0}^{n}\ln(1-u_k)\Big)_{n\geq n_0}$ converge.
Comme $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1-u_k) = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1}(1-u_k)\exp\Big(\sum\limits_{k=n_0}^{n}\ln(1-u_k)\Big)$, il en résulte :

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

1.2 D'après ce qui précède, en notant σ la somme de la série $\sum_{k\geq n_0}\ln(1-u_k)$, la limite L de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $L = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1}(1-u_k)\,e^{\sigma}$, et on a :
$L = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\ldots,n_0-1\},\ 1-u_k = 0.$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La limite de } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle si et seulement si l'un}\\ \text{au moins des termes de la suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est égal à 1.}\end{array}}$$

1.2 Comme $1+u_k > 0$ pour tout k, on a directement la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
– la série $\sum_{k\geq 0}\ln(1+u_k)$ est convergente car $\ln(1+u_k) \sim u_k$ (on a encore $u_k \to 0$)
– la suite $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge
– la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car $Q_n = \exp\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)\Big)$.

$$\boxed{\text{La suite } (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

2.1 Distinguons deux cas :
<u>1^er^ cas</u> : u_k tend vers 0
Alors on peut reprendre intégralement le 1.2 en remplaçant converge par diverge.
<u>2^ème^ cas</u> : u_k ne tend pas vers 0
Alors $\ln(1+u_k)$ ne tend pas vers 0 non plus, et la série $\sum_k \ln(1+u_k)$ est encore divergente.
La série considérée dans les deux cas étant à termes positifs et divergente, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$, et on peut préciser :

$$\boxed{\text{La suite } (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

2.2 Si de plus tous les u_k sont strictement inférieurs à 1, on peut adapter ce qui précède :
– la série $\sum_{k\geq 0}\ln(1-u_k)$ est divergente car ou bien $\ln(1-u_k) \sim -u_k$ (si $u_k \to 0$), ou bien $\ln(1-u_k) \not\to 0$ (dans le cas contraire)
– la suite $\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1-u_k)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles tend vers $-\infty$ (série à termes négatifs)
– la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car $P_n = \exp\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(1-u_k)\Big)$.

$$\boxed{\lim_{\infty} P_n = 0}$$

3. On procède de même qu'au 1. avec des valeurs absolues : si la série $\sum_k |u_k|$ est convergente, u_k tend vers 0, donc à partir d'un certain rang n_0, $u_k > -1$.

Considérons la série $\sum_{k\geq n_0} \ln(1+u_k)$.
Comme u_k tend vers 0, on a : $\ln(1+u_k) \sim u_k$, d'où $|\ln(1+u_k)| \sim |u_k|$ et la série $\sum_{k\geq n_0} \ln(1+u_k)$ est absolument convergente, donc convergente.
La suite de ses sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} \ln(1+u_k)\right)_{n\geq n_0}$ converge.
Comme $Q_n = \prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k) = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1}(1+u_k)\ \exp\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} \ln(1+u_k)\right)$, il en résulte :

$$\boxed{\text{La suite } (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

On fait de même qu'au 1.2 :
Soit τ la somme de la série $\sum_{k\geq n_0} \ln(1+u_k)$. La limite ℓ de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors : $\ell = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1}(1+u_k)\, e^{\tau}$,
et on a : $\quad \ell = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \ldots, n_0-1\},\ 1+u_k = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La limite de } (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle si et seulement si l'un} \\ \text{au moins des termes de la suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est égal à } -1.\end{array}}$$

4. Dans le cas particulier où $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \text{si } k \geq 1 \end{cases}$, étudions encore la série $\sum_{k\geq 0} \ln(1+u_k)$.
En utilisant le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $u \mapsto \ln(1+u)$: $\quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on obtient :
$\forall k \geq 1, \quad \ln(1+u_k) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1+o(1)}{2k}$
La série $\sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est alternée, la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant, donc cette série est convergente. La suite de ses sommes partielles tend vers une limite réelle.
Une série de la forme $\sum_{k\geq 1} \dfrac{1+o(1)}{2k}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, et vérifie $\dfrac{1+o(1)}{2k} \sim \dfrac{1}{2k}$.
Donc elle est divergente, et la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.
Il en résulte que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_{k\geq 0} \ln(1+u_k)$ tend vers $-\infty$.
Comme $Q_n = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right)$, on peut conclure :

$$\boxed{(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Exercice 3

1. C_1 est la courbe de paramétrage $\begin{cases} x = a\left(\cos\phi + \ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right) \\ y = a\sin\phi \end{cases}$, $\quad \phi \in]0,\pi[$.

$$x(\pi-\phi) = a\left(\cos(\pi-\phi) + \ln\left(\tan(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\phi}{2})\right)\right) = a\left(-\cos\phi + \ln\left(\frac{1}{\tan\frac{\phi}{2}}\right)\right) = a\left(-\cos\phi - \ln\left(\tan\tfrac{\phi}{2}\right)\right)$$
$$= -x(\phi)$$

et $y(\pi-\phi) = a\sin(\pi-\phi) = a\sin\phi = y(\phi)$ donc $\boxed{C_1 \text{ est symétrique par rapport à } (O;\vec{\jmath})}$ et on peut réduire l'étude à $]0,\frac{\pi}{2}]$.

x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, et pour tout ϕ de $]0,\frac{\pi}{2}]$,

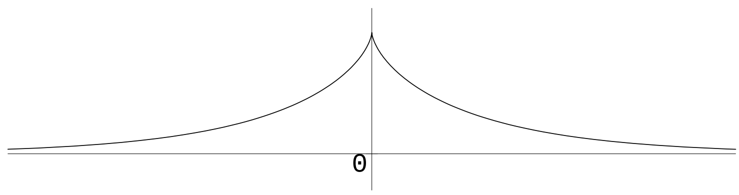
$$\begin{cases} x'(\phi) = a\left(-\sin\phi + \frac{1}{\sin\phi}\right) = a\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} \geq 0 \\ y'(\phi) = a\cos\phi \geq 0 \end{cases}$$

Le point $M(\frac{\pi}{2})$ est stationnaire. $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\phi} = a\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\left(\cos\phi\,\vec{\imath}+\sin\phi\,\vec{\jmath}\right)$ donc le vecteur unitaire $\vec{u}_\phi = \cos\phi\,\vec{\imath}+\sin\phi\,\vec{\jmath}$ dirige la tangente en tout point; en particulier, pour $\phi = \frac{\pi}{2}$, la tangente est verticale.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\phi\to0} \ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right) = -\infty, \text{ donc } \lim\limits_{\phi\to0} x(\phi) = -\infty \\ \lim\limits_{\phi\to0} y(\phi) = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{C_1 \text{ admet } (O;\vec{\imath}) \text{ pour asymptote.}}$$

Tableau de variations et courbe :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x'		$+$	0
x	$-\infty$	$\nearrow$	0
y'		$+$	0
y	0	$\nearrow$	a



2. Un point P du plan est sur la tangente en $M(\phi)$ si et seulement si ses coordonnées (x,y) vérifient : $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} x = a\left(\cos\phi + \ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right) + \lambda\cos\phi \\ y = a\sin\phi + \lambda\sin\phi \end{cases}$

Le point $T(M)$ d'intersection de cette droite et de l'axe $(O;\vec{\imath})$ est caractérisé par $\lambda = -a$.

Son abscisse est alors $x = a\ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)$, et le vecteur $\overrightarrow{MT(M)}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} a\cos\phi \\ a\sin\phi \end{pmatrix}$, et on en déduit :

$$\boxed{\text{La distance } MT(M) \text{ est constante, et vaut } a.}$$

3. Examinons la birégularité de C_1. $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\phi} = a\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\vec{u}_\phi$ donc, en notant $\vec{v}_\phi = \dfrac{d\vec{u}_\phi}{d\phi} = -\sin\phi\,\vec{\imath}+\cos\phi\,\vec{\jmath}$,

$\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\phi^2} = \dfrac{-a}{\sin^2\phi}\vec{u}_\phi + a\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}\vec{v}_\phi$, et ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\cos\phi = 0$, soit $\phi = \frac{\pi}{2}$.

C_1 se décompose donc en deux sous-arcs biréguliers, obtenus l'un pour $\phi\in]0,\frac{\pi}{2}[$ et l'autre pour $\phi\in]\frac{\pi}{2},\pi[$.

Compte tenu de la symétrie trouvée au 1. il suffit de déterminer la développée du sous-arc γ_1 correspondant à $\phi\in]0,\frac{\pi}{2}[$.

Notons s une abscisse curviligne sur γ_1. $\dfrac{ds}{d\phi} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\phi}\right\| = a\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$.

Le vecteur tangent unitaire est $\overrightarrow{T} = \vec{u}_\phi$, donc l'angle polaire $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{T}\right)$ a pour mesure $\alpha = \phi$.

Par définition, le rayon de courbure de γ_1 en $M(\phi)$ est $\mathcal{R} = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\phi} = a\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$.

Le vecteur normal unitaire est $\overrightarrow{N} = \vec{v}_\phi$, donc le centre de courbure de γ_1 en $M(\phi)$ est le point $\Omega = M(\phi) + \mathcal{R}\,\overrightarrow{N}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} X = a\,\Big(\cos\phi + \ln\big(\tan\frac{\phi}{2}\big)\Big) - a\,\cos\phi = a\,\ln\big(\tan\frac{\phi}{2}\big) \\ Y = a\,\sin\phi + a\,\dfrac{\cos^2\phi}{\sin\phi} = \dfrac{a}{\sin\phi} \end{cases} \quad , \quad \phi \in]0, \tfrac{\pi}{2}[.$$

La développée du sous-arc correspondant à $\phi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ se déduit de la précédente par symétrie par rapport à $(O;\vec{\jmath})$ ce qui revient à changer ϕ en $\pi - \phi$ dans le paramétrage précédent. On a donc :

$$\boxed{\text{La développée de } C_1 \setminus \{M(\pi/2)\} \text{ a pour paramétrage : } \begin{cases} X = a\,\ln\big(\tan\frac{\phi}{2}\big) \\ Y = \dfrac{a}{\sin\phi} \end{cases} \quad , \quad \phi \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\cup]\tfrac{\pi}{2}, \pi[.}$$

Un point Ω de coordonnées (X, Y) est sur cette développée si et seulement si

$$\exists\phi \in]0, \pi[\setminus\tfrac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} X = a\,\ln\big(\tan\frac{\phi}{2}\big) \\ Y = \dfrac{a}{\sin\phi} \end{cases} \iff \exists\phi \in]0, \pi[\setminus\tfrac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} \exp(X/a) = \tan\frac{\phi}{2} \\ Y = a\dfrac{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}{2\,\tan\frac{\phi}{2}} = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{\tan\frac{\phi}{2}} + \tan\frac{\phi}{2}\right) \end{cases}$$

$\iff \exists X \in \mathbb{R}^*, \quad Y = \dfrac{a}{2}\big(\exp(-X/a) + \exp(X/a)\big)$ car $\phi \mapsto \ln\big(\tan\frac{\phi}{2}\big)$ est une bijection de $]0, \pi[\setminus\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de cette développée est } \quad y = a\,\text{ch}\,\frac{x}{a},\ x \in \mathbb{R}^*.}$$

4. C_2 ayant pour équation cartésienne $y = a\,\text{ch}\,\dfrac{x}{a}$, $x \in \mathbb{R}_+$, une abscisse curviligne σ sur cette courbe est définie par $\dfrac{d\sigma}{dx} = \sqrt{1 + \text{sh}^2\,\dfrac{x}{a}} = \text{ch}\,\dfrac{x}{a}$.

La longueur de l'arc de C_2 entre les points d'abscisses 0 et x est donc :

$s = \displaystyle\int_0^x \text{ch}\,\frac{t}{a}\,\text{d}t = \Big[a\,\text{sh}\,\frac{t}{a}\Big]_0^x = a\,\text{sh}\,\frac{x}{a}.$

$$\boxed{\text{La longueur de l'arc de } C_2 \text{ d'origine } S \text{ et d'extrémité } P \text{ est } s = a\,\text{sh}\,\frac{x}{a}.}$$

Un vecteur directeur de la tangente en P à C_2 est $\dfrac{d\overrightarrow{P}}{dx} = \vec{\imath} + \text{sh}\,\dfrac{x}{a}\,\vec{\jmath}$, et $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{P}}{dx}\right\| = \dfrac{d\sigma}{dx} = \text{ch}\,\dfrac{x}{a}$ donc le vecteur tangent unitaire est $\overrightarrow{T_2} = \dfrac{1}{\text{ch}\,\frac{x}{a}}\,\vec{\imath} + \text{th}\,\dfrac{x}{a}\,\vec{\jmath}$.

Les points de la tangente en P à C_2 situés à distance s de P sont les points $Q = P + \varepsilon\, s\,\overrightarrow{T_2}$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
La condition $\overrightarrow{PQ}.\vec{\jmath} \leq 0$ équivaut à $\varepsilon\ \text{th}\,\dfrac{x}{a} \leq 0$, donc, comme $x \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon = -1$.

Le point Q a donc pour coordonnées : $\begin{cases} \xi = x - a\,\dfrac{\text{sh}\,\frac{x}{a}}{\text{ch}\,\frac{x}{a}} = x - a\ \text{th}\,\dfrac{x}{a} \\ \eta = a\ \text{ch}\,\dfrac{x}{a} - a\ \text{sh}\,\dfrac{x}{a}\ \text{th}\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{\text{ch}\,\frac{x}{a}} \end{cases}$

$$\boxed{\text{La courbe décrite par } Q \text{ lorsque } P \text{ parcourt } C_2 \text{ a pour paramétrage : } \begin{cases} \xi = x - a\ \text{th}\,\dfrac{x}{a} \\ \eta = \dfrac{a}{\text{ch}\,\frac{x}{a}} \end{cases} \quad , \quad x \in [0, +\infty[.}$$

Exercice 4

1. Notons $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.

S_1 est la surface de paramétrage $(r,\theta) \mapsto M_1(r,\theta) = O + r\,\vec{u}_\theta + a\,\theta\,\vec{k}$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
Pour tout (r,θ) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $M_1(r,\theta+2\pi) = O + r\,\vec{u}_{\theta+2\pi} + a\,(\theta+2\pi)\,\vec{k} = M_1(r,\theta) + 2\pi\,a\,\vec{k}$.

$$\boxed{\text{La translation de vecteur } 2\pi\,a\,\vec{k} \text{ conserve } S_1.}$$

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La ligne coordonnée $\theta = \theta_0$ de S_1 est définie par le paramétrage

$$r \mapsto M_1(r) = O + r\,\vec{u}_{\theta_0} + a\,\theta_0\,\vec{k}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

Il s'agit de la demi-droite ayant pour origine le point $H_0(0,0,a\,\theta_0)$ de $(O,\vec{k})$ et dirigée par $\vec{u}_{\theta_0}$.
Lorsque θ_0 décrit $\mathbb{R}$, ces demi-droites engendrent S_1.

$$\boxed{S_1 \text{ est une partie de surface réglée.}}$$

Examinons la régularité de S_1 : $\dfrac{\partial\overrightarrow{M_1}}{\partial r} = \vec{u}_\theta \qquad \dfrac{\partial\overrightarrow{M_1}}{\partial\theta} = r\,\vec{v}_\theta + a\,\vec{k}$.
Ces deux vecteurs sont orthogonaux et non nuls, donc non colinéaires; la surface S_1 est régulière.
La normale à S_1 au point M_1 est dirigée par $\dfrac{\partial\overrightarrow{M_1}}{\partial r} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{M_1}}{\partial\theta} = -a\,\vec{v}_\theta + r\,\vec{k}$.
Lorsque $\theta = \theta_0$ est fixé et r décrit $\mathbb{R}_+$, M_1 parcourt une génératrice (la demi-droite $(H_0,\vec{u}_{\theta_0})$).
r décrivant $\mathbb{R}_+$, les vecteurs $-a\,\vec{v}_{\theta_0} + r\,\vec{k}$ ne sont pas colinéaires donc la direction de la normale varie lorsque M_1 parcourt une génératrice.

$$\boxed{S_1 \text{ n'est pas développable.}}$$

2. Avec les notations de l'énoncé, le point courant M_1 de C_1 est défini par :
$M_1 = O + r(\theta)\,\vec{u}_\theta + a\,\theta\,\vec{k}$ où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$.
On a donc $\dfrac{d\overrightarrow{M_1}}{d\theta} = r'(\theta)\,\vec{u}_\theta + r(\theta)\,\vec{v}_\theta + a\,\vec{k}$ d'où la longueur de l'arc C_1 :

$$\boxed{s_1 = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2 + a^2}\,\mathrm{d}\theta.}$$

Pour $(r,\alpha,\beta) = (a\,\cos\theta, 0, 2\pi)$, on a : $s_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} a\,\sqrt{2}\,\mathrm{d}\theta = \boxed{2\pi\,a\,\sqrt{2}}$.
Le projeté orthogonal de M_1 sur le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est le point m_1 défini par

$$\theta \mapsto m_1(\theta) = O + a\,\cos\theta\,\vec{u}_\theta, \quad \theta \in [0,2\pi].$$

m_1 décrit donc le cercle d'équation polaire $\rho = a\,\cos\theta$ tangent en O à $(O;\vec{\jmath})$ et de diamètre de longueur a (parcouru deux fois).

$$\boxed{\text{La projection orthogonale de } C_1 \text{ sur le plan } (O;\vec{\imath},\vec{\jmath}) \text{ est un cercle.}}$$

3. Notons $\vec{p} = \cos v\,\vec{\imath} + \sin v\,\vec{\jmath}$ et $\vec{q} = \dfrac{d\vec{p}}{dv} = -\sin v\,\vec{\imath} + \cos v\,\vec{\jmath}$.

S_2 est la surface de paramétrage $(u,v) \mapsto M_2(u,v) = O + u\,\vec{p} + z(u)\,\vec{k}$, $(u,v) \in [a,+\infty[\times[0,2\pi]$, et le point courant M_2 de C_2 est défini par :
$M_2 = O + u(v)\,\vec{p} + z\big(u(v)\big)\,\vec{k}$ où u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\gamma,\delta]$.
On a donc $\dfrac{d\overrightarrow{M_2}}{dv} = u'(v)\,\vec{p} + u(v)\,\vec{q} + z'\big(u(v)\big)\,u'(v)\,\vec{k}$ d'où la longueur de l'arc C_2 :

$$s_2 = \int_\gamma^\delta \sqrt{u^2 + u'^2\,(1+z'^2)}\,\mathrm{d}v$$

$$z(u) = a\,\ln\left(\frac{u+\sqrt{u^2-a^2}}{a}\right) \quad \text{donc} \quad z'(u) = a\,\frac{1+\dfrac{u}{\sqrt{u^2-a^2}}}{u+\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{a}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$s_2 = \int_\gamma^\delta \sqrt{u^2+u'^2\,\left(1+\tfrac{a^2}{u^2-a^2}\right)}\,\mathrm{d}v = \int_\gamma^\delta \sqrt{u^2\,\left(1+\tfrac{u'^2}{u^2-a^2}\right)}\,\mathrm{d}v = \int_\gamma^\delta u\,\sqrt{\tfrac{u^2+u'^2-a^2}{u^2-a^2}}\,\mathrm{d}v \quad (u \geq 0)$$

$$\boxed{s_2 = \int_\gamma^\delta u\,\sqrt{\frac{u^2+u'^2-a^2}{u^2-a^2}}\,\mathrm{d}v.}$$

4. Le changement de paramètres sur S_2 défini par $\begin{cases} u = \sqrt{a^2+r^2} \\ v = \theta \end{cases}$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ est licite car (u, v) décrit alors $]a, +\infty[\times[0, 2\pi]$ (il manque le parallèle de S_2 du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$). Le nouveau paramétrage de S_2 est alors défini par

$$(r,\theta) \mapsto M_2(r,\theta) = O + \sqrt{a^2+r^2}\,\vec{u}_\theta + a\,z\big(\sqrt{a^2+r^2}\big)\,\vec{k} \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$$

En définissant une courbe tracée sur S_2 de manière analogue à ce qui a été fait au 2. on obtient

$$\theta \mapsto M_2(\theta) = O + \sqrt{a^2+r^2(\theta)}\,\vec{u}_\theta + a\,z\big(\sqrt{a^2+r^2(\theta)}\big)\,\vec{k} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{M_2}}{d\theta} &= \frac{r\,r'}{\sqrt{a^2+r^2}}\,\vec{u}_\theta + \sqrt{a^2+r^2}\,\vec{v}_\theta + \underbrace{z'\big(\sqrt{a^2+r^2}\big)}_{=\frac{a}{r}}\,\frac{r\,r'}{\sqrt{a^2+r^2}}\,\vec{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\,\left(r\,r'\,\vec{u}_\theta + (a^2+r^2)\,\vec{v}_\theta + a\,r'\,\vec{k}\right) \end{aligned}$$

donc la longueur d'un arc de cette courbe correspondant à $\theta \in [\alpha, \beta]$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\,\sqrt{r^2\,r'^2+(a^2+r^2)^2+a^2\,r'^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\,\sqrt{(a^2+r^2)\,(a^2+r^2+r'^2)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{a^2+r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

formule analogue à celle du 2.