Banque PT 2006 — épreuve B

Partie I

Question I.1
On reconnaît la définition bifocale d'une ellipse de foyers F et F'. Comme l'axe $(x'x)$ est l'axe focal et que le milieu de F et F' est en O, on a la chance d'être dans le repère habituel de travail, où l'équation de l'ellipse est réduite, sous la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec ici $2a=6$ et $2c=FF'=2\sqrt{5}$. Alors $b=\sqrt{a^2-c^2}=2$.
L'excentricité de l'ellipse est $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

Question I.2
L'équation de l'ellipse est $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Question I.3
Au point $M(t)$, on a $\vec{M}'(t)=(-3\sin t, 2\cos t)$ donc $\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{4+5\sin^2 t}$ et $\vec{T}=\dfrac{1}{\sqrt{4+5\sin^2 t}}(-3\sin t, 2\cos t)$, donc $\vec{N}=\dfrac{1}{\sqrt{4+5\sin^2 t}}(-2\cos t, -3\sin t)$.
Alors $\dfrac{d\vec{T}}{ds}=\dfrac{d\vec{T}}{dt}\Big/\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{(4+5\sin^2 t)^2}(12\cos t, 18\sin t)=\gamma\vec{N}$ donc $\gamma=\dfrac{6}{(4+5\sin^2 t)^{3/2}}$ et $R=\dfrac{(4+5\sin^2 t)^{3/2}}{6}$.

Question I.4
Alors le centre de courbure a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_I=3\cos t-\cos t\dfrac{4+5\sin^2 t}{3}=\dfrac{5\cos t}{3}(1-\sin^2 t)=\dfrac{5}{3}\cos^3 t \\ y_I=2\sin t-\sin t\dfrac{4+5\sin^2 t}{2}=-\dfrac{5}{2}\sin^3 t \end{cases}$$

Question I.5
Γ est le lieu du centre de courbure : c'est la développée de l'ellipse $\mathcal{E}$.
Quand t décrit $[0,\pi/2]$, $x_I(t)$ décroît de $5/3$ à 0 et $y_I(t)$ décroît de 0 à $-5/2$.
On observe qu'au voisinage de $t=0$, on dispose de $\begin{cases} x_I=\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{2}t^2+o(t^3) \\ y_I=-\dfrac{5}{2}t^3+o(t^3) \end{cases}$ de sorte qu'au point $(-5/3,0)$, la courbe Γ' présente une tangente horizontale de rebroussement de première espèce.
De même, au voisinage de $t=\pi/2$, posant $t=\pi/2-h$, on dispose de $\begin{cases} x_I=\dfrac{5}{3}h^3+o(h^3) \\ y_I=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{15}{4}h^2+o(h^3) \end{cases}$ de sorte qu'au point $(0,-5/2)$, la courbe Γ' présente une tangente verticale de rebroussement de première espèce.

Question I.6
On observe que $x_I(-t)=x_I(t)$ et $y_I(-t)=-y_I(t)$, donc que $I(-t)$ est le symétrique de $I(t)$ par rapport à l'axe $(x'x)$. Ainsi, en ajoutant à Γ' la courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on obtient une courbe Γ'' qui correspond à la partie de Γ pour $t\in[-\pi/2,\pi/2]$.
De même $x_I(\pi+t)=-x_I(t)$ et $y_I(\pi+t)=-y_I(t)$, donc $I(\pi+t)$ est le symétrique de $I(t)$ par rapport à l'origine. Ainsi, en ajoutant à Γ'' la courbe symétrique par rapport à l'origine, on obtient la courbe Γ tout entière, puisqu'il suffit évidemment de faire varier le paramètre t dans $[-\pi/2,3\pi/2]$.

La figure 1, page 2, présente Γ' en trait épais, Γ en trait fin et l'ellipse $\mathcal{E}$ en trait tireté.

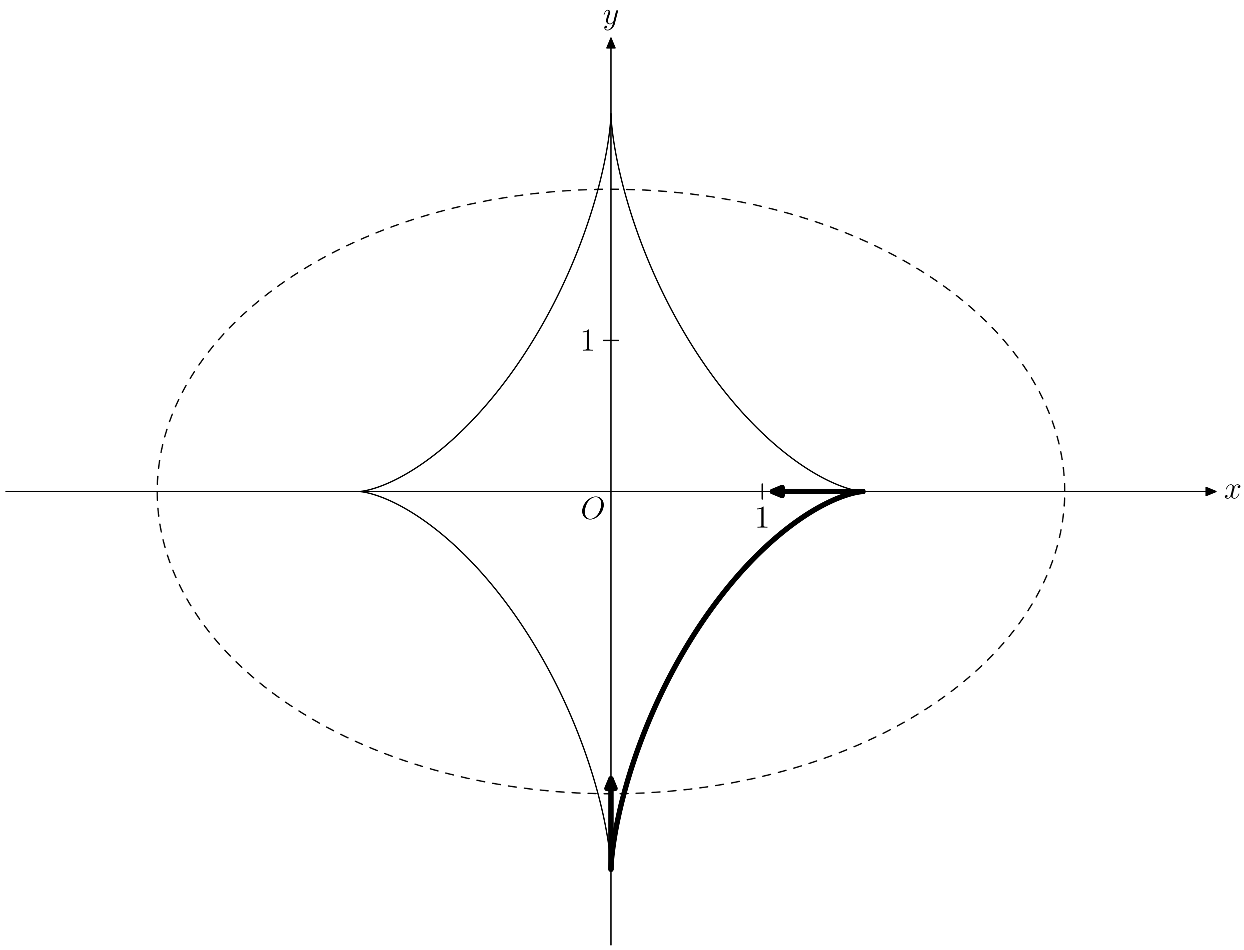

Figure 1 la courbe Γ et l'ellispe $\mathcal{E}$

Question I.7
On calcule le quart de l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la formule de Green-Riemann, en intégrant par exemple $-x_I\,dy_I$ sur $[0,\pi/2]$.

$$\mathcal{A} = -4\int_0^{\pi/2} \frac{5}{3}\cos^3 t(-\frac{15}{2}\sin^2 t\cos t)\,dt = 50\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^4 t\,dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on linéarise $\sin^2 t\cos^4 t = -\dfrac{\cos 6t}{36} - \dfrac{\cos 4t}{16} + \dfrac{\cos 2t}{32} + \dfrac{1}{16}$.
Finalement, $\mathcal{A} = \dfrac{25\pi}{16}$.

Question I.8

De même, la longueur de l'arc Γ est égale à quatre fois celle de Γ' : $\ell(\Gamma) = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{x_I'^2(t)+y_I'^2(t)}\,dt$.
Or $x_I'^2(t)+y_I'^2(t) = \dfrac{25}{4}\sin^2 t\cos^2 t(4\cos^2 t + 9\sin^2 t)$, et $\sqrt{x_I'^2(t)+y_I'^2(t)} = \dfrac{5}{2}\sin t\cos t\sqrt{4+5\sin^2 t}$.
Le changement de variable $u=\sin^2 t$ (donc $du = 2\sin t\cos t\,dt$) conduit à :

$$\ell(\Gamma) = 5\int_0^1\sqrt{4+5u}\,du = 5\left[\frac{2}{15}(4+5u)\sqrt{4+5u}\right]_0^1 = \frac{38}{3}.$$

Partie II

Question II.1

Quand θ décrit $[0, \pi/4]$, $\cos 2\theta$ décroît de 1 à 0, donc $\rho(\theta)$ décroît de $\sqrt{2}$ à 0.
ρ atteint un maximum pour $\theta = 0$: la tangente à $\mathcal{C}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$, donc verticale.
À l'origine, la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{u}(\pi/4)$ donc par la première bissectrice des axes.

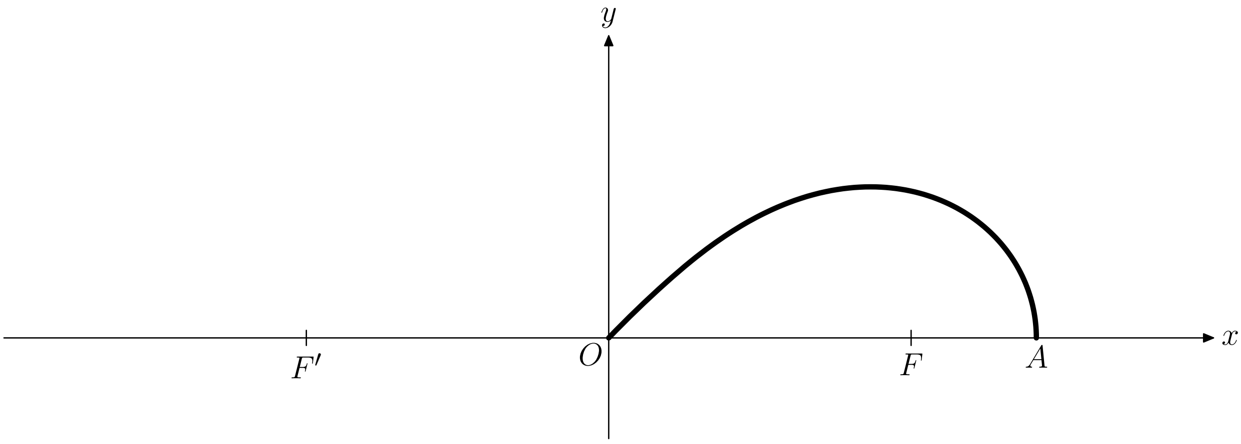

Figure 2 la courbe $\mathcal{C}$

Question II.2

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe $\mathcal{C}$, $MF^2 = (x-1)^2 + y^2 = x^2 + 1 + y^2 - 2x = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos\theta$ et $MF'^2 = (x+1)^2 + y^2 = x^2 + 1 + y^2 + 2x = \rho^2 + 1 + 2\rho\cos\theta$, donc

$$\begin{aligned} MF^2.MF'^2 &= (\rho^2+1)^2 - 4\rho^2\cos^2\theta = (1 + 2\cos 2\theta)^2 - 8\cos 2t\cos^2 t \\ &= (1 + 4\cos^2 t - 2)^2 - 8(2\cos^2 t - 1)\cos^2 t = 16\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 - 16\cos^4 t + 8\cos^2 t = 1. \end{aligned}$$

Cela montre bien que $MF.MF' = 1$.

Question II.3

On trouve $x'(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sin\theta\cos^2\theta(3 - 4\cos^2\theta)}{\cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}}$ et $y'(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sin^2\theta\cos\theta(1 - 4\cos^2\theta)}{\cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}}$.
On en déduit les variations des fonctions x et y sur $[0, \pi/4[$.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
x'	0	$-$	0	$+$	$\|$
y'	0	$-$		$-$	$\|$
x	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty\|$
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\searrow$	$-\infty\|$

Au voisinage de 0, on trouve $\begin{cases} x(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\theta^2 + o(\theta^3) \\ y(\theta) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\theta^3 + o(\theta^3) \end{cases}$ ce qui indique une tangente horizontale au point $B(2\sqrt{2}/3, 0)$.
Au voisinage de $\pi/4$, on pose $\theta = \dfrac{\pi}{4} - h$ d'où $x(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\cos^3(\pi/4 - h)}{\sqrt{\sin 2h}}$ et $y(\theta) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sin^3(\pi/4 - h)}{\sqrt{\sin 2h}}$.
Ainsi $x(\theta) \sim \dfrac{1}{3\sqrt{2h}}$ et $y(\theta) \sim -\dfrac{1}{3\sqrt{2h}}$.

On évalue donc $x(\theta)+y(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\cos^3(\pi/4-h)-\sin^3(\pi/4-h)}{\sqrt{\sin 2h}}$.

Or

$$\begin{aligned}\cos^3\theta-\sin^3\theta &= (\cos\theta-\sin\theta)(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)\\ &\sim \frac{3}{2}(\cos(\pi/4-h)-\sin(\pi/4-h)) = \frac{3}{2}(\sin(\pi/4+h)-\sin(\pi/4-h))\\ &\sim \frac{3}{2}2\cos\frac{\pi}{4}\sin h = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin h \sim \frac{3h}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

donc, finalement, $x(\theta)+y(\theta)\sim\sqrt{2h}$ et la droite d'équation $x+y=0$ (c'est-à-dire la deuxième bissectrice des axes) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}'$.

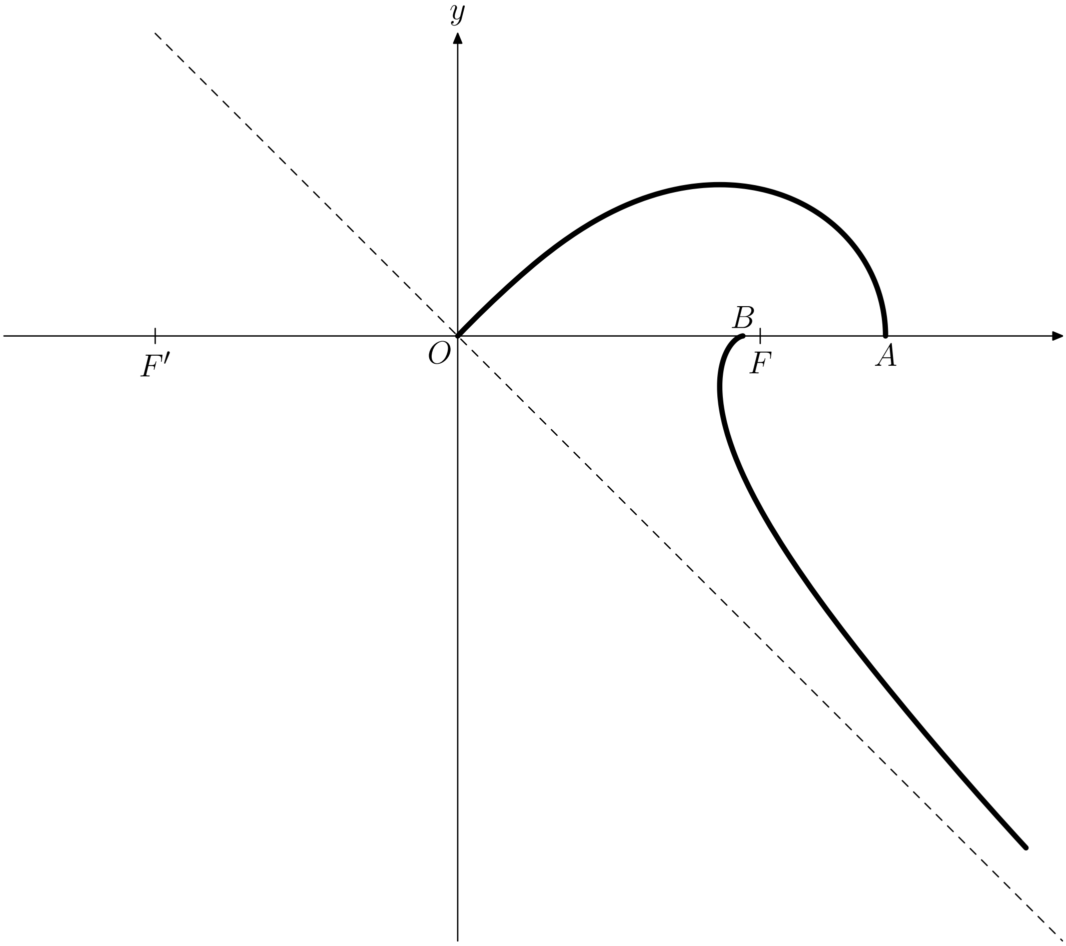

Figure 3 les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

Question II.4

L'aire demandée vaut

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/4}\frac{\rho^2(\theta)}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

C'est-à-dire que $\mathcal{A}$ vaut une demi unité d'aire, soit $8\,\mathrm{cm}^2$, puisqu'on a choisi une unité de 4 cm sur chaque axe.

On pourrait montrer que $\mathcal{C}'$ n'est autre que la développée de $\mathcal{C}$. En outre $\mathcal{C}$ est le quart de la lemniscate de Bernoulli, qui n'est elle-même autre que Γ_1.

Partie III

Question III.1
Soit $M(x,y)$, on a $MF^2 = (x-1)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x+1)^2 + y^2$, de sorte que $(MF.MF')^2 = (x^2+y^2+1)^2 - 4x^2$ et qu'une équation de Γ_k est $(x^2+y^2+1)^2 = 4x^2 + k^2$.

Question III.2
Si on se restreint à l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $(x-1)^2(x+1)^2 = k^2$ ou encore $x^2 - 1 = \pm k$, ce qui fournit 4 points solutions si $0 < k < 1$, d'abscisses $\pm\sqrt{1 \pm k}$; 3 points si $k = 1$, d'abscisses 0 et $\pm\sqrt{2}$; et 2 points si $k > 1$, d'abscisses $\pm\sqrt{1+k}$.

Question III.3
III.3.a On a $\overrightarrow{OF'} = -\overrightarrow{OF}$, donc $MF^2 + MF'^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF})^2 + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OF})^2 = 2(OM^2 + OF^2) = 2OM^2 + OF^2 + OF'^2$.
III.3.b On vérifie que $(MF - MF')^2 + 2MF.MF' = MF^2 - 2MF.MF' + MF'^2 + 2MF.MF' = MF^2 + MF'^2$.
III.3.c On en déduit que $2OM^2 + 2 = MF^2 + MF'^2 \geqslant 2MF.MF'$, et, en particulier, si M est sur la courbe Γ_k, que $2OM^2 + 2 \geqslant 2k$ donc $OM^2 \geqslant k - 1$, ce qui n'est pas demandé !
Mais, dans un triangle ABC, on sait que $|AB - AC| \leqslant BC$, et donc ici on peut affirmer que $|MF - MF'| \leqslant FF' = 2$. Ainsi $2OM^2 + 2 \leqslant 2^2 + 2k$ donc $OM^2 \leqslant k + 1$. On a montré en conclusion que tout point M de Γ_k vérifie $k - 1 \leqslant OM^2 \leqslant k + 1$.

Question III.4
En partant directement de la définition $MF.MF' = k$, on vérifie que chacun des axes de coordonnées est axe de symétrie de Γ_k, donc l'origine du repère également.

Question III.5
$\mathcal{C}_k$ est le quart de Γ_k.
Son équation peut être réécrite $x^2 + y^2 + 1 = \sqrt{4x^2 + k^2}$ ou encore $y^2 = \sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)$, et comme $y \geqslant 0$, $y = \varphi_k(x)$ où on a posé $\varphi_k(x) = \sqrt{\sqrt{4x^2 + k^2} - (x^2 + 1)}$.

Question III.6
Remarquons que f_k n'est autre que φ_k.
III.6.a Le domaine D_k est l'ensemble des réels x positifs tels que $4x^2 + k^2 \geqslant (x^2+1)^2$, ce qui se réécrit $x^4 - 2x^2 + 1 \leqslant k^2$ ou encore $(x^2 - 1)^2 \leqslant k^2$. Cette inéquation équivaut à $-k \leqslant x^2 - 1 \leqslant k$.
Finalement $D_k = \begin{cases} [\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k}], & \text{si } k \leqslant 1 \text{ ;} \\ [0, \sqrt{1+k}], & \text{si } k \geqslant 1. \end{cases}$
III.6.b On obtient $f_k'(x) = \dfrac{x(2 - \sqrt{4x^2 + k^2})}{f_k(x)\sqrt{4x^2 + k^2}}$.
Aux bornes de D_k, on a $\sqrt{4x^2 + k^2} = x^2 + 1$ donc $2 - \sqrt{4x^2 + k^2} = 1 - x^2$.

- ▷ Si $k > 1$, $D_k = [0, \sqrt{1+k}]$. $f_k'(0) = 0$ mais, quand $x \to \sqrt{1+k}$, $f_k'(x) \to -\infty$.
- ▷ Si $k = 1$, $D_k = [0, \sqrt{2}]$. Au voisinage de 0, $f_k'(x) \sim \dfrac{x}{f_k(x)} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$. Au voisinage de $\sqrt{2}$, $f_k'(x)$ tend vers $-\infty$.
- ▷ Si $k < 1$, f_k' n'est pas définie aux bornes de D_k : elle tend vers $+\infty$ quand $x \to \sqrt{1-k}$, et vers $-\infty$ quand $x \to \sqrt{1+k}$.

III.6.c $f_k'(x)$ a le signe de $g_k(x) = 2 - \sqrt{4x^2 + k^2}$. On en déduit l'étude suivante :

- ▷ Si $k > 1$, sur $D_k = [0, \sqrt{1+k}]$, on a $k^2 \leqslant 4x^2 + k^2 \leqslant (k+2)^2$ donc $-k \leqslant g_k(x) \leqslant 2 - k$.
  - si $k \geqslant 2$, $g_k(x)$ reste négatif, et donc $f_k'(x)$ aussi.
  - si $1 < k < 2$, $g_k(x)$, donc $f_k'(x)$, s'annule en $\alpha_k = \sqrt{1 - k^2/4}$, est négatif sur $[0, \alpha_k]$ puis positif sur $[\alpha_k, \sqrt{1+k}]$.
- ▷ Si $k = 1$, $g_1(x)$ donc $f_1'(x)$ s'annule en $\alpha_1 = \sqrt{3}/2$, est négatif sur $[0, \alpha_1]$ et positif sur $[\alpha_1, \sqrt{2}]$.
- ▷ Si $0 < k < 1$, sur $D_k = [\sqrt{1-k}, \sqrt{1+k}]$, $g_k(x)$ varie dans $[-k, k]$. $g_k(x)$ donc $f_k'(x)$ s'annule en $\alpha_k = \sqrt{1 - k^2/4}$, est négatif sur $[0, \alpha_k]$ puis positif sur $[\alpha_k, \sqrt{1+k}]$.

III.6.d On va distinguer différents cas.

Pour $k \geqslant 2$.

x	0		$\sqrt{1+k}$
$f_k'(x)$	0	$-$	$-\infty$
$f_k(x)$	$\sqrt{k-1}$	$\searrow$	0

Pour $1 < k < 2$.

x	0		α_k		$\sqrt{1+k}$
$f_k'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f_k(x)$	$\sqrt{k-1}$	$\nearrow$	$k/2$	$\searrow$	0

Pour $k = 1$.

x	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		$\sqrt{2}$
$f_k'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

Pour $0 < k < 1$.

x	$\sqrt{1-k}$		α_k		$\sqrt{1+k}$
$f_k'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$k/2$	$\searrow$	0

Question III.7

Remarque : $\Gamma_{1/2}$ est en deux morceaux…

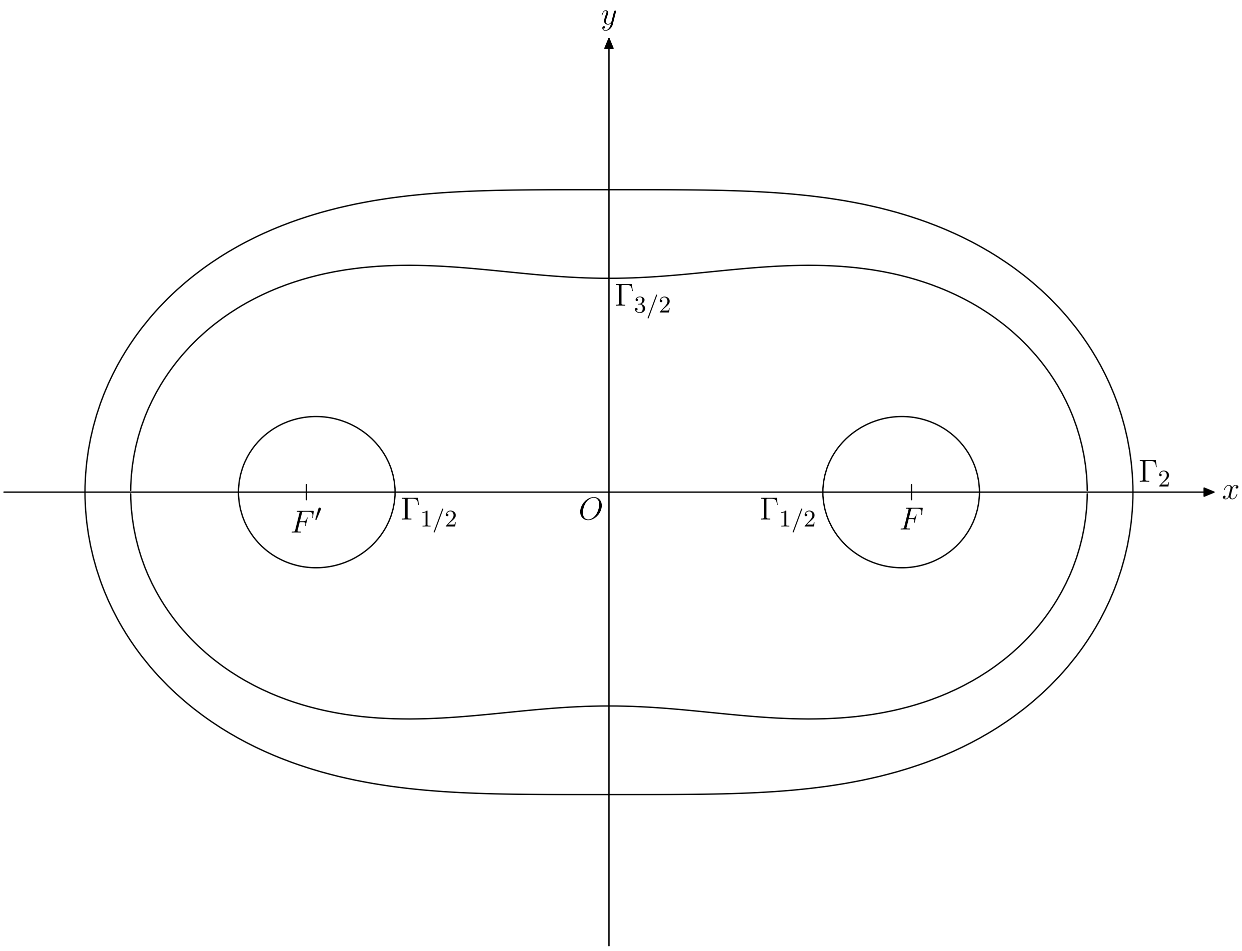

Figure 4 quelques courbes Γ_k