Centrale 2011. Option MP. Mathématiques II.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Caractérisation des matrices symétriques définies positives.

Dans toute la suite du problème on notera $(X|Y) = {}^tXY$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I.A - Les deux questions résultent immédiatement du fait que A est orthodiagonalisable pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ en tant que matrice symétrique réelle et donc que dans une base orthodiagonalisante on a ${}^tXAX = (X|AX) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_1)^2$ en notant (x'_i) les composantes de X dans cette base. $\square$

I.B.1) Notons B la forme bilinéaire symétrique définie positive i.e. le produit scalaire dont la matrice dans la base canonique est A et B_i la restriction de ce produit scalaire à $E_i \underset{\text{DEF}}{=} \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$.

B_i est naturellement un produit scalaire sur E_i et sa matrice dans la base $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$ est $A^{(i)}$ ce qui prouve que $A^{(i)}$ est définie positive. $\square$

I.B.2) Si $n = 1$ et A vérifie $\mathcal{P}_1$ alors $A = (a)$ avec $a > 0$ donc $A \in S_1(\mathbb{R})$.

Si $n = 2$ et A vérifie $\mathcal{P}_2$ alors $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$ (ce qui implique $b > 0$).

Or en notant (λ_1, λ_2) le spectre de A on a $\lambda_1 + \lambda_2 = a + b$ et $\lambda_1 \lambda_2 = ab - c^2$ donc la somme et le produit sont strictement positifs donc les valeurs propres également ce qui prouve que $A \in S_2(\mathbb{R})$ par la question I.B. $\square$

I.B.3) a) Comme A est symétrique réelle il existe une base orthonormée de vecteurs propres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+1})$ correspondant au spectre $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$.

Comme A n'est pas définie positive on a (quitte à changer la numérotation) $\lambda_1 \leqslant 0$.

Or $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i$ et $\det(A) > 0$ puisque A satisfait $\mathcal{P}_{n+1}$. Donc $\lambda_1 \neq 0$ d'où $\lambda_1 < 0$.

Mais comme $\prod\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i > 0$ il existe au moins un indice $p \geqslant 2$ tel que $\lambda_p < 0$. Quitte à renuméroter on suppose $p = 2$. Alors ε_1 et ε_2 sont bien deux vecteurs indépendants associés à des valeurs propres λ_1 et λ_2 (pas forcément distinctes) strictement négatives. $\square$

b) Notons α_1 et α_2 la dernière composante de ε_1 et ε_2 dans la base canonique.

- Si α_1 par exemple est nul alors ε_1 répond à la question car ${}^t\varepsilon_1 A \varepsilon_1 = (\varepsilon_1 | A\varepsilon_1) = \lambda_1 \|\varepsilon_1\|^2 = \lambda_1 < 0$.
- Si $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ considérons $X = \dfrac{1}{\alpha_1}\varepsilon_1 - \dfrac{1}{\alpha_2}\varepsilon_2$ dont la dernière composante est bien nulle. Il vient :

$${}^tXAX = (X|AX) = \Big(\frac{1}{\alpha_1}\varepsilon_1 - \frac{1}{\alpha_2}\varepsilon_2 \Big| \frac{1}{\alpha_1}\lambda_1\varepsilon_1 - \frac{1}{\alpha_2}\lambda_2\varepsilon_2\Big) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1^2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2^2} < 0$$

Ainsi dans tous les cas il existe X dont la dernière composante est nulle tel que ${}^tXAX < 0$. $\square$

c) Notons Y l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constitué des n premières composantes de X.

Avec des notations claires notons par blocs $X = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} A^{(n)} & C \\ L & a \end{pmatrix}$ (ainsi C est la colonne constituée des n premières composantes de la dernière colonne de A et L est la ligne formée des n premiers éléments de la dernière ligne de A).

Il vient $AX = \begin{pmatrix} A^{(n)}Y \\ LC \end{pmatrix}$ et donc ${}^tXAX = {}^tYA^{(n)}Y$.

Ainsi ${}^tYA^{(n)}Y < 0$ ce qui est impossible puisque $A^{(n)}$ vérifie évidemment $\mathcal{P}_n$ donc est définie positive par hypothèse de récurrence.

La propriété demandée est vraie au rang 1 et est héréditaire donc est établie pour tout entier n non nul. $\square$

I.C. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $A \in S_2(\mathbb{R})$, vérifie $\det A^{(1)} = 0 \geqslant 0$ et $\det A = 0 \geqslant 0$.

Cependant A n'est pas positive car -1 est valeur propre. $\square$

I.D. Dans la procédure qui suit une matrice A est représentée en mémoire par une liste de listes : la liste des lignes.

```
def_pos := proc(A)
   n := nops(A): k:=1: test:=evalb(A[1][1]>0): B:=[[A[1][1]]]:
   while (k<n) and (test=true) do
     B:=NULL:
     for i from 1 to k+1 do B:=B,A[i][1..k+1] od:
     B:=[B]:
     test:=evalb(det(B)>0):
     k:=k+1
   od:
   (k=n) and (det(A)>0)
 end:
```

II. Étude d'une suite de polynômes.

II.A. Elle est biléaire symétrique positive par positivité de l'intégration. En outre si $(P|P) = 0$ alors P s'annule sur $[0,1]$ par théorème de positivité "amélioré" et donc P est nul en tant que polynôme admettant une infinité de racines. □

II.B. P_n étant de degré $2n$, $P_n^{(n)}$ est de degré n.
Le coefficient de X^n est clairement $(-1)^n$ donc $P_n^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ par la formule de Taylor des polynômes.
Or $P_n(X) = P_n(1-X)$ donc $P_n^{(k)}(X) = (-1)^k P_n^{(k)}(1-X)$ d'où $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$.
En particulier $P_n^{(n)}(1) = n!$ □

II.C. $n! < Q, L_n >=< Q, P_n^{(n)} >= \left[QP_n^{(n-1)}\right]_0^1 - < Q', P_n^{(n-1)}] >$ par intégration par parties.
Or P_n étant de valuation n, il vient $P_n^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Donc on a aussi $P_n^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ par la question précédente.
Ainsi $< Q, P_n^{(n)} >=< Q', P_n^{(n-1)} >=< Q'', P_n^{(n-2)} >= \ldots =< Q^{(n)}, P_n^{(n)} >=< 0, P_n^{(n)} >= 0$.

En d'autres termes L_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour $n \geqslant 1$ et la famille (L_n) est donc une base (classiquement puisque L_n est de degré exactement n) orthonormale de $\mathbb{R}[X]$. □

II.D.1) Toujours par parties pour $n \geqslant 1$:
$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}\,t = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}\,\mathrm{d}\,t = \ldots = \frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}\,t.$$
Ainsi $I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ si $n \geqslant 1$ et $I_0 = 1$. □

II.D.2) Par parties en tenant compte de $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(1) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$:
$$< P_n^{n)}, P_n^{(n)} >=< P_n^{(n+1)}, P_n^{(n-1)} >= \ldots =< P_n^{(2n)}, P_n >=< (2n)!, P_n >= (2n)! I_n = \frac{(n!)^2}{2n+1}.$$
Comme $P_n^{(n)}(1) = n!$ il vient donc $< L_n, L_n >= \dfrac{1}{2n+1}$ □

II.E. Compte tenu de ce qui précède la famille (K_n) avec $K_n = \sqrt{2n+1}\ L_n$ répond à la question (le coefficient dominant de K_n étant $\sqrt{2n+1}\ \dfrac{(2n)!}{n!}$). □

Soit (Q_n) une famille vérifiant ces deux conditions. Alors nécessairement $Q_0 = 1 = K_0$.
Supposons que $Q_k = K_k$ pour $k \leqslant n$. Alors Q_{n+1} et K_{n+1} dirigent tous deux la droite supplémentaire orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ muni du produit scalaire $< .,. >$ donc sont proportionnels. Comme tous deux deux sont de norme 1, on a $Q_{n+1} = \pm K_{n+1}$ et finalement il y a égalité puisque les coefficients dominants sont positifs.
Ainsi par récurrence $Q_n = K_n$ pour tout entier n. □

II.F. Un calcul immédiat donne $K_0 = 1$, $K_1 = \sqrt{3}(2X-1)$ et $K_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$. □

III. Matrices de Hilbert.

III.A.1) Il vient immédiatement $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$

En résolvant par la méthode du pivot le système $\begin{cases} 6x+3y+2z=6a \\ 6x+4y+3z=12 \\ 20x+15y+12z=60c \end{cases}$ on obtient que H_3 est inversible et que $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$ □

III.A.2) En soustrayant la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres on obtient un déterminant dont l'élément de place (i,j) avec $j \leqslant n$ est $\dfrac{n+1-j}{(n+i)(i+j-1)}$ et celui de place $(i, n+1)$ inchangé soit $\dfrac{1}{n+i}$.

On peut donc mettre en facteur $\dfrac{1}{n+i}$ dans la ligne i et $n+1-j$ dans la colonne j avec $j \leqslant n$.

Ainsi $\Delta_{n+1} = \dfrac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} D_{n+1} = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!} D_{n+1}$ avec D_{n+1} le déterminant dont l'élément de place (i,j) avec $j \leqslant n$ est $\dfrac{1}{i+j-1}$ et la dernière colonne composée uniquement de 1.

En soustrayant la dernière ligne de D_{n+1} à toutes les autres on obient par développement suivant la dernière colonne que $D_{n+1} = D'_n$ où D'_n est le déterminant d'ordre n dont l'élément en place (i,j) est $\dfrac{n+1-i}{(n+j)(i+j-1)}$.

On peut donc mettre en facteur $n+1-i$ dans la ligne i et $\dfrac{1}{n+j}$ dans la colonne j.

Ainsi $D'_n = \dfrac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots 2n} \Delta_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \Delta_n$.

En concluson on a bien $\Delta_{n+1} = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \Delta_n$ □

III.A.3) Par une itération immédiate on en déduit $\Delta_n = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}} > 0$ □

III.A.4) Comme $\Delta_n \neq 0$, H_n est inversible. En outre :

$\Delta_{n+1}^{-1} = \alpha_n \Delta_n^{-1}$ avec $\alpha_n = \dfrac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4} = (2n+1)\Big(\dfrac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n!}\Big)^2 = (2n+1)\big(\mathrm{C}_{2n}^n\big)^2 \in \mathbb{N}$

Comme $\Delta_1^{-1} = 1$ on en déduit bien que $\det(H_n^{-1}) = \Delta_n^{-1} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \in \mathbb{N}$. □

III.A.5) Comme $H_n^{(k)} = H_k$ et que $\Delta_k > 0$ pour tout k, la matrice H_n est définie positive par la partie I. Donc ses valeurs propres sont strictement positives. □

III.B.1) Par le théorème de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie dans l'espace préhilbertien réel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< .|. >$, il existe un unique polynôme Π_n répondant à la question : la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$. □

III.B.2) Pour $g \in E$ on note $N(g) = \operatorname*{Sup}_{t \in [0,1]} |g(t)|$. Par positivité de l'intégration il vient $\|g\| \leqslant N(g)$.

Comme $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$ la suite $\big(\|f - \Pi_n\|\big)$ est évidemment décroissante donc converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Par ailleurs par le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes (R_n) convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers f (notons qu'on ne suppose pas que R_n soit de degré n).
Il vient alors pour tout entier n : $\ell \leqslant \|f - \Pi_n\| \leqslant \|f - R_n\| \leqslant N(f - R_n)$ donc $\ell \leqslant 0$ par passage à la limite.
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - \Pi_n\| = 0$ □

III.B.3) Immédiat par définition de la matrice d'une forme bilinéaire dans une base. □

On retrouve ainsi que H_n est définie positive sans passer par le pénible calcul des déterminants.

III.B.4) Puisque $(K_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, la formule de la projection orthogonale montre que $\Pi_n = \sum\limits_{i=0}^{n} < K_i, f > K_i$.

C'est à dire que la matrice des coefficients de Π_n sur la base (K_i) est $C'_{n+1} = \begin{pmatrix} < K_0, f > \\ < K_1, f > \\ \vdots \\ < K_n, f > \end{pmatrix}$

Notons P_{n+1} la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base (K_i).

La linéarité du produit scalaire montre alors que $C'_{n+1} = {}^tP_{n+1} \begin{pmatrix} < 1, f > \\ < X, f > \\ \vdots \\ < X^n, f > \end{pmatrix}$ (1).

Par ailleurs la matrice de $< .|. >$ dans la base (K_i) est Id_{n+1} et H_{n+1} dans la base canonique. Donc la formule de changement de base pour les formes bilinéaires montre que $({}^tP_{n+1})^{-1}P_{n+1}^{-1} = H_{n+1}$ (2)
La formule de changement de base pour les vecteurs montre que les composantes de Π_n sur la base canonique sont données par $C_{n+1} = P_{n+1}C'_{n+1}$. Les relations (1) et (2) prouvent alors que :

Les composantes de Π_n sur la base canoniques sont données par $H_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix} < 1, f > \\ < X, f > \\ \vdots \\ < X^n, f > \end{pmatrix}$ □

III.B.5) Dans l'exemple de l'énoncé, les composantes de Π_2 sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont donc données par

$$\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{2}\ln 2 \\ 1-\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$ □

IV. Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

IV.A.1 Avec III.A.1) il vient $s_1 = 1$, $s_2 = 4$ et $s_3 = 9$ de sorte qu'on peut conjecturer que $s_n = n^2$. □

IV.A.2) Le système proposé s'écrit $H_nX = U_n$ en notant U_n la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. Comme H_n est inversible, il admet une unique solution : $H_n^{-1}U_n$. □

Il en résulte que $a_i^{(n)}$ est la somme des termes de la ligne i de H_n^{-1} donc que $s_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$. □

IV.A.3) $< S_n, Q >= \sum\limits_{p=0}^{n-1}\Big(\alpha_p \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_q^{(n)} < X^p, X^q >\Big) = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\Big(\alpha_p \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_q^{(n)}}{p+q-1}\Big) = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\alpha_p$ d'après IV.A.2.a) □

IV.A.4) En particulier avec $Q = S_n$ il vient (d'après IV.A.2.b) $s_n =< S_n, S_n >= \sum\limits_{p=0}^{n-1}\beta_p^2$ en notant β_i les composantes de S_n sur la base orthonormée (K_p).

Notons $A_n = \begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix}$, $B_n = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$ et comme précédemment P_n la matrice de passage de la base canonique à la base (K_p).
Il vient $B_n = P_n^{-1}A_n = P_n^{-1}H_n^{-1}U_n$. Or par la relation (2) de III.B.3) on a $H_n^{-1} = P_n{}^tP_n$.
Donc $B_n = {}^tP_nU_n$ ce qui revient à dire que $\beta_p = K_p(1)$.

Ainsi $s_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} K_p(1)^2$ □

IV.A.5) Compte tenu de la partie I. $K_p(1) = \sqrt{2p+1}L_p(1) = \sqrt{2p+1}.\dfrac{1}{P_n^{(n)}(1)}.P_n^{(n)}(1) = \sqrt{2p+1}$ □

IV.A.5) Ainsi $s_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} 2p+1 = n^2$ □

IV.B.1) Pour $p \geqslant 1$: $2^p = (1+1)^p = 2\sum\limits_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_{2p}^k + \mathrm{C}_{2p}^p$ donc C_{2p}^p est bien un entier pair. □

Pour $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ il vient :
$\mathrm{C}_{n+p}^p\,\mathrm{C}_n^p = \dfrac{(n+p)!}{p!n!}\cdot\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{(n+p)!}{(n-p)!}\cdot\dfrac{1}{(p!)^2} = \dfrac{(n+p)!}{(n-p)!(2p)!}\cdot\dfrac{(2p)!}{(p!)^2} = \mathrm{C}_{n+p}^{n-p}\cdot\mathrm{C}_{2p}^p$
qui est bien un entier pair vu la question précédente. □

IV.B.2) D'après la partie II. il vient $\Lambda_n = L_n = \dfrac{1}{n!}P_n^{(n)}$ puisque $P_n^{(n)}(1) = n!$.

Notons $\Lambda_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} X^k$. Comme $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\,\mathrm{C}_n^k\,X^{n+k}$, il vient :
$\lambda_n^{(k)} = (-1)^{n-k}\,\mathrm{C}_n^k\,\dfrac{(n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)}{n!} = (-1)^k\,\mathrm{C}_n^k\,\mathrm{C}_{n+k}^k$ pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ et $\lambda_0^{(n)} = (-1)^n$.
Donc Λ_n est bien un polynôme à coefficients entiers. En outre d'après la question précédente tous ses coefficients sont pairs sauf le terme constant qui vaut $(-1)^n$. □

IV.B.3)

a) Avec les notations de IV.A.4) nous avons $H_n^{-1} = P_n\,{}^tP_n$ et la colonne j de P_n est constituée des composantes de K_{j-1} sur la base canonique donc son coefficient d'indice (i,j) est $p_{i,j}^{(n)} = \sqrt{2j-1}\cdot\lambda_{i-1}^{(j-1)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j$ et 0 sinon.

Donc $h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum\limits_{k=i}^{n}\left(p_{i,k}^{(n)}\right)^2 = \sum\limits_{k=i}^{n}(2k-1)\left(\lambda_{i-1}^{(k-1)}\right)^2$ est bien un entier d'après IV.B.2) $\square$

En particulier puisque $\lambda_0^{(k-1)} = (-1)^{k-1}$ il vient $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\left(\lambda_0^{(k-1)}\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ $\square$

De même $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1)\left(\lambda_{n-1}^{(n-1)}\right)^2$. Or $\lambda_{n-1}^{(n-1)} = (1)^{n-1}\,\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\,\mathrm{C}_{2(n-1)}^{n-1}$ par la question précédente.

Donc $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1)\left(\mathrm{C}_{2(n-1)}^{n-1}\right)^2$ $\square$

b) Considérons $i \leqslant j$. Il vient :

$h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum\limits_{k=j}^{n} p_{i,k}^{(n)} p_{j,k}^{(n)} = \sum\limits_{k=j}^{n}(2k-1)\lambda_{i-1}^{(k-1)}\lambda_{j-1}^{(k-1)} \quad (1)$

Comme H_n^{-1} est symétrique cette expression est valable pour tout couple (i,j) et prouve, d'après IV.B.2), que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers. $\square$

c) Comme $\lambda_r^{(s)}$ est divible par 2 pour $1 \leqslant r \leqslant s$ d'après IV.B.2), l'expression (1) ci-dessus montre en outre que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour $i,j \geqslant 2$ $\square$

FIN