Banque PT – Math II-A

Exercice I

1. Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[\alpha,\beta]$, alors
$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\alpha+k\tfrac{\beta-\alpha}{n}\right)$ (méthode des rectangles, bornes de gauche).

Par inégalité triangulaire, on a : $\displaystyle\left|\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1} H\left(\alpha+k\tfrac{\beta-\alpha}{n}\right)\right| \le \frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|H\left(\alpha+k\tfrac{\beta-\alpha}{n}\right)\right|$

D'où par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta H(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\alpha^\beta |H(x)|\,\mathrm{d}x.}$$

2. En appliquant cette inégalité à H^2, on a : $\displaystyle\left|\int_\alpha^\beta H^2(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\alpha^\beta \left|H^2(x)\right|\,\mathrm{d}x$ ce qui équivaut successivement à :

$$\left|\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)-Q^2(x)+2iP(x)Q(x)\right)\mathrm{d}x\right| \le \int_\alpha^\beta |H(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)-Q^2(x)\right)\mathrm{d}x + 2i\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\alpha^\beta \left(P^2(x)+Q^2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$\left(\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)-Q^2(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2 + 4\left(\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)+Q^2(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$4\left(\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)+Q^2(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)-Q^2(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2$$

$$4\left(\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)+Q^2(x)\right)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta \left(P^2(x)-Q^2(x)\right)\mathrm{d}x\right)\times \left(\int_\alpha^\beta \left(P^2(x)+Q^2(x)\right)\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta \left(P^2(x)-Q^2(x)\right)\mathrm{d}x\right)$$

$$4\left(\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta 2P^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_\alpha^\beta 2Q^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\left|\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left(\int_\alpha^\beta P^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_\alpha^\beta Q^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}$$

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right| - \left(\int_\alpha^\beta P^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_\alpha^\beta Q^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12} \le 0}$$

3. Remarquons que $\dfrac{1}{q} = 1-\dfrac{1}{p} < 1$ donc $q>1$, et la fonction $\varphi : b \mapsto \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q} - a\,b$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall b\in\mathbb{R}_+$, $\varphi'(b) = b^{q-1}-a$. Donc φ' est croissante et s'annule sur $\mathbb{R}_+$ pour $b = a^{\frac{1}{q-1}}$; son signe s'en déduit.
$\varphi\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - a^{1+\frac{1}{q-1}} = \dfrac{a^p}{p} + a^{\frac{q}{q-1}}\left(\dfrac{1}{q}-1\right)$. Mais comme $\frac{q-1}{q} = 1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, on a $\frac{q}{q-1} = p$,
d'où $\varphi\left(a^{\frac{1}{q-1}}\right) = a^p\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1\right) = 0$.

D'où le tableau :

b	0		$a^{\frac{1}{q-1}}$		$+\infty$
$\varphi'(b)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(b)$	$\frac{a^p}{p}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que pour tout b de $\mathbb{R}_+$, $\varphi(b) \geq 0$, et comme a est arbitrairement fixé dans $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\text{Pour tous réels positifs ou nuls } a \text{ et } b : \; a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.}$$

Le tableau de variations de φ montre que l'égalité a lieu si et seulement si $b = a^{\frac{1}{q-1}}$, auquel cas $b^q = a^{\frac{q}{q-1}} = a^p$.

$$\boxed{\text{L'égalité a lieu si et seulement si } a^p - b^q = 0.}$$

4. Remarquons que si $A = 0$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = 0$ et comme la fonction $x \mapsto |f(x)|^p$ est continue et positive sur $[\alpha, \beta]$, c'est la fonction nulle sur ce segment. On a alors $f = 0$, et les deux quantités à comparer sont nulles. Même chose si $B = 0$.

Sinon, en posant $a = \dfrac{f(x)}{A}$ et $b = \dfrac{g(x)}{B}$ et en appliquant ce qui précède aux réels positifs $|a|$ et $|b|$, on a :

$\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\dfrac{|f(x)\,g(x)|}{A\,B} \leq \dfrac{1}{p}\dfrac{|f(x)|^p}{A^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|g(x)|^q}{B^q}$ d'où en prenant les intégrales :

$\displaystyle\frac{1}{A\,B}\int_\alpha^\beta |f(x)\,g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p}\frac{\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \,\mathrm{d}x}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_\alpha^\beta |g(x)|^q \,\mathrm{d}x}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et comme $A\,B > 0$,

$\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)\,g(x)|\,\mathrm{d}x \leq A\,B$. On a donc, *a fortiori*, grâce au **1.** :

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.}$$

Lorsque $A\,B$ n'est pas nul, il y a égalité si et seulement si

$$\begin{cases} \displaystyle\frac{1}{A\,B}\int_\alpha^\beta |f(x)\,g(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\frac{\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \,\mathrm{d}x}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_\alpha^\beta |g(x)|^q \,\mathrm{d}x}{B^q} & (1) \\ \displaystyle\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_\alpha^\beta |f(x)\,g(x)|\,\mathrm{d}x & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B^q} - \frac{|f(x)\,g(x)|}{A\,B}\right)\mathrm{d}x = 0$ et comme l'intégrande est une fonction continue, positive, elle est nulle; d'après le **3.** on alors $|a|^p = |b|^q$, d'où $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)|^p = \lambda |g(x)|^q$.

D'autre part, (2) $\Leftrightarrow \forall x \in [\alpha, \beta]$, $f(x)\,g(x)$ a un argument constant.

Donc, oui les deux quantités peuvent être égales.

Exercice II

1. $t \mapsto \vec{\imath}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|\vec{\imath}(t)\|^2 = 1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $2\,\vec{\imath}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t) = 0$.

$t \mapsto \vec{\jmath}(t)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\vec{\imath}(t).\vec{\jmath}(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\vec{\imath}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{\jmath}(t) = 0$.

On obtient des relations analogues par permutations circulaires sur $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$, d'où

$$\begin{cases} \vec{\imath}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{\jmath}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{k}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{\jmath}(t) = -\vec{\imath}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t) = c(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{k}(t) = -\vec{\jmath}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}(t) = a(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{\imath}(t) = -\vec{k}(t).\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t) = b(t) \end{cases}$$

Décomposons le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t)$ dans la base orthonormale $\Big(\vec{\imath}(t), \vec{\jmath}(t), \vec{k}(t)\Big)$:

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{\imath}(t)\right)\vec{\imath}(t) + \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{\jmath}(t)\right)\vec{\jmath}(t) + \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t).\vec{k}(t)\right)\vec{k}(t) = c(t)\vec{\jmath}(t) - b(t)\vec{k}(t).$

On obtient de même, par permutations circulaires :

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t) = a(t)\vec{k}(t) - c(t)\vec{\imath}(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}(t) = b(t)\vec{\imath}(t) - a(t)\vec{\jmath}(t).$

En notant $\omega(t)$ le vecteur $a(t)\vec{\imath}(t) + b(t)\vec{\jmath}(t) + c(t)\vec{k}(t)$, on vérifie que

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t) = \omega(t) \wedge \vec{\imath}(t), \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t) = \omega(t) \wedge \vec{\jmath}(t), \quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}(t) = \omega(t) \wedge \vec{k}(t).}$$

Si $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors ses coordonnées dans la base $\Big(\vec{\imath}(t), \vec{\jmath}(t), \vec{k}(t)\Big)$ le sont, puisque par exemple $\xi(t) = \overrightarrow{V}(t).\vec{\imath}(t)$.

On a alors : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}(t) = \xi'(t)\,\vec{\imath}(t) + \xi(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{\imath}}{\mathrm{d}t}(t) + \eta'(t)\,\vec{\jmath}(t) + \eta(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{\jmath}}{\mathrm{d}t}(t) + \zeta'(t)\,\vec{k}(t) + \zeta(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}(t)$ donc

$$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V}}{\mathrm{d}t}(t) = \big(\xi'(t) + \zeta(t)b(t) - \eta(t)c(t)\big)\,\vec{\imath}(t) + \big(\eta'(t) + \xi(t)c(t) - \zeta(t)a(t)\big)\,\vec{\jmath}(t) + \big(\zeta'(t) + \eta(t)a(t) - \xi(t)b(t)\big)\,\vec{k}(t)}$$

2. En faisant dans le système différentiel $\begin{cases} A\,p'(t) + (C-B)\,q(t)\,r(t) = 0 & L_1 \\ B\,q'(t) + (A-C)\,r(t)\,p(t) = 0 & L_2 \\ C\,r'(t) + (B-A)\,p(t)\,q(t) = 0 & L_3 \end{cases}$

la combinaison $p\,L_1 + q\,L_2 + r\,L_3$, on obtient :

$A\,p(t)\,p'(t) + B\,q(t)\,q'(t) + C\,r(t)\,r'(t) + \big((C-B) + (A-C) + (B-A)\big)\,p(t)\,q(t)\,r(t) = 0$

$\Leftrightarrow A\,p(t)\,p'(t) + B\,q(t)\,q'(t) + C\,r(t)\,r'(t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{A}{2}\,p^2(t) + \dfrac{B}{2}\,q^2(t) + \dfrac{C}{2}\,r^2(t)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A\,p^2(t) + B\,q^2(t) + C\,r^2(t) = c_1$

Pour $t = 0$, $c_1 = A\,p_0^2 + B\,q_0^2 + C\,r_0^2 > 0$, donc $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$.

En faisant la combinaison $A\,p\,L_1 + B\,q\,L_2 + C\,r\,L_3$, on obtient :

$A^2\,p(t)\,p'(t) + B^2\,q(t)\,q'(t) + C^2\,r(t)\,r'(t) + \big(A(C-B) + B(A-C) + C(B-A)\big)\,p(t)\,q(t)\,r(t) = 0$

$\Leftrightarrow A^2\,p(t)\,p'(t) + B^2\,q(t)\,q'(t) + C^2\,r(t)\,r'(t) = 0$ et donc on obtient de même :

$\exists c_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A^2\,p^2(t) + B^2\,q^2(t) + C^2\,r^2(t) = c_2$ et on constate avec la valeur en 0 que $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} A\,p^2(t) + B\,q^2(t) + C\,r^2(t) = c_1 \\ A^2\,p^2(t) + B^2\,q^2(t) + C^2\,r^2(t) = c_2 \end{cases}}$$

3. Comme A, B, C et $\frac{c_2}{c_1}$ sont strictement positifs,

$$\boxed{\mathcal{E}_1 \text{ et } \mathcal{E}_2 \text{ sont des ellipsoïdes de centre } O.}$$

L'application $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ définit la projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{\imath}(t), \vec{\jmath}(t))$ de la courbe décrite par le point $M(t)$ dans le repère $\Big(O, \vec{\imath}(t), \vec{\jmath}(t), \vec{k}(t)\Big)$. On obtient une équation cartésienne d'une courbe la contenant en éliminant z entre les équations de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

$\begin{cases} A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1 & L_1 \\ A^2\,x^2 + B^2\,y^2 + C^2\,z^2 = \frac{c_2}{c_1} & L_2 \end{cases}$

Avec la combinaison $C\,L_1 - L_2$, on a : $A(C-A)x^2 + B(C-B)y^2 = C - \frac{c_2}{c_1}$.

Comme $A(C-A) > 0$ et $B(C-B) > 0$, on a une $\boxed{\text{ellipse}}$ de centre O, d'axes $\big(O;\vec{\imath}(t)\big)$ et $\big(O;\vec{\jmath}(t)\big)$ (l'énoncé admet que la courbe existe, donc nécessairement $\frac{c_2}{c_1} < C$).

De même, l'application $t \mapsto \big(y(t), z(t)\big)$ définit la projection orthogonale sur le plan $\Big(O;\vec{\jmath}(t),\vec{k}(t)\Big)$ de la courbe décrite par le point $M(t)$ dans le repère $\Big(O,\vec{\imath}(t),\vec{\jmath}(t),\vec{k}(t)\Big)$. On obtient une équation cartésienne d'une courbe la contenant en éliminant x entre les équations de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, et avec la combinaison $L_2 - A\,L_1$, on a :

$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = \frac{c_2}{c_1} - A$.

Comme $B(B-A) > 0$ et $C(C-A) > 0$, on a une $\boxed{\text{ellipse}}$ de centre O, d'axes $\big(O;\vec{\jmath}(t)\big)$ et $\big(O;\vec{k}(t)\big)$ (l'énoncé admet que la courbe existe, donc nécessairement $\frac{c_2}{c_1} > A$).

En faisant la combinaison $L_2 - A\,L_1$, on obtient que la projection orthogonale sur le plan $\Big(O;\vec{\imath}(t),\vec{k}(t)\Big)$ est incluse dans la courbe d'équation $-A(B-A)x^2 + C(C-B)z^2 = \frac{c_2}{c_1} - B$.

Comme $-A(B-A) < 0$ et $C(C-B) > 0$, on a une $\boxed{\text{hyperbole}}$ de centre O, d'axes $\big(O;\vec{\imath}(t)\big)$ et $\big(O;\vec{k}(t)\big)$, si $\frac{c_2}{c_1} \neq B$. Sinon, on obtient $\boxed{\text{deux droites sécantes}}$ d'équations $z = \pm\sqrt{\dfrac{A(B-A)}{C(C-B)}}\,x$; ces droites sont les asymptotes de l'hyperbole précédente.

4. Notons $\overrightarrow{N}$ le vecteur supposé constant $A\,p(t)\vec{\imath}(t) + B\,q(t)\vec{\jmath}(t) + C\,r(t)\vec{k}(t)$.

$\mathcal{E}_1$ a pour équation dans le repère $\Big(O,\vec{\imath}(t),\vec{\jmath}(t),\vec{k}(t)\Big)$: $A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1$, donc le plan tangent $\Pi(t)$ en $M(t)$ a pour équation dans ce repère : $\boxed{A\,x(t)\,x + B\,y(t)\,y + C\,z(t)\,z = 1.}$

Un vecteur normal est donc $A\,x(t)\,\vec{\imath}(t) + B\,y(t)\,\vec{\jmath}(t) + C\,z(t)\,\vec{k}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{c_1}}\,\overrightarrow{N}$.

Soit d la distance de O au plan $\Pi(t)$: $d = \dfrac{1}{\sqrt{A^2x^2(t) + B^2y^2(t) + C^2z^2(t)}} = \sqrt{\dfrac{c_1}{c_2}}$.

Le plan $\Pi(t)$ a une direction fixe, et sa distance à O est fixe; comme $t \mapsto \Pi(t)$ est continue, $\boxed{\Pi(t)\text{ reste fixe}}$ dans le repère $\Big(O,\vec{\imath}(t),\vec{\jmath}(t),\vec{k}(t)\Big)$; c'est l'un des deux plans de vecteur normal $\overrightarrow{N}$ et situé à distance $\sqrt{\dfrac{c_1}{c_2}}$ de O.

Exercice III

1. $\begin{cases} y''(x) = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y'(x) = c + \displaystyle\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y(x) = \displaystyle\int_a^x \left(c + \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t \\ y(b) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y(x) = c\,(x-a) + \displaystyle\int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t \\ y(b) = 0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} a \le t \le x \\ a \le s \le t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le s \le x \\ s \le t \le x \end{cases}$ et $(s,t) \mapsto f(s)$ est continue sur le domaine d'intégration, donc par la formule de Fubini, $\displaystyle\int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \left(\int_s^x f(s)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}s = \int_a^x (x-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s$.

Donc $\begin{cases} y''(x) = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y(x) = c\,(x-a) + \displaystyle\int_a^x (x-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s \\ y(b) = 0 \end{cases}$

Déterminons c : $c\,(b-a) + \displaystyle\int_a^b (b-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{b-a}\int_a^b (b-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s$.

On a donc une solution unique : $y(x) = -\dfrac{x-a}{b-a}\displaystyle\int_a^b (b-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s + \int_a^x (x-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s.$

Par la relation de Chasles : $y(x) = -\dfrac{x-a}{b-a}\displaystyle\int_a^x (b-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s - \dfrac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s + \int_a^x (x-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s$

$y(x) = -\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x \big((x-a)(b-s)-(b-a)(x-s)\big)\,f(s)\,\mathrm{d}s - \dfrac{1}{b-a}\int_x^b (x-a)(b-s)\,f(s)\,\mathrm{d}s$

Comme $(x-a)(b-s)-(b-a)(x-s) = -xs-ab+bs+ax = (s-a)(b-x)$, on a encore :

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x (s-a)(x-b)\,f(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{b-a}\int_x^b (s-b)(x-a)\,f(s)\,\mathrm{d}s.}$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc $G_1(s,x) = \dfrac{(s-a)(x-b)}{b-a}$ et $G_2(s,x) = \dfrac{(s-b)(x-a)}{b-a}$. Remarquons que ces polynômes prennent la même valeur pour $s = x$, à savoir $\dfrac{(x-b)(x-a)}{b-a}$. On peut mettre $y(x)$ sous la forme $y(x) = \displaystyle\int_a^b G(s,x)\,f(s)\,\mathrm{d}s$ en posant

$$\boxed{G : (s,x) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(s-a)(x-b)}{b-a} & \text{si } a \leq s \leq x; \\ \dfrac{(s-b)(x-a)}{b-a} & \text{si } x \leq s \leq b. \end{cases}}$$

2. On a $T_1 \cup T_2 = C$ et $T_1 \cap T_2 = \big\{(x,x),\ x \in [a,b]\big\}$ donc H est une application de C dans $\mathbb{R}$ si les valeurs attribuées à ses restrictions à T_1 et T_2 coïncident sur $T_1 \cap T_2$. On vérifie que $H(x,x) = (a-x)(b-x)$ dans les deux cas, donc :

$$\boxed{H \text{ est bien définie sur } C.}$$

On peut mettre $H(x,y)$ pour tout (x,y) de C sous la forme : $H(x,y) = \big(a - \min(x,y)\big)\big(b - \max(x,y)\big)$. Comme les fonctions $(x,y) \mapsto \min(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ sont continues sur C, H est continue sur C par opérations élémentaires.

Comme C est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$, son image par H est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, et en particulier, H admet un minimum absolu sur C. Comme par exemple $H(x,x) < 0$ pour tout x de $]a,b[$, ce minimum est strictement négatif.

$$\boxed{H \text{ admet une valeur minimale strictement négative sur } C.}$$

Notons ∂C la frontière du pavé C. Pour tout (x,y) de ∂C, $H(x,y) = 0$ donc le minimum absolu ne peut être atteint en un point frontière.

Soit $\overset{\circ}{T}_1$ l'ensemble T_1 privé de ses points frontières. $\overset{\circ}{T}_1$ est un ouvert, et H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{T}_1$, puisque c'est une fonction polynôme. Cherchons les points critiques de H sur $\overset{\circ}{T}_1$:

$\forall (x,y) \in \overset{\circ}{T}_1,\ \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) = -(a-y) > 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -(b-x) < 0 \end{cases}$ donc pas de point critique, et le minimum absolu ne peut être atteint en un point de cet ensemble.

On montre de même que le minimum absolu ne peut être atteint en un point de $\overset{\circ}{T}_2$.

Donc ce minimum est atteint en un point de la diagonale $\big\{(x,x),\ x \in]a,b[\big\}$.

$\forall x \in]a,b[,\quad H(x,x) = (a-x)(b-x) = x^2 - (a+b)x + a\,b = \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \dfrac{(b-a)^2}{4} \geq -\dfrac{(b-a)^2}{4}$

et $H(x,x) = -\dfrac{(b-a)^2}{4}$ si et seulement si $x = \dfrac{a+b}{2}$.

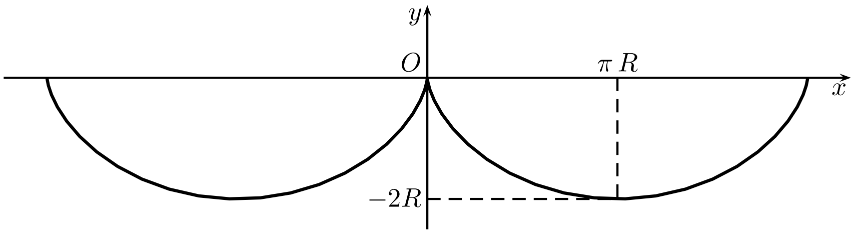
$$\boxed{\text{Le minimum de } H \text{ sur } C \text{ est } -\dfrac{(b-a)^2}{4}, \text{ atteint au centre de } C.}$$

Exercice IV

1. Pour k dans $\{-1,1\}$ et θ dans un intervalle approprié : $\begin{cases} x(\theta+2k\pi) = 2k\pi\, R + x(\theta) \\ y(\theta+2k\pi) = y(\theta) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(-\theta) = -x(\theta) \\ y(-\theta) = y(\theta) \end{cases}$ donc on peut réduire l'étude à $[0,\pi]$. Pour obtenir Γ, on complétera l'arc γ obtenu sur cet intervalle par son symétrique γ' par rapport à l'axe $(O;\vec{\jmath})$, par l'image de γ par la translation de vecteur $-2\pi\, R\vec{\imath}$ et par l'image de γ' par la translation de vecteur $2\pi\, R\vec{\imath}$.

$\forall \theta \in [0,\pi]$, $\begin{cases} x'(\theta) = R(1-\cos\theta) = 2R\sin^2\frac{\theta}{2} \geq 0 \\ y'(\theta) = -R\sin\theta = -2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \leq 0 \end{cases}$ et on voit que le vecteur unitaire $\vec{\tau}(\theta) = \sin\frac{\theta}{2}\vec{\imath} - \cos\frac{\theta}{2}\vec{\jmath}$ dirige la tangente en tout point de Γ. En particulier, pour $\theta = 0$ (point stationnaire) la tangente est verticale.

θ	0		π
$x'(\theta)$	0	$+$	
$x(\theta)$	0	$\nearrow$	$\pi\, R$
$y'(\theta)$	0	$-$	0
$y(\theta)$	0	$\searrow$	$-2\,R$



2. Sur l'intervalle $[0,2\pi]$, la longueur $s(\theta)$ de l'arc de Γ entre O et $M(\theta)$ coïncide avec l'abscisse curviligne sur Γ d'origine O. On a obtenu : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta} = 2R\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{\tau}(\theta)$ avec $\vec{\tau}(\theta)$ unitaire. Comme $2R\sin\frac{\theta}{2} \geq 0$ pour tout θ de $[0,2\pi]$, on a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}\right\| = 2R\sin\frac{\theta}{2}$.

On a donc, sur $[0,2\pi]$: $s(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta 2R\sin\tfrac{u}{2}\,\mathrm{d}u = 2R\Big[-2\cos\tfrac{u}{2}\Big]_0^\theta = 4R\left(1-\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$.

Comme la fonction obtenue est paire, l'expression $4R\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$ est encore valable pour la longueur de l'arc entre O et $M(\theta)$ si $\theta \in [-2\pi,0]$.

$$\boxed{\forall\theta \in [-2\pi,2\pi],\ s(\theta) = 4R\left(1-\cos\tfrac{\theta}{2}\right).}$$

3. On a $\vec{\tau}(\theta).\vec{\jmath} = -\cos\frac{\theta}{2} \leq 0$ pour tout θ de $[-\pi,\pi]$, donc

$$\boxed{\vec{\tau}(\theta) = \sin\tfrac{\theta}{2}\,\vec{\imath} - \cos\tfrac{\theta}{2}\,\vec{\jmath}.}$$

Notons (x_P, y_P) les coordonnées de $P(\theta)$. On a $P(\theta) = M(\theta) + 4R\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{\tau}(\theta)$ donc

$$\begin{cases} x_P = R(\theta-\sin\theta) + 4R\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = R(\theta-\sin\theta) + 2R\sin\theta = R(\theta+\sin\theta) \\ y_P = R(\cos\theta - 1) - 4R\cos^2\frac{\theta}{2} = R(\cos\theta-1) - 2R(\cos\theta+1) = R(-\cos\theta-3) \end{cases}$$

On constate que $M(\theta+\pi)$ a pour coordonnées $\begin{cases} x(\theta+\pi) = R(\theta+\pi+\sin\theta) = x_P + \pi\, R \\ y(\theta+\pi) = R(-\cos\theta - 1) = y_P + 2R \end{cases}$

Lorsque θ parcourt le segment $[-\pi,\pi]$, $M(\theta+\pi)$ parcourt l'arc de Γ correspondant à l'intervalle $[0,2\pi]$, donc l'arche de droite, et $P(\theta)$ décrit l'arche qui s'en déduit par la translation de vecteur $-\pi\, R\,\vec{\imath} - 2R\,\vec{\jmath}$.

$$\boxed{P(\theta) \text{ décrit l'image de } \Gamma \cap (x \geq 0) \text{ par la translation de vecteur } -\pi\, R\,\vec{\imath} - 2R\,\vec{\jmath}.}$$

4. On a : $\sigma(t) = s\big(\theta(t)\big) = 4R\left(1 - \cos\frac{\theta(t)}{2}\right)$ et $\vec{\tau}\big(\theta(t)\big).\vec{\jmath} = -\cos\frac{\theta(t)}{2}$, donc

$$\boxed{\vec{\tau}\big(\theta(t)\big).\vec{\jmath} = \frac{\sigma(t)}{4R} - 1.}$$

Il s'agit de résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} \sigma'' + \dfrac{g}{4R}\sigma = g \\ \sigma(0) = \sigma_0 \\ \sigma'(0) = 0 \end{cases}$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :
$\sigma_h(t) = A\,\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{4R}}\,t\right) + B\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{4R}}\,t\right) = A\,\cos\omega t + B\,\sin\omega t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.$
Une solution particulière de l'équation complète est : $\sigma_p(t) = 4R$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc $\big\{\sigma :\ t \mapsto 4R + A\,\cos\omega t + B\,\sin\omega t,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\big\}$.
$\sigma(0) = \sigma_0 \Leftrightarrow 4R + A = \sigma_0$ d'où $A = \sigma_0 - 4R$.
$\sigma'(t) = -A\,\sin\omega t + B\,\cos\omega t$ donc $\sigma'(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0$. L'unique solution est donc :

$$\boxed{\sigma :\ t \mapsto 4R + (\sigma_0 - 4R)\,\cos\omega t.}$$