Banque PT – Math I-B

Question préliminaire

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On note :
– $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A;
– $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A;
– $E_A(\lambda)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ;
– $m_A(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ.
On a la condition nécessaire et suffisante suivante :
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\begin{cases} \chi_A(X) \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]; \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A),\ \dim E_A(\lambda) = m_A(\lambda). \end{cases}$
Compte tenu de ce que l'on a, d'une manière générale, $1 \le \dim E_A(\lambda) \le m_A(\lambda)$, il en résulte immédiatement que si $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et n'a que des racines simples, alors A est diagonalisable.

Partie I : Algorithme de Babylone

1. En posant $\rho_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, les relations $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ équivalent à $\rho_{n+1} = A\,\rho_n$, avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2 - 2$. Les valeurs propres de A sont donc $\boxed{1-\sqrt{2} \text{ et } 1+\sqrt{2}}$.
D'après la condition suffisante rappelée ci-dessus, $\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}.}$

3. Montrons par récurrence que u_n et v_n sont strictement positifs pour tout n :
– c'est vrai pour $n = 0$: $u_0 = v_0 = 1$.
– supposons que pour $n \ge 0$ fixé, $u_n > 0$ et $v_n > 0$; alors, $u_{n+1} = u_n + 2v_n > 0$ et $v_{n+1} = u_n + v_n > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \text{ et } v_n \text{ sont strictement positifs.}}$$

4. Notons $r_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout n, et ses termes sont strictement positifs.
On a : $r_0 = 1$, et pour tout $n \ge 0$, $r_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{u_n + v_n} = 1 + \underbrace{\dfrac{v_n}{u_n + v_n}}_{>0}$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boxed{\dfrac{u_n}{v_n} \ge 1.}$
De plus, pour tout $n \ge 0$: $r_{n+1} = \dfrac{u_n/v_n + 2}{u_n/v_n + 1} = \dfrac{r_n + 2}{r_n + 1}$ (1).
Si la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est une solution positive de l'équation $\ell = \dfrac{\ell + 2}{\ell + 1}$ (2).
(2) équivaut à $\ell^2 = 2$, donc la limite éventuelle de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\ell = \sqrt{2}$.
(1) – (2) donne $r_{n+1} - \ell = \dfrac{(r_n+2)(\ell+1) - (\ell+2)(r_n+1)}{(r_n+1)(\ell+1)} = \dfrac{\ell - r_n}{(r_n+1)(\ell+1)}$
Comme $r_n \ge 1$ et $\ell = \sqrt{2}$, on a : $|r_{n+1} - \ell| = \dfrac{|\ell - r_n|}{(r_n+1)(\ell+1)} \le \dfrac{|r_n - \ell|}{2(1+\sqrt{2})}$ et a fortiori :

$$\boxed{\left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right|.}$$

5. Montrons par récurrence que $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{2^n}\left|\dfrac{u_0}{v_0} - \sqrt{2}\right|$.

C'est vrai si $n=0$; si cette inégalité est vraie pour $n \geq 0$ fixé, alors :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\left|\frac{u_n}{v_n}-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\left|\frac{u_0}{v_0}-\sqrt{2}\right|=\frac{1}{2^{n+1}}\left|\frac{u_0}{v_0}-\sqrt{2}\right|.$$

On a donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2^n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}-1}{2^n}=0$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{2}.}$$

6. Comme $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$, on a encore $\left|\dfrac{u_n}{v_n}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{1}{2^{n+1}}$ ce qui signifie que le rationnel $\dfrac{u_n}{v_n}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à moins de $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ près.

Pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près, il suffit de calculer $\dfrac{u_n}{v_n}$ à un rang n tel que $\dfrac{1}{2^{n+1}}<10^{-2}$ ce qui est réalisé si $\boxed{n=6.}$

Une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près peut s'obtenir avec $\dfrac{u_n}{v_n}$ où n vérifie $\dfrac{1}{2^{n+1}}<10^{-4}$; c'est le cas à partir de $\boxed{n=13.}$

N.B. Si on avait minoré au 4. $(r_n+1)(\ell+1)$ par $\dfrac{1}{4}$ au lieu de $\dfrac{1}{2}$, on aurait pu s'apercevoir que $n=3$ et $n=7$ suffisaient pour les valeurs approchées à 10^{-2} et 10^{-4} près respectivement; et un calcul montre que la précision 10^{-2} (resp. 10^{-4}) n'est effectivement atteinte que pour $n=3$ (resp. $n=5$).

Partie II : Étude d'une réaction chimique

1. Notons (1), (2) et (3) les réactions chimiques (dans l'ordre) :

$$O^{2-}+H_2 \longrightarrow OH^-+H^+, \qquad OH^-+H_2 \longrightarrow H_2O+H^+ \qquad \text{et} \quad H^++O_2 \longrightarrow OH^-+O^{2-}.$$

À l'instant $n=0$, on a $o_0=1$, $(oh)_0=0$ et $h_0=0$, d'où $\boxed{\rho_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.}$

À l'instant $n=1$, seule la réaction (1) a eu lieu, puisque les radicaux OH^- et H^+ ne sont pas encore présents.

On a bien, comme indiqué, $o_1=0$ (l'unique radical O^{2-} a réagi), $(oh)_1=1$ et $h_1=1$, d'où $\boxed{\rho_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.}$

À l'instant $n=2$, seules les réactions (2) et (3) ont eu lieu, car à l'instant $n=1$ il n'y avait plus de radical O^{2-}. Les radicaux OH^- et H^+ ont disparu, pour donner naissance à une molécule H_2O, et un radical de chaque sorte. On a donc $o_2=1$, $(oh)_2=1$ et $h_2=1$, d'où $\boxed{\rho_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.}$

À l'instant $n=3$, les trois réactions ont eu lieu, faisant disparaître les radicaux O^{2-}, OH^- et H^+ présents et donnant naissance à une molécule H_2O, et deux radicaux OH^-, deux radicaux H^+, et un radical O^{2-}. On a bien

$$\boxed{\rho_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.}$$

2. o_2, $(oh)_2$ et h_2 sont tous trois supérieurs ou égaux à 1.

Supposons que o_n, $(oh)_n$ et h_n soient tous trois supérieurs ou égaux à 1. Alors, entre l'instant n et l'instant $n+1$ les trois réactions ont bien lieu, et :
(1) fait disparaître les o_n radicaux O^{2-} présents et augmente $(oh)_n$ et h_n de o_n;
(2) fait disparaître les $(oh)_n$ radicaux OH^- présents et augmente h_n de $(oh)_n$;
(3) fait disparaître les h_n radicaux H^+ présents et augmente $(oh)_n$ et o_n de h_n.

On a donc, globalement : $\begin{cases} o_{n+1} = h_n \\ (oh)_{n+1} = o_n + h_n \\ h_{n+1} = o_n + (oh)_n \end{cases}$

ce qui montre que o_{n+1}, $(oh)_{n+1}$ et h_{n+1} sont tous trois supérieurs ou égaux à 1 (donc, par récurrence, que pour tout $n \geq 2$, o_n, $(oh)_n$ et h_n sont tous trois supérieurs ou égaux à 1)
et ce qui se traduit matriciellement par $\rho_{n+1} = A\,\rho_n$, avec

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. On en déduit que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\rho_n = A^n\,\rho_0$.
Examinons la diagonalisabilité de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} -X-1 & 0 & 1 \\ 0 & -X & 1 \\ 1+X & 1 & -X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} (1+X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= -(X+1)\,(X^2 - X - 1) = -(X+1)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Donc A est diagonalisable et il existe une matrice inversible P telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, avec

$$D = \operatorname{diag}\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

On a alors : $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$, avec $D^n = \operatorname{diag}\left((-1)^n, \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Comme $\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ρ_n est le premier vecteur colonne de A^n.
Et comme o_n est la première coordonnée de ρ_n, o_n est le coefficient $(1,1)$ de A^n.
L'expression $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ montre que o_n est, comme tous les coefficients de A^n, une combinaison linéaire de $(-1)^n$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Il existe des constantes réelles } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ telles que, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \\ o_n = \alpha\,(-1)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{array}}$$

4. On peut trouver α, β et γ grâce aux premières valeurs trouvées au 1.
Notons pour abréger $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme ce sont les racines du polynôme $X^2 - X - 1$, on a : $\phi^2 = \phi + 1$, $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$, $\phi + \bar{\phi} = 1$ et $\phi\,\bar{\phi} = -1$.

$$\begin{cases} o_0 = 1 \\ o_1 = 0 \\ o_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 0 \\ \alpha + \beta\,\phi^2 + \gamma\,\bar{\phi}^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 0 \\ \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \beta\,\phi + \gamma\,\bar{\phi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{\phi}{\phi - \bar{\phi}} \neq 0$$

et comme $\phi < 0$ et $\bar{\phi} > 0$, on a : $\boxed{\gamma > 0.}$

(On pouvait achever le calcul et trouver $(\alpha,\beta,\gamma) = \left(0, \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)$.)

5. On a $\phi \in]-1,0[$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \beta\,\phi^n = 0$; et $\bar{\phi} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma\,\bar{\phi}^n = +\infty$.
Par opérations élémentaires sur les suites (sans connaître la valeur de α, la suite $\big(\alpha\,(-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée),

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} o_n = +\infty.}$$

Partie III : Diffusion d'un gaz

1. Notons p_{ij} (resp. $\big(P\,B_n\big)(i,j)$, $\big(P\,B\big)(i,j)$) le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice P (resp. des matrices $P\,B_n$, $P\,B$).
On a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad \big(P\,B_n\big)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,b_{kj}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\,b_{kj} = \big(P\,B\big)(i,j)$.
On montre de même que, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $\big(B_n\,P\big)(i,j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \big(B\,P\big)(i,j)$.

$$\boxed{\text{Si } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } B\text{, alors } \big(P\,B_n\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } P\,B \text{ et } \big(B_n\,P\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } B\,P.}$$

2. Étudions la réduction de $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$: $\chi_Q(X) = (X-1/3)^2 - 1/4 = (X-5/6)\,(X+1/6)$.
D'après la condition suffisante rappelée dans la partie préliminaire, Q est diagonalisable, et semblable à $D = \mathrm{diag}(5/6, -1/6)$.
$D^n = \mathrm{diag}\big((5/6)^n, (-1/6)^n\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} O$ (matrice nulle), et il existe une matrice de passage P telle que $Q^n = P\,D^n\,P^{-1}$.
En utilisant le 1. on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = O.}$

3. Les calculs du 2. montrent que $1 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(Q)$, donc $\boxed{\text{la matrice } I-Q \text{ est inversible.}}$
Notons $S_n = I + Q + Q^2 + \cdots + Q^n$.
$(I-Q)\,S_n = (I+Q+Q^2+\cdots+Q^n) - (Q+Q^2+\cdots+Q^{n+1}) = I - Q^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$
donc, en utilisant le 1.
$S_n = (I-Q)^{-1}\,(I-Q^{n+1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (I-Q)^{-1}$ et on a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (I+Q+Q^2+\cdots+Q^n) = (I-Q)^{-1}.}$$

4. La matrice A se décompose en blocs carrés d'ordre 2 de la façon suivante : $A = \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I \end{pmatrix}$

On calcule A^2 (produit par blocs) : $A^2 = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R(I+Q) & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & O \\ R\,S_1 & I \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I \end{pmatrix}$.
Cette égalité est vraie pour $n=1$; si elle est vraie pour $n \geq 1$ fixé, alors

$$A^{n+1} = A^n\,A = \begin{pmatrix} Q^n & O \\ R\,S_{n-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ R & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R\,S_{n-1}\,Q + R & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{n+1} & O \\ R\,S_n & I \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme attendue.
Les calculs précédents montrent que A^n possède une limite qui est $\begin{pmatrix} O & O \\ R\,(I-Q)^{-1} & I \end{pmatrix}$.
Déterminons-en les coefficients : $I - Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ d'où $(I-Q)^{-1} = \dfrac{1}{4/9 - 1/4} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$
et $R\,(I-Q)^{-1} = \dfrac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5. Notons, pour $i \in \{1,2,3,4\}$, $r_{i,n}$ la quantité de gaz au bout de n heures dans le réservoir R_i.
En discrétisant le phénomène de diffusion du gaz heure par heure, et en suivant les données, on obtient :

$$\begin{cases} r_{1,n+1} = r_{1,n} - \frac{1}{2}\, r_{1,n} - \frac{1}{6}\, r_{1,n} + \frac{1}{2}\, r_{2,n} \\ r_{2,n+1} = r_{2,n} + \frac{1}{2}\, r_{1,n} - \frac{1}{2}\, r_{2,n} - \frac{1}{6}\, r_{2,n} \\ r_{3,n+1} = r_{3,n} + \frac{1}{6}\, r_{1,n} \\ r_{4,n+1} = r_{4,n} + \frac{1}{6}\, r_{2,n} \end{cases} \iff \begin{cases} r_{1,n+1} = \frac{1}{3}\, r_{1,n} + \frac{1}{2}\, r_{2,n} \\ r_{2,n+1} = \frac{1}{2}\, r_{1,n} + \frac{1}{3}\, r_{2,n} \\ r_{3,n+1} = \frac{1}{6}\, r_{1,n} + r_{3,n} \\ r_{4,n+1} = \frac{1}{6}\, r_{2,n} + r_{4,n} \end{cases}$$

Explication : dans le réservoir R_1, il y a la quantité à l'instant n, moins ce qui s'échappe dans R_2 et R_3 plus ce qui revient de R_2, etc.

En notant $C_n = \begin{pmatrix} r_{1,n} \\ r_{2,n} \\ r_{3,n} \\ r_{4,n} \end{pmatrix}$, on a donc $\quad C_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_n = A\, C_n$.

On en déduit $C_n = A^n\, C_0$, et les calculs du 4. montrent que la répartition du gaz dans les réservoirs tend vers une limite qui est $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/7 & 3/7 & 1 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{À la limite, } R_1 \text{ et } R_2 \text{ sont vides, } R_3 \text{ et } R_4 \text{ contiennent respectivement} \\ \text{les } 4/7 \text{ et } 3/7 \text{ de la quantité initiale de gaz.}\end{array}}$$

Partie IV : Un cas plus général

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \det\left({}^t(A - \lambda\, I)\right) = 0 \Leftrightarrow \det({}^tA - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tA)$.

$$\boxed{A \text{ et } {}^tA \text{ ont les mêmes valeurs propres.}}$$

2. Soit x (resp. y) un vecteur propre de A (resp. ${}^tA$) associé à la valeur propre λ (resp. μ) :

$$\left.\begin{array}{r} A\,x = \lambda\,x \Rightarrow {}^ty\,A\,x = \lambda\,{}^ty\,x \\ {}^tA\,y = \mu\,y \Rightarrow {}^t\left({}^tA\,y\right) = {}^ty\,A = \mu\,{}^ty \Rightarrow {}^ty\,A\,x = \mu\,{}^ty\,x \end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda - \mu)\,{}^ty\,x = 0 \quad \text{et comme } \lambda \neq \mu,$$

$$\boxed{{}^ty\,x = 0.}$$

3. (a) Dans la notation ${}^tx\,y$, on confond, comme c'est l'usage, la matrice $(1,1)$ avec son unique élément.
L'application $(\cdot|\cdot)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto (x|y) = {}^ty\,x$ est :

– linéaire à gauche : $\quad \forall(\lambda, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \qquad \begin{aligned}(\lambda\,x_1 + x_2|y) &= {}^ty\,(\lambda\,x_1 + x_2) = \lambda\,{}^ty\,x_1 + {}^ty\,x_2 \\ &= \lambda\,(x_1|y) + (x_2|y)\end{aligned}$

– symétrique : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (y|x) = {}^tx\,y = {}^t\left({}^tx\,y\right) = {}^ty\,x = (x|y)$ car la matrice $(1,1)$ ${}^tx\,y$ est égale à sa transposée.

– définie positive : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, en notant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ (coordonnées de x dans la base de $\mathbb{R}^d$ fixée par l'énoncé), on a ${}^tx\,x = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 > 0$ car les x_i ne sont pas tous nuls.

$$\boxed{\text{L'application } (x,y) \mapsto (x|y) = {}^ty\,x \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^d.}$$

(b) La matrice A possède d valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable; il s'ensuit que

$$\boxed{\text{la famille } (x_1, x_2, \ldots, x_d) \text{ est une base de } \mathbb{R}^d.}$$

(c) Soit $i \in [\![1, d]\!]$ fixé, et H_i l'hyperplan $\text{vect}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$.
D'après le 2. y_i est orthogonal à x_j pour tout $j \neq i$ (pour le produit scalaire précédemment défini), donc $y_i \in H_i^{\perp}$. Soit u_i un vecteur unitaire de la droite vectorielle $H_i^{\perp}$. Il existe un réel α_i tel que $y_i = \alpha_i\, u_i$. La condition ${}^t y_i\, x_i = 1$ équivaut à $\alpha_i\, {}^t u_i\, x_i = 1$ et comme $x_i \notin H_i$, ${}^t u_i\, x_i \neq 0$, donc il existe bien un réel α_i (d'ailleurs unique : $\alpha_i = \frac{1}{{}^t u_i\, x_i}$) tel que $\alpha_i\, {}^t u_i\, x_i = 1$. Comme i est arbitrairement fixé :

$$\boxed{\text{On peut choisir la famille } (y_1, y_2, \ldots, y_d) \text{ de sorte que pour tout } i \text{ de } [\![1, d]\!] \text{ on ait } {}^t y_i\, x_i = 1.}$$

4. Pour tout $i \neq j$, $A_i\, A_j = (x_i {}^t y_i)\,(x_j {}^t y_j) = x_i \underbrace{({}^t y_i\, x_j)}_{=0 \text{ car } \lambda_i \neq \lambda_j} {}^t y_j = 0$

Pour tout i de $[\![1, d]\!]$, $A_i^2 = (x_i {}^t y_i)\,(x_i {}^t y_i) = x_i \underbrace{({}^t y_i\, x_i)}_{=1} {}^t y_i = x_i {}^t y_i = A_i$.

En utilisant le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ on peut conclure :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, d]\!]^2, \quad A_i\, A_j = \delta_{ij}\, A_i.}$$

5. Pour tout j de $[\![1, d]\!]$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{d} A_i\right) x_j = \sum\limits_{i=1}^{d} A_i\, x_j = \sum\limits_{i=1}^{d} (x_i {}^t y_i)\ x_j = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i\, ({}^t y_i\ x_j) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i\, \delta_{ij} = x_j = I\, x_j$

Les matrices $\sum\limits_{i=1}^{d} A_i$ et I ont même image de la base $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$, donc sont égales.

De même, pour tout j de $[\![1, d]\!]$,
$\left(\sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i\right) x_j = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i\, x_j = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\, (x_i {}^t y_i)\ x_j = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\, x_i\, ({}^t y_i\ x_j) = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i\, x_i\, \delta_{ij} = \lambda_j\, x_j = A\, x_j$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{d} A_i = I \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} \lambda_i\, A_i = A.}$$

6. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $A^n = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i$.

L'égalité est vraie pour $n = 1$. Si elle est vraie pour n, alors
$A^{n+1} = A^n\, A = \Big(\sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i\Big) \Big(\sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j\, A_j\Big) = \sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_i^n\, \lambda_j\, A_i\, A_j = \sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_i^n\, \lambda_j\, \delta_{ij}\, A_i = \sum\limits_{i=1}^{d} \lambda_i^{n+1}\, A_i$.

$$\boxed{A^n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n\, A_i.}$$

7. $\dfrac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1 + \sum\limits_{i=2}^{d} \dfrac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} A_i$ et pour tout $i \geq 2$, $\dfrac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} = \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ car $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_1^n} A^n = A_1.}$$

8. Montrons : $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \lambda_1 \in]-1, 1]$.

La condition est suffisante :
– si $\lambda_1 = 1$, alors d'après la question précédente, $\lim_{n\to\infty} A^n = A_1$;
– si $\lambda_1 \in]-1,1[$, alors comme $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_d|$, tous les λ_i sont dans $]-1,1[$, et $A^n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n A_i$ tend vers 0.
La condition est nécessaire :
si $|\lambda_1| > 1$, ou si $\lambda_1 = -1$ alors $A^n = \lambda_1^n \left(\frac{1}{\lambda_1^n} A^n\right)$ ne tend pas vers une limite, puisque $\frac{1}{\lambda_1^n} A^n$ tend vers la limite non nulle A_1 ($A_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$) et que $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$$\boxed{\begin{array}{c}(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } \lambda_1 \in]-1,1] \\ \lim_{n\to\infty} A^n = \begin{cases} A_1 & \text{si } \lambda_1 = 1 \\ 0 & \text{si } |\lambda_1| < 1 \end{cases}\end{array}}$$

9. Partie I On avait trouvé les valeurs propres de A : $\lambda_1 = 1+\sqrt{2} > 1$ et $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$, avec $|\lambda_2| < \lambda_1$.
On a donc, pour tout $n \geq 0$, $A^n = (1+\sqrt{2})^n A_1 + (1-\sqrt{2})^n A_2$ d'où
$\rho_n = A^n \rho_0 = (1+\sqrt{2})^n (x_1 {}^t y_1) \rho_0 + (1-\sqrt{2})^n (x_2 {}^t y_2) \rho_0 = ({}^t y_1 \rho_0)(1+\sqrt{2})^n x_1 + ({}^t y_2 \rho_0)(1-\sqrt{2})^n x_2$
Ainsi, on voit que le vecteur $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^n} \rho_n$ tend vers un vecteur colinéaire à x_1; il en résulte que le rapport de ses coordonnées $\dfrac{u_n}{v_n}$ tend vers le rapport des coordonnées de x_1.
On détermine un vecteur propre x_1 de A associé à $1+\sqrt{2}$: par exemple $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; on retrouve ainsi

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}.}$$

Partie II Ici, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_3 = -1$; on a $A^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n A_2 + (-1)^n A_3$.
o_n étant le coefficient $(1,1)$ de A^n est bien de la forme indiquée.

$$\boxed{o_n \text{ est de la forme } \alpha\,(-1)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.}$$

On pourrait vérifier que $\gamma > 0$ en cherchant le coefficient $(1,1)$ de A_1; on peut prendre (calculs...) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar\phi \\ \bar\phi \end{pmatrix}$ comme vecteur propre de A associé à $\bar\phi = \lambda_1$; un vecteur propre de ${}^tA$ associé à $\bar\phi$ est $y = \begin{pmatrix} \bar\phi \\ 1 \\ \bar\phi \end{pmatrix}$; ${}^t x_1\, y = 2\bar\phi + \bar\phi^2 = 1 + 3\bar\phi$, donc $y_1 = \frac{1}{1+3\bar\phi}\, y$ vérifie la condition ${}^t x_1\, y_1 = 1$; le coefficient $(1,1)$ de A_1 est alors $\frac{\bar\phi}{1+3\bar\phi} > 0$ (et on peut retrouver la valeur $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$).

Partie V : Étude d'une population

a_n, b_n et c_n désignant le nombre d'insectes respectivement de première, de seconde et de troisième année après n années, on a, selon la description de l'évolution de la population faite dans l'énoncé :

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n/2 \\ c_{n+1} = b_n/4 \end{cases}$$

Explication :
– les insectes de première année de l'an $n+1$ viennent des b_n naissances provenant de ceux de deuxième année et des c_n naissances provenant de ceux de troisième année;
– les insectes de deuxième année de l'an $n+1$ sont les $a_n/2$ insectes survivant à la première année;

– les insectes de troisième année de l'an $n+1$ sont les $b_n/4$ insectes survivant à la deuxième année.

On a donc, en notant $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$: $\quad P_{n+1} = A\,P_n \quad$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

Étudions la réduction de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1/2 & -X & 0 \\ 0 & 1/4 & -X \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \\ -2C_2}}{=} \begin{vmatrix} -X & 1 & -1-2X \\ 1/2 & -X & 1+2X \\ 0 & 1/4 & -1/2-X \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{=} (1+2X) \begin{vmatrix} -X & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -X+1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$= -(1/2+X)\,\left(X^2 - X/2 - 1/4\right) = -(X+1/2)\,\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\,\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

A, ayant trois valeurs propres réelles distinctes, est diagonalisable, et en reprenant les notations du IV, on a :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0,809 \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} = -0,5 \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \approx -0,309$$

et d'après le 8. $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$. D'où, puisque $P_n = A^n\,P_0$ avec $P_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\text{L'effectif de la population tend vers 0.}}$$

En faisant une simulation à la calculatrice avec ces données, on constate que la population s'éteint au bout de 36 ans.