Mines-Ponts 2012. Option MP. Mathématiques II.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

A. Préliminaires.

1. a/ $x \longmapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout réel ξ.
b/ $\xi \longmapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x
c/ Pour tout réel ξ on a $|f(x)e^{-2i\pi x\xi}| \leqslant |f(x)|$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc si $f \in \mathscr{L}$ alors $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

2. Commençons par quelques remarques :
a/ Soient f et g deux éléments de $\mathscr{L}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $h = f + \lambda g$. Alors la linéarisation de l'intégrale définissant $\widehat{h}$ est licite car les deux intégrales convergent et on a donc $\widehat{h} = \widehat{f} + \lambda\widehat{g}$.
b/ $f \in \mathscr{L}^*$ si et seulement si f est continue et si il existe $\alpha > 1$ tel que $f(x) = O(\dfrac{1}{|x|^\alpha})$ au voisinage de $\pm\infty$ puisque f est bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$.
c/ Il en découle immédiatement que $\mathscr{L}^*$ est un sous-ensemble de $\mathscr{L}$.
En outre c'est bien un sous-espace car si $f(x) = O(\dfrac{1}{|x|^\alpha})$ et $g(x) = O(\dfrac{1}{|x|^\beta})$ alors $h(x) \underset{\text{DEF}}{=} f(x) + \lambda g(x) = O(\dfrac{1}{|x|^\gamma})$ avec $\gamma = \min(\alpha, \beta) > 1$.

La remarque a/ implique immédiatement que $\mathscr{W}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}$ et la remarque c/ que $\mathscr{W}^*$ est un sous-espace de $\mathscr{L}^*$. En outre si $f \in \mathscr{W}^*$ alors f et $\widehat{f}$ appartiennent à $\mathscr{L}^*$ donc à $\mathscr{L}$ puisque $\mathscr{L}^* \subset \mathscr{L}$ et ainsi $f \in \mathscr{W}$. Donc $\mathscr{W}^*$ est bien un sous-espace de $\mathscr{W}$ $\square$

3. Le changement de variable $x \longmapsto u = \alpha x$ admissible car $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même fournit immédiatement que $\widehat{f_\alpha}(\xi) = \dfrac{1}{\alpha}\widehat{f}(\dfrac{\xi}{\alpha})$ $\square$

Par le changement $x \longmapsto u = x + y$ on obtient $\widehat{f_{y,\nu}}(\xi) = e^{2i\pi y(\nu+\xi)}\widehat{f}(\nu + \xi)$ $\square$

On en déduit immédiatement que si f appartient à $\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}^*$) il en va de même de f_α et $f_{y,\nu}$. $\square$

4. • $\widehat{s}(\xi) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi x\xi}\,dx$ donc $\widehat{s}(0) = 1$ et $\widehat{s}(\xi) = \dfrac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$ pour $\xi \neq 0$ $\square$
(on vérifie que $\widehat{s}$ est bien continue)

• $\widehat{t}(\xi) = \displaystyle\int_{-1}^{0} (1 + x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx + \int_{0}^{1} (1 - x)e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$

Pour $\xi \neq 0$ une intégration par parties montre que la première intégrale vaut $\dfrac{-1}{2i\pi\xi} + \dfrac{1 - e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}$ et la seconde $\dfrac{1}{2i\pi\xi} + \dfrac{1 - e^{-2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}$ donc $\widehat{t}(\xi) = \dfrac{1 - \cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2} = \left(\dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2$ et par ailleurs $\widehat{t}(0) = 1$ $\square$
(là encore on vérifie que $\widehat{t}$ est bien continue)

5. s appartient à $\mathscr{L}$ mais n'appartient pas à $\mathscr{W}$ car classiquement $u \longmapsto \dfrac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable au voisinage de l'infini. Donc $\mathscr{W}$ et a fortiori $\mathscr{W}^*$ sont distincts de $\mathscr{L}$. $\square$

6. Soit (f_n) une suite de $\mathscr{W}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\,dx = \varepsilon_n$.

Alors pour tout réel ξ il vient $\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)\right| \leqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|\,dx = \varepsilon_n$ $\square$

B. Formule sommatoire de Poisson.

Remarque: Dans la suite on envisage des sommations sur $\mathbb{Z}$: $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n$.

On considérera dans ce texte qu'une telle série converge si les deux séries $S_1 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ convergent et on notera $S = S_1 + S_2$. Cela entraîne naturellement la convergence au sens de la sommation symétrique de Cauchy avec la même valeur pour la somme.

7. Soit $f \in \mathscr{L}^*$ et $x \in [-a, a]$ avec a réel positif quelconque. Par définition de $\mathscr{L}^*$ il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tel que $|x+n|^\alpha |f(x+n)| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Il en résulte que $|f(x+n)| \leqslant \dfrac{M}{(|n|-a)^\alpha} \quad \forall |n| > a \quad \forall x \in [-a, a]$

Ce qui prouve que la série définissant $\widetilde{f}$ converge localement normalement donc localement uniformément sur $\mathbb{R}$.
Comme $x \longmapsto f(x+n)$ est continue sur $\mathbb{R}$ il en va de même de $\widetilde{f}$ qui est en outre clairement 1-périodique. $\square$

8. La série définissant $\widetilde{f}$ converge en particulier uniformément sur $[0, 1]$ d'après ci-dessus, on peut donc intégrer terme à terme dans le calcul de $c_n(\widetilde{f})$ ce qui fournit $c_n(\widetilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ avec :

$$I_k = \int_0^1 f(x+k)e^{-2i\pi nx}\,dx = \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi n(u-k)}\,du = \int_k^{k+1} f(u)e^{-2i\pi nu}\,du.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi nu}\,du$ converge on a $c_n(\widetilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_k = \int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2i\pi nu}\,du = \widehat{f}(n)$ $\square$

9. Si $\widehat{f} \in \mathscr{L}^*$ alors il existe $\alpha > 1$ tel que $\widehat{f}(n) = O(\dfrac{1}{n^\alpha})$ au voisinage de $\pm\infty$ ce qui implique que la série trigonométrique $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Il en découle qu'elle est continue et classiquement qu'elle est égale à la somme de sa série de Fourier.
Ainsi $\widetilde{f}$ et S sont continues périodiques et admettent la même série de Fourier. Donc elles sont égales. $\square$

Si $f \in \mathscr{W}^*$ alors $\widehat{f} \in \mathscr{L}^*$ et l'égalité ci-dessus fournit en particulier $\widetilde{f}(0) = S(0)$ soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$ $\square$

C. Application à la formule d'inversion de Fourier.

10 Si $f \in \mathscr{W}^*$ alors $f_{x,\xi}$ également par la question 3 et on peut donc applique la formule de Poisson. Il vient $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{x,\xi}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi}$ et par la question 3 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f_{x,\xi}}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi x(n+\xi)}\widehat{f}(n+\xi)$.
Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\xi)e^{2i\pi x(n+\xi)} \quad \forall f \in \mathscr{W}^*$ $\square$

Par définition même de F_x le membre de droite de l'égalité ci-dessus n'est autre que $\widetilde{F_x}(\xi)$ dont le membre de droite apparaît comme un développement en série trigonométrique. Or comme $f \in \mathscr{W}^*$ donc a fortiori appartient à $\mathscr{L}^*$, cette série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc est le développement en série de Fourier de sa somme. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi}$ est le développement en série de Fourier de $\widetilde{F_x}(\xi)$ $\square$

11 En particulier $f(x)$ est le coefficient de Fourier d'indice 0 de $\widetilde{F_x}$ donc

$$f(x) = \int_0^1 \widetilde{F_x}(u)\,du = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(u+k)e^{2i\pi x(u+k)}\,du.$$

Comme $\widehat{f} \in \mathscr{L}^*$ la série converge normalement sur $[0, 1]$ et on peut intégrer terme à terme ce qui fournit $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k$ avec $J_k = \int_0^1 \widehat{f}(u+k)e^{2i\pi x(u+k)}\,du = \int_k^{k+1} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi$ et donc (comme dans la question 8) $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi$ $\square$

<u>Remarque</u> : On vérifie immédiatement par changement de variable $x \longmapsto -x$ que si f est paire ou impaire alors il en va de même de $\widehat{f}$. À nouveau par le changement $\xi \longmapsto -\xi$ dans la formule d'inversion on en déduit que si f est paire (resp. impaire) alors $\widehat{\widehat{f}} = f$ (resp. $\widehat{\widehat{f}} = -f$).

12 Soit λ une valeur propre (si elle existe) de la transformation de Fourier dans $\mathscr{W}^*$ et f un vecteur propre non nul.
D'après la formule d'inversion on a $f(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\xi = \lambda\widehat{f}(-x) = \lambda^2 f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Donc $f(x) = \lambda^4 f(x)$ donc $\lambda^4 = 1$ car il existe x tel que $f(x) \neq 0$ $\square$

Les seules valeurs propres réelles possibles sont donc 1 et -1.

D'après la ramarque de la question 11 on a $t = \widehat{\widehat{t}}$ puisque t est paire.
Il en découle que 1 et -1 sont effectivement valeur propre et que $t+\widehat{t}$ et $t-\widehat{t}$ sont deux vecteurs propres respectivement associés. $\square$

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker.

13 La formule d'inversion de Fourier fournit $f(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\,d\,\xi$ et la formule généralisée de Poisson spécifiée en $x = 0$ donne $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi+n)$.

Or pour $\xi \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$ on a par hypothèse $\widehat{f}(\xi+n) = 0$ pour $n \neq 0$ et ainsi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi} = \widehat{f}(\xi)$.

Il vient donc $f(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{2i\pi(x-n)\xi}\Big)\,d\,\xi$ ce qui prouve que la connaissance de l'échantillonnage $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ détermine bien f de manière unique. $\square$

14 Soient $\varepsilon \in]0, \dfrac{1}{2}[$ et $g(\xi) = t(\dfrac{\xi - 1/2}{\varepsilon}) - t(\dfrac{\xi+1/2}{\varepsilon}) = g_1(\xi) - g_2(\xi)$.

Comme t est nulle en dehors de $]-1, 1[$, g est nulle en dehors de $\Big]-\dfrac{1}{2}-\varepsilon, -\dfrac{1}{2}+\varepsilon\Big[\bigcup\Big]\dfrac{1}{2}-\varepsilon, \dfrac{1}{2}+\varepsilon\Big[$. Par ailleurs g n'est pas nulle.

D'après la question 3 on a $g \in \mathscr{W}^*$ et, comme t est paire, g est impaire donc $g = \widehat{f}$ avec $f(x) = -\widehat{g}(x)$
Toujours par la question 3 on a $\widehat{g_1}(\xi) = \varepsilon\widehat{t_{-1/2,0}}(\varepsilon\xi) = \varepsilon e^{-i\pi\xi}\widehat{t}(\varepsilon\xi)$ et $\widehat{g_2}(\xi) = \varepsilon e^{i\pi\xi}\widehat{t}(\varepsilon\xi)$.
Donc $f(\xi) = -\widehat{g}(\xi) = 2i\varepsilon\sin(\pi\xi)\widehat{t}(\varepsilon\xi)$.

On a ainsi $\widehat{f} = g$ non identiquement nulle et nulle en dehors de $\big[-\dfrac{1}{2}-\varepsilon, \dfrac{1}{2}+\varepsilon\big]$. Pourtant la suite $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est nulle et ne détermine donc pas f puisque f est non nulle identiquement sinon g le serait. $\square$

E. Contre-exemple de Katznelson.

15 On établit facilement que $u_k(x)$ est la fonction paire , affine par morceaux, nulle sur $[\dfrac{1}{2^k}, +\infty[$, nulle en 0, égale à $\dfrac{1}{2}$ en $\dfrac{1}{2^{k+1}}$ et affine sur $[0, \dfrac{1}{2^{k+1}}]$ et sur $[\dfrac{1}{2^{k+1}}, \dfrac{1}{2^k}]$

- Il en résulte que si $x \in \mathbb{Z}$ alors $u_k(x-n) = 0$ pour tous k et n dans $\mathbb{Z}$ donc dans ce cas $f(x)$ est bien défini et $f(x) = 0$.
- Soit $I_{n_0,k_0} = [n_0 + \dfrac{1}{2^{k_0}}, n_0 + 1 - \dfrac{1}{2^{k_0}}]$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $k_0 \geqslant 2$ et soit $x \in I_{n_0,k_0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $|x-n| \geqslant \dfrac{1}{2^{k_0}}$ donc $u_k(x-n) = 0$ pour $k \geqslant k_0$ d'où $u_{k,N_k}(x) = 0$.

Ainsi pour $x \in I_{n_0,k_0}$ la fonction $f(x)$ est bien définie et continue en tant que somme finie : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k_0} u_{k,N_k}(x)$

- En conclusion comme f est définie sur $\mathbb{Z}$ et comme tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ est inclus dans un intervalle du type précédent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $\square$

16 Pour établir que $\displaystyle\sum_k u_{k,N_k}$ converge en moyenne vers f, il suffit, d'après le théorème de convergence $\mathscr{L}^1$, de montrer que la série $\displaystyle\sum_k \int_{\mathbb{R}} |u_{k,N_k}|$ converge.

Or u_k est positive donc $|u_{k,N_k}| = u_{k,N_k}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_k(x-n)\,d\,x = \int_{\mathbb{R}} u_k(x)\,d\,x = \frac{1}{2^{k+1}}$ (aire de deux triangles).

Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u_{k,N_k}| = \frac{1}{N_k}\sum_{|n|<N_k}\Big(1 - \frac{|n|}{N_k}\Big)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{N_k^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{N_k-1} n\right)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{N_k^2}\Big(1 + N_k(N_k-1)\Big)\frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2^k}$ ce qui prouve la convergence de la série $\displaystyle\sum_k \int_{\mathbb{R}} |u_{k,N_k}|$ et établit le résultat. $\square$

D'après la question 6 on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u_{k,N_k}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$. $\square$

17 • Commençons par établir que, pour k fixé quelconque, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n$ avec $\alpha_n = \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}|$ converge.

D'après la question 3 on a $\widehat{u_k}(x) = \dfrac{1}{2^k}\widehat{t}\Big(\dfrac{x}{2^k}\Big) - \dfrac{1}{2^{k+1}}\widehat{t}\Big(\dfrac{x}{2^{k+1}}\Big)$ donc d'après la question 4 :

$\widehat{u_k}(x) = \dfrac{1}{\pi^2x^2}\left(2^k\sin^2(\dfrac{\pi x}{2^k}) - 2^{k+1}\sin^2(\dfrac{\pi x}{2^{k+1}})\right)$ pour $x \neq 0$ et $\widehat{u_k}(0) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$

Comme u_k est paire, il en va de même de $\widehat{u_k}$ (remarque question 11) et donc il suffit d'établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$.

Or la valeur de $\widehat{u_k}(x)$ pour $x \neq 0$ ci-dessus prouve que $\alpha_n \leqslant 3\dfrac{2^k}{\pi^2 n^2}$ pour $n \geqslant 1$ ce qui établit le résultat. $\square$

- Par ailleurs on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_{k,N}}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} |\widehat{u_{k,N}}|$.

Or $\widehat{u_k(x-p)} = e^{-2i\pi px}\widehat{u_k}(x)$ par la question 3 de sorte que $\widehat{u_{k,N}}(x) = \dfrac{\widehat{u_k}(x)}{N} \displaystyle\sum_{|p|<N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi px}$

Or $\displaystyle\sum_{|p|<N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi px} = \sum_{|p|<N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{2i\pi px} = K_N(x)$ et est donc positif.

Donc $I_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_n^{n+1} |\widehat{u_k}(x)| \sum_{|p|<N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi px}\,dx \leqslant \frac{\alpha_n}{N}\int_n^{n+1} \sum_{|p|<N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi px}\,dx = \frac{\alpha_n}{N}$

En conclusion on a bien $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_{k,N}}| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}| = \frac{S_k}{N}$ $\square$

18 En choisissant par exemple $N_k = (\mathrm{Int}(S_k)+1)k^2$ il vient que $\displaystyle\sum_k \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_{k,N}}|$ converge et, comme $\widehat{f} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u_{k,N}}$ d'après la question 16, le théorème de convergence $\mathscr{L}^1$ prouve que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u_{k,N}}$ converge en moyenne vers $\widehat{f}$. $\square$

Comme u_k est paire, on en déduit que u_{k,N_k} également (car la somme définissant $u_{k,N_k}(x)$ est invariante par le changement $n \longmapsto -n$) donc f est paire et d'après la remarque de la question 11 on a $u_{k,N_k} = \widehat{\widehat{u_{k,N_k}}}$ et $f = \widehat{\widehat{f}}$.

On en déduit alors de la question 6 que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,N_k}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. $\square$

19 • Comme noté précédemment on a $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ de sorte que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 0$.

- D'après un calcul effectué dans la question 17 on a :

$\widehat{u_k, N}(x) = \dfrac{K_N(n)}{N}\widehat{u_k}(n) = \widehat{u_k}(n)$ car $K_N(n) = N$ et

$\widehat{u_k}(n) = \dfrac{1}{\pi^2 n^2}\left(2^k \sin^2\left(\dfrac{n\pi}{2^k}\right) - 2^{k+1}\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{2^{k+1}}\right)\right)$ pour $n \neq 0$ et $\widehat{u_k}(0) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$.

Or $\widehat{f}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u_{k,N_k}}(n)$ d'après la question 16 ce qui entraîne que $\widehat{f}(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u_k}(n)$.

Ainsi pour $n \neq 0$ on a par télescopage $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{\pi^2 n^2}\sin^2(n\pi) = 0$ et $\widehat{f}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$

Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 1$

- Ainsi la formule de Poisson n'est pas valide pour la fonction f ce qui prouve que $f \in \mathscr{W} \setminus \mathscr{W}^*$ $\square$

(f appartient bien à $\mathscr{W}$ car f et $\widehat{f}$ sont intégrables par les questions 16 et 18)

F. Resommation d'Ewald.

20 En notant $f(x) = g(\dfrac{x}{100})$ il vient $S = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) - 1\right)$

Or $\widehat{f}(x) = 100\widehat{g}(100x) = 100g(100x)$ de sorte que $S = 50\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(100n) - \frac{1}{2} = 50\left(2\sum_{n=1}^{+\infty} g(100n) + 1\right) - \frac{1}{2}$.

Ainsi $S = 49.5 + 100\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g(100n) = 49.5 + 100S'$

Classiquement puisque $t \longmapsto g(100t)$ décroît il vient :

$100\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} g(100n) \leqslant 100\int_1^{+\infty} g(100t)\,dt = \int_{100}^{+\infty} g(u)\,du \leqslant \int_{100}^{+\infty} e^{-100\pi u}\,du = \frac{1}{100\pi}e^{-10000\pi} = \frac{g(100)}{100\pi}$

Donc $S' = g(100) + R'_1 \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{100\pi}\right)g(100) \leqslant 1.1 \times g(100) = 1.1 \times a^{-10000}$ avec $a = e^\pi > 2.5^3 = 15.625$

donc $S' \leqslant 1.1 \times 15^{-10000} < 10^{-10000}$

Ainsi 49.5 est une valeur approchée de S par défaut à moins de 10^{-10000} près. $\square$