Corrigé du problème Centrale-Supélec 2012 (math 2)

I) Suites récurrentes linéaires

I.A) Considérons l'ensemble $J_x = \{A \in \mathbb{K}[X] \ / \ A(\sigma)(x) = 0\}$.
Celui-ci est non vide (il contient le polynôme nul) et :
• Si $A, B \in J_x$, alors on a $(A - B)(\sigma)(x) = A(\sigma)(x) - B(\sigma)(x) = 0$ et $A - B \in J_x$.
• Si $A \in \mathbb{K}[X]$, si $B \in J_x$, alors on a $(AB)(\sigma)(x) = A(\sigma) \circ B(\sigma)(x) = 0$ et $AB \in J_x$.
Il en résulte que J_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ dont on notera B le polynôme minimal.

I.B.1) Si le polynôme minimal B est de degré 0, c'est à dire si $B = 1$, on a :

$$B(\sigma)(x) = \mathrm{Id}(x) = x = 0.$$

Si le polynôme minimal B est de degré 1, c'est à dire si $B = X - \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{K})$, on a :

$$B(\sigma)(x) = \sigma(x) - \lambda x = 0.$$

Comme σ associe à la suite $x = (x_n)$ la suite $\sigma(x) = (x_{n+1})$, les suites qu'on obtient ici sont les suites (x_n) telles que $x_{n+1} = \lambda x_n$, donc l'ensemble des suites géométriques.

Si le polynôme minimal B est $B = (X - 1)^2$, on a :

$$B(\sigma)(x) = \sigma^2(x) - 2\sigma(x) + x = 0.$$

Il s'agit donc des suites x vérifiant $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, c'est à dire des suites définies par $x_n = \alpha n + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

I.B.2) On suppose que $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, puis que $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$.
Cette suite est dans le noyau de $(\sigma + \mathrm{Id})^3$, et son polynôime minimal est un diviseur de $(X + 1)^3$, c'est à dire 1, $X + 1$, $(X + 1)^2$ ou $(X + 1)^3$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})$, on a $x_n = (-1)^n x_0 = 0$, ce qui est exclu ici.
Si $x \in \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})^2$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $x_n = (-1)^n (\alpha n + \beta)$.
Comme $x_0 = 0$, on a $\beta = 0$. Comme $x_1 = -1$, on a $\alpha = 1$.
Et alors $x_2 = 2\alpha + \beta = 2$, ce qui est bien le cas.
Donc x appartient à $\mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{Id})^2$ et le polynôme minimal de x est donc $(X + 1)^2$.

I.C.1) L'ensemble $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites x telles que $A(\sigma)(x) = 0$.
C'est le sous-espace $\mathrm{Ker}(A(\sigma))$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont la dimension est $p = \mathrm{d}°(A)$ car l'application $x \in \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) \longrightarrow (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^p$ car c'est une application clairement linéaire et bijective : pour tout p-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, il existe en effet une seule suite de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ telle que $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$, ..., $x_{p-1} = a_{p-1}$, et vérifiant la relation $A(\sigma)(x) = 0$, c'est à dire :

$$\forall n \geq 0, \quad a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \ \ldots \ + a_1 x_{n+1} + a_n x_n = 0.$$

I.C.2) Si $A(X) = X^p$, $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites x telles que $\sigma^p(x) = 0$.
C'est donc l'ensemble des suites x telles que $x_p = x_{p+1} = x_{p+2} = \ \dots\ = 0$, c'est à dire l'ensemble des suites de la forme $\left(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{p-1},\ 0,\ \dots,\ 0,\ \dots\right)$.
Une base de cet espace est clairement constituée des p suites $(0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0,\ \dots)$ où l'élément 1 est situé à l'une des positions $0,\ 1,\ \dots,\ p$-1.

I.C.3) Montrons par récurrence sur p que, lorsque $A_p(X) = (X - \lambda)^p$, les suites de la forme $n \longrightarrow x_n = Q(n)\,\lambda^n$ (avec $d°(Q) < p$) appartiennent à $\mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$:
- c'est vrai pour $p = 1$ car la suite $n \longrightarrow x_n^{(1)} = \lambda^n$ appartient à $\mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(A_1(\sigma))$.
- supposons le résultat vrai pour un entier $p \geq 1$.
 Pour $d°(Q) < p + 1$, la suite $n \longrightarrow x_n^{(p+1)} = Q(n)\,\lambda^n$ vérifie alors :

$$x_{n+1}^{(p+1)} - \lambda\, x_n^{(p+1)} = (Q(n+1) - Q(n))\,\lambda^{n+1} = R(n)\,\lambda^n$$

 Il est aisé de voir que le degré de $Q(X+1) - Q(X)$ est strictement inférieur à celui de Q.
 Donc $d°(R(X)) = d°(Q(X+1) - Q(X)) < p$, et la suite précédente appartient à $\mathcal{R}_{Ap}(\mathbb{K})$:

$$(\sigma - \lambda\mathrm{Id})\,x^{(p+1)} \in \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id})^p = \mathrm{Ker}\big(A_p(\sigma)\big).$$

 Il en résulte que $x^{(p+1)} \in \mathrm{Ker}(\sigma - \mathrm{Id})^{p+1} = \mathrm{Ker}\big(A_{p+1}(\sigma)\big)$.
La démonstration par récurrence est ainsi achevée et on a établi que :

$$E_{Ap}(\mathbb{K}) = \left\{n \longrightarrow Q(n)\,\lambda^n \,/\, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\right\} \subset \mathcal{R}_{Ap}(\mathbb{K}).$$

Comme $E_{Ap}(\mathbb{K})$ est non vide (il contient la suite nulle) et stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace de $\mathcal{R}_{Ap}(\mathbb{K})$. De plus, il est clair qu'une base de $E_{Ap}(\mathbb{K})$ est formée des p suites $n \longrightarrow n^k\,\lambda^n$ avec $0 \leq k \leq p - 1$ (c'est en effet une famille génératrice, dont on peut vérifier facilement qu'elle est libre).
Ainsi, $E_{Ap}(\mathbb{K})$ est inclus dans $\mathcal{R}_{Ap}(\mathbb{K})$ et ces deux espaces ont même dimension p : ils sont donc égaux, et on a : $\mathcal{R}_{Ap}(\mathbb{K}) = \left\{n \longrightarrow Q(n)\,\lambda^n \,/\, Q \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\right\}$.

I.D) On a ici $\mathcal{R}_A(\sigma) = \mathrm{Ker}(A(\sigma)) = \mathrm{Ker}\big(\sigma^{m_0} \circ (\sigma - \lambda_1\,\mathrm{Id})^{m_1} \circ\ \dots \circ (\sigma - \lambda_d\,\mathrm{Id})^{m_d}\big)$.
Comme les scalaires $0, \lambda_1,\ \dots,\ \lambda_d$ sont ici deux à deux distincts, les polynômes $X,\ X - \lambda_1,\ \dots,\ X - \lambda_d$ sont donc deux à deux premiers entre eux, et leurs puissances $X^{m_0},\ (X - \lambda_1)^{m_1},\ \dots,\ (X - \lambda_d)^{m_d}$ le sont donc aussi.
Le théorème des noyaux s'applique donc et donne :

$$\mathcal{R}_A(\sigma) = \mathrm{Ker}(A(\sigma)) = \mathrm{Ker}\big(\sigma^{m_0}\big) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma - \lambda_1\,\mathrm{Id})^{m_1} \oplus\ \dots\ \oplus \mathrm{Ker}(\sigma - \lambda_d\,\mathrm{Id})^{m_d}.$$

Rappelons que $\mathrm{Ker}\big(\sigma^{m_0}\big)$ est formé, d'après I.C.2, des suites nulles à partir du rang m_0.
Donc tout élément x de $\mathcal{R}_A(\sigma)$ s'écrit de façon unique sous la forme suivante pour $n \geq m_0$:

$$x_n = Q_1(n)\,\lambda_1^n +\ \dots\ + Q_d(x)\,\lambda_d^n \quad \text{avec} \quad d°(Q_1) < m_1,\ \dots,\ d°(Q_d) < m_d.$$

II) Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

On suppose que x est une suite récurrente linéaire de polynôme minimal B ($d°(B) = p$).

II.A.1) On sait, d'après I.C.1) que $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est stable par σ, et on en déduit que les p suites $x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)$ appartiennent à $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ et comme $\dim(\mathcal{R}_B(\mathbb{K})) = d°(B) = p$, il suffit d'établir qu'elles sont libres pour qu'elles forment une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Or si ces p suites sont liées, il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ non tous nuls tels que :

$$\alpha_0\, x + \alpha_1\, \sigma(x) + \ldots + \alpha_{p-1}\, \sigma^{p-1}(x) = 0.$$

ce qui signifie aussi qu'on a $A(\sigma)\,(x) = 0$ où $A(x) = \alpha_0 + \alpha_1\, X + \ldots + \alpha_{p-1}\, X^{p-1} \neq 0$.

C'est évidemment contradictoire puisque $d°(A) < p = d°(B)$.

On en déduit que $\operatorname{rg}\big(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)\big) = \min(p, n)$.

II.A.2) Considérons l'application linéaire $\varphi_n : v \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \longrightarrow (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Si $n \geq p$, alors φ_n est injective car on a $v_0 = \ldots = v_{n-1} = 0$, donc $v_0 = \ldots = v_{p-1} = 0$, et ceci implique, avec la relation de récurrence linéaire $B(\sigma)\,(v) = 0$, l'égalité $v = 0$.

Le théorème du rang donne alors : $\operatorname{rg}(\varphi_n) = \dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi_n)) = p - 0 = p$.

On pourra de plus remarquer que φ_p réalise donc un isomorphisme de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^p$.

Or la matrice de φ_n dans la base $\big(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\big)$ de II.A.1 s'écrit :

$$M(\varphi_n) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{p-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & x_n & \ldots & x_{n+p-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a donc pour rang $\operatorname{rg}(\varphi_n) = p$, et la matrice $H_n(x)$ est définie par :

$$H_n(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & x_n & \ldots & x_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Comme $n \geq p$, les p premières colonnes de $H_n(x)$ sont indépendantes et $\operatorname{rg}(H_n(x)) \geq p$. Et on a $\operatorname{rg}(H_n(x)) = p$ car chacune des $n - p$ dernières colonnes est combinaison linéaire des $p - 1$ colonnes précédentes d'après la relation $B(\sigma)\,(x) = 0$.

En effet, si $B(X) = X^p + \beta_{p-1}\, X^{p-1} + \ldots + \beta_0$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+p} = -\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k\, x_{n+k}$, d'où par exemple pour la $(p+1)^{\text{ème}}$ colonne (et on fera de même pour les suivantes) :

$$\begin{pmatrix} x_p \\ x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_{p+n-1} \end{pmatrix} = -\sum_{k=0}^{p-1} \beta_k \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{k+n-1} \end{pmatrix}.$$

II.B.1) Considérons une suite récurrente linéaire x d'ordre m et supposons $\mathrm{rg}(H_m(x)) = p$.
Si B le polynôme minimal de x, dont le degré vérifie donc $d°(B) \le d°(A) = m$, il résulte de ce qui précède que $\mathrm{rg}(H_n(x)) = d°(B)$ pour $n \ge d°(B)$, donc pour $n \ge m$.
Or on a $\mathrm{rg}(H_m(x)) = p$, ce qui établit que $d°(B) = p$ et montre que x est d'ordre minimal m.

La matrice $H_{p+1}(x)$ étant d'ordre $p+1$ et de rang p, son noyau (c'est à dire celui de l'endomorphisme associé) est de dimension 1 et dirigé par un vecteur $\left(b_0,\ b_1,\ \dots,\ b_{p-1},\ 1\right)$ (la dernière composante est non nulle, et on peut la supposer éventuellement égale à 1, car sinon, les p premières colonnes seraient liées et $H_p(x)$ ne serait pas de rang p).

II.B.2) D'après ce qui précède, on a $H_{p+1}(x)\, V = 0$ où $V = \left(b_0,\ \dots,\ b_{p-1},\ 1\right)$, soit :

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_p \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{p+1} \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{p+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_p & x_{p+1} & \dots & x_{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte qu'on a (en posant $b_p = 1$) :

$$\sum_{k=0}^{p} b_k\, x_k = \sum_{k=0}^{p} b_k\, x_{k+1} = \ \dots\ = \sum_{k=0}^{p} b_k\, x_{k+p} = 0.$$

En posant $B(X) = X^p + b_{p-1}\, X^{p-1} + \ \dots\ + b_0$, ces relations montrent que $\varphi_p(B(\sigma)\,(x)) = 0$.
Comme φ_p est un isomorphisme d'après II.A.2), on en déduit que $B(\sigma)\,(x) = 0$.
Et comme x est d'ordre p et que $d°(B) = p$, B est donc le polynôme minimal de x.

II.C.1) Pour obtenir le vecteur $x := (x[0],\ \dots,\ x[n])$, il suffit de programmer l'algorithme :

Donner n $(n \ge 4)$;
$x[0] := 1;\ x[1] := 1;\ x[2] := 1;\ x[3] := 0;$
pour k de 0 à $n-4$ faire $x[k+4] := x[k+3] - 2\,x[k+1];$

ce qui donne avec *Maple* par exemple :

```
Centrale2012 := proc (n)
local k, x; x[0] := 1; x[1] := 1; x[2] := 1; x[3] := 0;
for k from 0 to n-4 do x[k+4] := x[k+3]-2*x[k+1] end do;
print(x)
end proc
```

II.C.2) La suite récurrente linéaire est *a priori* d'ordre 4, et on forme $H_4(x)$:

$$H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie, par exemple en calculant les déterminants successifs (avec $\det(H_4(x) = 0)$, que :

$$\mathrm{rg}(H_1(x)) = 1, \quad \mathrm{rg}(H_2(x)) = 0, \quad \mathrm{rg}(H_3(x)) = 3, \quad \mathrm{rg}(H_4(x)) = 3.$$

D'après II.B, la suite x est d'ordre minimal 3, et d'après II.A, $\mathrm{rg}(H_n(x)) = 3$ pour $n \geq 3$.

II.C.3 et 4) On a $A(\sigma)\,(x) = 0$ avec le polynôme suivant :

$$X^4 - X^3 + 2\,X \;=\; X(X+1)\left(X^2 - 2\,X + 2\right) = X(X+1)\,(X-1+i)\,(X-1-i).$$

D'après les résultats de I.D, il existe des scalaires α, β, γ tels qu'on ait pour $n \geq 1$:

$$x_n = \alpha(-1)^n + \beta(1+i)^n + \gamma(1-i)^n.$$

Compte tenu de $x_1 = x_2 = 1$ et $x_3 = 0$, les scalaires α, β, γ sont déterminés par :

$$x_1 = -\alpha + \beta(1+i) + \gamma(1-i) = 1.$$
$$x_2 = \alpha + \beta(1+i)^2 + \gamma(1-i)^2 = 1.$$
$$x_3 = -\alpha + \beta(1+i)^3 + \gamma(1-i)^3 = 0.$$

Comme $1 \pm i$ sont les racines de $X^2 - 2\,X + 2$, on a donc $x_3 - 2\,x_2 + 2\,x_1 = -5\,\alpha = 0$.
Ainsi α est nul et la suite x appartient à $\mathrm{Ker}(B(\sigma)$ où $B(X) = X(X-1+i)\,(X-1-i)$, et le polynôme minimal de x est donc ce polynôme de degré 3 :

$$B(X) = X(X-1+i)\,(X-1-i) = X^3 - 2\,X^2 + 2\,X.$$

En reprenant le calcul précédent, les deux premières équations s'écrivent :

$$x_1 = \beta(1+i) + \gamma(1-i) = 1.$$
$$x_2 = \beta(1+i)^2 + \gamma(1-i)^2 = 1.$$

On en déduit facilement $\beta = \frac{1-i}{4}$, $\gamma = \frac{1+i}{4}$, et pour $n \geq 1$:

$$x_n = \frac{1}{2}\left((1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos\!\left((n-1)\,\frac{\pi}{4}\right).$$

II.C.5) La forme de la relation de récurrence considérée démontre qu'on ne change pas les x_n pour $n \geq 1$ en ne modifiant que x_0, ici égal à 1/2, de sorte qu'on a :

$$H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie de même en calculant les déterminants successifs (avec $\det(H_4(x) = 0)$, que :

$$\mathrm{rg}(H_1(x)) = 1, \quad \mathrm{rg}(H_2(x)) = 2, \quad \mathrm{rg}(H_3(x)) = 2, \quad \mathrm{rg}(H_4(x)) = 2.$$

D'après II.B, la suite x est d'ordre minimal 2, et d'après II.A, $\mathrm{rg}(H_n(x)) = 2$ pour $n \geq 2$.
Et comme les x_n n'ont pas été modifiés pour $n \geq 1$, on a encore pour $n \geq 1$:

$$x_n = \frac{1}{2}\left((1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} \cos\!\left((n-1)\,\frac{\pi}{4}\right).$$

III) Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

III.A.1) Les matrices de Hankel réelles sont des matrices symétriques réelles, et on sait que leurs n valeurs propres distinctes ou non sont réelles, soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

III.A.2) Si $(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le spectre ordonné d'une matrice de Hankel $H(a)$, cette dernière, qui est symétrique réelle, donc diagonalisable, est semblable à $\lambda\, I_n$, et donc égale à $\lambda\, I_n$ (puisque la seule matrice semblable à $\lambda\, I_n$ est $\lambda\, I_n$). On a donc $H(a) = \lambda\, I_n$, et ceci implique $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, et donc $H(a) = 0$, d'où $\lambda = 0$: contradiction.

III.B.1) Si M est une matrice de Hankel, elle est symétrique réelle et diagonalise donc en base orthonormale, et par invariance de la trace par similitude, on obtient par comparaison des traces dans la base canonique et dans une base orthonormale de vecteurs propres :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(H(a)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}.$$

De même, par comparaison des traces dans ces mêmes bases, on a :

$$\mathrm{Tr}\left(M^2\right) = \mathrm{Tr}\left(H^2(a)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \ldots + \sum_{k=n-2}^{2n-3} a_k^2 + \sum_{k=n-1}^{2n-2} a_k^2.$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)\, a_k^2.$$

III.B.2) Compte tenu des résultats précédents, un calcul immédiat donne :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-2} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\langle v, v \rangle = \sum_{k=0}^{p-1} (2k+1)\, a_{2k}^2 + \sum_{k=p}^{n-1} (2n-2k-1)\, a_{2k}^2.$$

Et compte tenu de $2p \le n+1 < 2p+1$ (car p est en effet la partie entière de $(n+1)/2$), on obtient par ajout des termes respectifs $(2k+2)\, a_{2k+1}^2$ et $(2n-2k-2)\, a_{2k+1}^2$:

$$\langle v, v \rangle \le \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)\, a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 .$$

III.B.3) Un calcul immédiat permet d'écrire :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = (n-1) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j.$$

D'autre part, on note que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j.$$

On en déduit finalement que :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \langle v, w \rangle^2.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il en résulte que :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \ge n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \ge \left(n - \|w\|^2\right) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = K_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

III.B.4) Pour $n = 3$, on a $\|w\|^2 = \frac{7}{3}$ et l'inégalité s'écrit $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2$:

$$2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) \geq 3\,(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1).$$

III.C.1) La matrice B considérée ici s'écrit (selon que $n = 2\,p - 1$ ou $n = 2\,p$) :

$$B_{2\,p-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B_{2\,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de B est 3 et 0 est valeur propre d'ordre $n - 3$ puisque B est diagonalisable.
Il est clair que les vecteurs suivants sont propres pour $B_{2\,p-1}$:

- $(1, 0, \dots, 0, 1)$ est vecteur propre associé à 1.
- $(1, 0, \dots, 0, -1)$ est vecteur propre associé à -1.
- $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (avec 1 au milieu) est associé à -2.

Le spectre ordonné de $B_{2\,p-1}$ est donc 1, 0, -1, -2.
On obtient le même résultat avec $B_{2\,p}$ par une adaptation immédiate des vecteurs propres.

III.C.2) Soit $M = H(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ son spectre ordonné.
Formons alors le produit AB (par exemple dans le cas $B = B_{2\,p-1}$) :

$$A\,B_{2\,p-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\,p-3} & a_{2\,p-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{2\,p-2} & a_{2\,p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2\,p-1} & a_{2\,p} & \cdots & a_{4\,p-6} & a_{4\,p-5} \\ a_{2\,p-2} & a_{2\,p-1} & \cdots & a_{4\,p-5} & a_{4\,p-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A\,B_{2\,p-1} = \begin{pmatrix} a_{2\,p-2} & 0 & \dots & 0 & -2\,a_{p-1} & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ a_{2\,p-1} & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & a_1 \\ a_{2\,p} & 0 & \dots & 0 & -2\,a_{2\,p-2} & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{4\,p-4} & 0 & \dots & 0 & -2\,a_{3\,p-3} & 0 & \dots & 0 & a_{2\,p-2} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\mathrm{Tr}\left(A\,B_{2\,p-1}\right) = 2\left(a_{2\,p-2} - a_{2\,p-2}\right) = 0$ et on procédera de même avec $B_{2\,p}$.
Le résultat rappelé sur les traces donne alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\beta_{n+1-i} = -2\,\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_n \leq \mathrm{Tr}(AB) = 0 \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\beta_i = \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\,\lambda_n.$$

On en déduit finalement que $2\,\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geq 0$ et $\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\,\lambda_n \geq 0$.

III.D.1) On observe que $a - c$ est valeur propre associée au vecteur $(1, 0, -1)$.
On en déduit la factorisation suivante du polynôme caractéristique :

$$\det(X\,I_3 - H(a, b, c, b, a)) = (a - c - X)\left(X^2 - (a + 2\,c)\,X + c^2 + ca - 2\,b^2\right).$$

Par conséquent, les trois valeurs propres de $H(a, b, c, b, a)$ sont :

$$a - c, \qquad \frac{a}{2} + c \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8\,b^2}\,.$$

III.D.2) On cherche a, b, c tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ avec :

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + c + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8\,b^2}\,, \quad \lambda_2 = a - c, \qquad \lambda_3 = \frac{a}{2} + c - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8\,b^2}\,.$$

Ces égalités équivalent aux trois suivantes :

$$a = \frac{1}{3}(\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3), \qquad c = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \qquad \sqrt{a^2 + 8\,b^2} = \lambda_1 - \lambda_3.$$

Compte tenu de $\lambda_1 \geq \lambda_3$, on peut élever au carré la dernière de ces égalités, d'où :

$$b^2 = \frac{1}{8}(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \frac{1}{72}(\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3)^2.$$

Or on vérifie en développant que la positivité du produit $(2\,\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\,(2\,\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ équivaut à celle de l'expression $\frac{1}{8}(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \frac{1}{72}(\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + \lambda_3)^2$, ce qui assure donc l'existence et l'unicité d'un réel $b \geq 0$ vérifiant l'égalité précédente, et donc de a, b, c.

III.D.3) Pour $n = 3$, la condition nécessaire III.3 est donc aussi suffisante d'après ci-dessus. En revanche, la condition nécessaire III.1 n'est pas suffisante car pour un triplet $(\lambda, 1, 1)$ avec $\lambda \geq 1$, celle-ci s'écrit $2\,(\lambda - 1)^2 \geq K_3\left(\lambda^2 + 2\right) = \frac{2}{3}\left(\lambda^2 + 2\right)$ ou $2\,\lambda^2 - 6\,\lambda + 1 \geq 0$.

Or les deux racines de cette équation vérifient cette inégalité, mais ne vérifient pas l'inégalité nécessaire III.3, dont la première s'écrit en effet $\lambda \geq 3$.