Banque PT 2005 — épreuve Maths. C

Partie I — Préambule

Question I.1
On a $S_0(z)T_0(z) = s_0t_0$, $S_1(z)T_1(z) = s_0t_0 + (s_0t_1 + s_1t_0)z + s_1t_1z^2$ et $S_2(z)T_2(z) == s_0t_0 + (s_0t_1 + s_1t_0)z + (s_0t_2 + s_1t_1 + s_2t_0)z^2 + (s_1t_2 + s_2t_1)z^3 + s_2t_2z^4$.

Question I.2
On écrit
$$\begin{aligned}
S_n(z)T_n(z) &= \sum_{i=0}^{n} s_iz^i \times \sum_{j=0}^{n} t_jz^j \\
&= \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} s_it_jz^{i+j} = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j\leqslant n}} s_it_jz^{i+j} + \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j>n}} s_it_jz^{i+j} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} s_it_{k-i}\right)z^k + z^n \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j>n}} s_it_jz^{i+j-n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_kz^k + z^nR(z),
\end{aligned}$$
où R est bien un polynôme de degré n.

Partie II — Étude des nombres de Bernoulli

Question II.1

II.1.a f et g sont définies sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

II.1.b Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dire que z tend vers 0, c'est dire que x et y tendent tous deux vers 0.
Or $e^z - 1 = e^x(\cos y + i \sin y) - 1 = (1 + x + o(x))(1 + iy + o(y)) = 1 + x + iy + o(x) + o(y) - 1 = z + o(|z|)$ car $|x| \leqslant |z|$ et $|y| \leqslant |z|$. Donc $f(z) = 1 + o(1)$ ce qui signifie que $f(z)$ tend vers 1. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

II.1.c On écrit $e^z = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout complexe z (le rayon de convergence est infini), donc, pour tout complexe z, on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$, le rayon de convergence étant toujours infini.

Question II.2
Pour x réel fixé, on écrit pour tout complexe z de D que $h_x(z) = g(z)e^{zx}$.
Or $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!}z^n$ et $e^{zx} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}z^n$, donc, d'après le préambule, h_x est développable en série entière avec un rayon de convergence au moins égal à 2π sous la forme $h_x(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_nz^n$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_{n-k}}{(n-k)!}\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_{n-k}x^k$.
Autrement dit $h_x(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!}z^n$ où $B_n(x)$ est le polynôme $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_{n-k}x^k$.
En particulier, $B_n(0) = \beta_n$.
Comme le produit $f(z)g(z)$ vaut 1, on a $f(0)\beta_0 = 1$ (c'est le coefficient constant du développement du produit $f(z)g(z)$ en série entière). Or $f(0) = 1$ donc $\beta_0 = 1$.

Question II.3

II.3.a $\quad h_{1-x}(z) = \dfrac{ze^{(1-x)z}}{e^z-1} = \dfrac{ze^z e^{-xz}}{e^z-1} = \dfrac{ze^{-xz}}{1-e^{-z}} = \dfrac{(-z)e^{x\times(-z)}}{e^{-z}-1} = h_x(-z).$

On en déduit, puisqu'il y a unicité des coefficients d'un développement en série entière, que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

II.3.b $\quad h_{1+x}(z) - ze^{zx} = \dfrac{ze^{(1+x)z}}{e^z-1} - ze^{zx} = ze^{zx}\left(\dfrac{e^z}{e^z-1} - 1\right) = \dfrac{ze^{zx}}{e^z-1} = h_x(z).$

Ainsi, $h_{1+x}(z) - h_x(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(1+x)-B_n(x)}{n!} z^n = ze^{zx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} z^n$, donc, en identifiant à nouveau les coefficients des séries entières écrites, on trouve $B_0(1+x) - B_0(x) = 0$ (ce qui est normal car $B_0(1+x) = B_0(x) = 1$), et, pour $n \geqslant 1$, $B_n(1+x) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

Pour $n = 1$, ceci fournit $B_1(1+x) - B_1(x) = 1$ donc $B_1(1) = 1 + B_1(0) = 1 + \beta_1$.

Si $n \geqslant 2$, on a en revanche $B_n(1) - B_n(0) = 0$, donc finalement $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(1) = \begin{cases} 1 + B_1(0), & \text{si } n = 1; \\ B_n(0), & \text{sinon.} \end{cases}$

Question II.4

II.4.a $\quad$ Si $n = m$, on a bien $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi = 2\pi\delta_{nn}$.

Si $n \neq m$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \left[\frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = \frac{1-1}{i(n-m)} = 0.$

II.4.b $\quad$ Pour r fixé dans $]0, 2\pi[$ (ce qui garantit que $z = re^{i\theta}$ reste dans D), on a :

$$h_x(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{B_m(x)}{m!} r^m e^{i(m-n)\theta}.$$

Si on sait justifier l'interversion des symboles $\sum$ et $\int$, il est facile de conclure. En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} h_x(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{B_m(x)}{m!} r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{B_m(x)}{m!} r^m 2\pi\delta_{mn} = 2\pi r^n \frac{B_n(x)}{n!}. \end{aligned}$$

puisque, dans la somme, tous les termes d'indices $m \neq n$ sont nuls.

La justification de l'interversion me semble hors de portée d'un élève de PT. Voici une façon de procéder.

On travaille pour n fixé. Soit $p \geqslant n$ un entier quelconque, et décomposons l'intégrale en deux : $\displaystyle\int_0^{2\pi} h_x(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = S_p + R_p$ où $S_p = \displaystyle\sum_{m=0}^{p} \frac{B_m(x)}{m!} r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta$ (car il s'agit d'une somme d'un nombre fini de termes, pour laquelle on peut sans problème intervertir $\sum$ et $\int$) et où le reste partiel s'écrit $R_p = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{m=p+1}^{+\infty} \frac{B_m(x)}{m!} r^m e^{i(m-n)\theta}\, d\theta$.

Bien sûr (c'est le calcul précédent) : $S_p = 2\pi r^n \dfrac{B_n(x)}{n!}$ car $p \geqslant n$.

Il s'agit donc finalement de montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} R_p = 0$.

Or $|R_p| \leqslant \displaystyle\int_0^{2\pi} \sum_{m=p+1}^{+\infty} \left|\frac{B_m(x)}{m!}\right| r^m\, d\theta = 2\pi \sum_{m=p+1}^{+\infty} \left|\frac{B_m(x)}{m!}\right| r^m.$

On sait que la série entière $(\sum \dfrac{B_m(x)}{m!} z^m)$ est de rayon de convergence $R \geqslant 2\pi$. Cela entraîne l'**absolue** convergence pour $z = r$, c'est-à-dire la convergence de la série $(\sum \left|\dfrac{B_m(x)}{m!}\right| r^m)$. Or le majorant qu'on a trouvé ci-dessus de R_p est $2\pi R'_p$ où R'_p est le reste partiel de la série $(\sum \left|\dfrac{B_m(x)}{m!}\right| r^m)$: dire qu'elle converge, c'est dire que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} R'_p = 0$ donc que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} R_p = 0$.

II.4.c La notation choisie par l'énoncé est certainement abusive. Mais, au moins, elle n'est pas ambigüe. Pour x réel et z dans D, on écrit $\dfrac{\partial h_x}{\partial x}(z) = \dfrac{z^2 e^{zx}}{e^z - 1} = z h_x(z)$.

II.4.d La dérivabilité du membre de gauche est évidente : tout polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. La dérivée du membre de gauche vaut $2\pi r^n \dfrac{B_n'(x)}{n!}$.

À r fixé, considérons $\varphi : (x, \theta) \mapsto h_x(re^{i\theta})e^{-in\theta}$. φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ et, comme il ne s'agit pas d'une intégrale impropre, cela suffit pour affirmer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(x, \theta)\, d\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et la dérivée du membre de droite est $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} re^{i\theta} h_x(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = r \int_0^{2\pi} h_x(re^{i\theta})e^{-i(n-1)\theta}\, d\theta$.

On reconnaît là, d'après II.4.b, $r \times 2\pi r^{n-1} \dfrac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}$. On a donc démontré, pour tout réel x, l'égalité : $2\pi r^n \dfrac{B_n'(x)}{n!} = r \times 2\pi r^{n-1} \dfrac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}$ ou encore : $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$.

Question II.5

Si $n > 0$, on a $n + 1 \geqslant 2$.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\, dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B_{n+1}'(x)\, dx = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0$ d'après II.3.b.

Remarque : $B_0 = 1$, $B_1' = 1$ et $B_1(0) = \beta_1$ donc $B_1 = X + \beta_1$. Alors $\displaystyle\int_0^1 B_1(x)\, dx = 0 = \frac{1}{2} + \beta_1$ donc $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.

Question II.6

Considérons la restriction à $]-2\pi, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ de la fonction g (prolongée en 0 par $g(0) = 1$) et notons $G(x) = g(x) - \beta_1 x = g(x) + \dfrac{x}{2}$.

On a $G(x) - G(-x) = x + \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{e^{-x} - 1} = x + \dfrac{x}{e^x - 1} - \dfrac{xe^x}{e^x - 1} = \dfrac{xe^x - x + x - xe^x}{e^x - 1} = 0$, donc G est une fonction paire. Or le développement en série entière de G est $G(x) = \beta_0 + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n$ et ainsi les coefficients β_{2n+1} pour $n \geqslant 1$ sont bien tous nuls.

Question II.7

II.7.a On a déjà vu (II.3.b) que, pour $n \geqslant 2$, $B_n(1) = B_n(0)$. Or II.2.c montre que $B_n(0) = \beta_n$ donc $B_n(1) = \beta_n$.

On a écrit (II.2) que $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} x^k$, donc $B_n(1) - B_n(0) = 0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k}$.

Autrement dit, pour $n \geqslant 2$, $n\beta_{n-1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} = 0$ donc

$$(\star) \quad \beta_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k}.$$

On sait que $\beta_0 = 1$, qui est rationnel. Supposons qu'on sache que tous les β_k pour $0 \leqslant k \leqslant p$ sont rationnels, alors $(\star)$ permet de calculer β_{p+1} en fonction de $\beta_0, \ldots, \beta_p$, dont il est combinaison linéaire à coefficients rationnels (ce sont les $-\dfrac{1}{n}\dbinom{n}{k}$) : cela prouve bien que β_{p+1} est également rationnel, et la récurrence s'enclenche.

II.7.b On a déjà vu que $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\dfrac{1}{2}$, puis d'après $(\star)$, $\beta_2 = -\dfrac{1}{3}(\dbinom{3}{3}\beta_0 + \dbinom{3}{2}\beta_1) = \dfrac{1}{6}$. Enfin $\beta_3 = 0$ car 3 est impair et supérieur à 2.

(Pour les curieux : $\beta_4 = -\dfrac{1}{5}(\dbinom{5}{5}\beta_0 + \dbinom{5}{4}\beta_1 + \dbinom{5}{3}\beta_2 + \dbinom{5}{2}\beta_3) = -\dfrac{1}{30}$.)

II.7.c De $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} X^k$, on tire alors $B_0 = 1$, $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$, $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$, et même si on veut : $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$.

Partie III — Étude de la fonction Zêta

Question III.1

III.1.a $\widetilde{B}_n$ est 1-périodique et se prolonge sur $[0,1]$ en B_n qui est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) : c'est dire que $\widetilde{B}_n$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

III.1.b

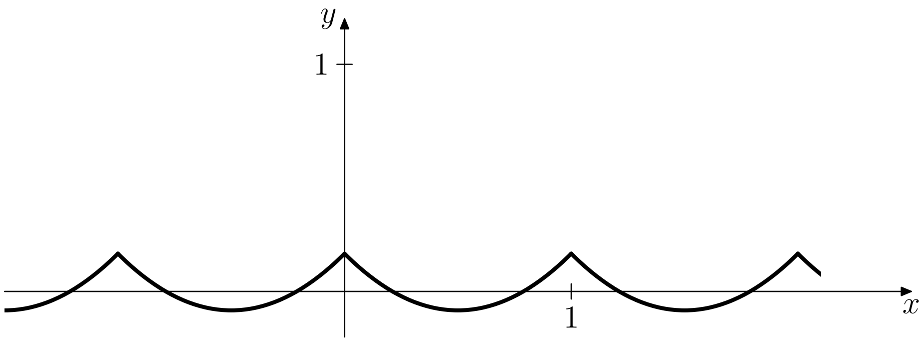

Figure 1 La fonction $\widetilde{B}_2$

Question III.2

III.2.a $\widetilde{B}_n$ étant 1-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$. La somme de sa série de Fourier coïncide bien avec $\widetilde{B}_n$ car, au point de discontinuité (à la période près), on a défini $\widetilde{B}_n(0) = \dfrac{B_n(0) + B_n(1)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \widetilde{B}_n(x) + \lim\limits_{x \to 0^-} \widetilde{B}_n(x)\right)$.

En réalité, pour $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1) = \beta_n$ donc $\widetilde{B}_n$ est tout simplement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

On a

$$a_0(\widetilde{B}_n) = \int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\,dx, \quad a_k(\widetilde{B}_n) = 2\int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\cos 2\pi kx\,dx, \quad b_k(\widetilde{B}_n) = 2\int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\sin 2\pi kx\,dx.$$

III.2.b $\widetilde{B}_1(x) = x - 1/2$, donc $a_0(\widetilde{B}_1) = 0$.

III.2.c Pour $k \geqslant 1$, on trouve facilement (par des intégrations par parties) : $a_k(\widetilde{B}_1) = 0$, $b_k(\widetilde{B}_1) = -\dfrac{1}{k\pi}$; $a_k(\widetilde{B}_2) = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ et $b_k(\widetilde{B}_2) = 0$.

III.2.d On a vu que pour tout entier $n > 0$, on a $\widetilde{B}'_{n+1} = (n+1)\widetilde{B}_n$. On en déduit, pour $k \geqslant 1$, que :

$$\begin{aligned}
a_k(\widetilde{B}_{n+1}) &= 2\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\cos 2\pi kx\,dx \\
&= \left[\widetilde{B}_{n+1}(x)\frac{\sin 2\pi kx}{\pi k}\right]_0^1 - \frac{n+1}{\pi k}\int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\sin 2\pi kx\,dx \\
&= -\frac{n+1}{2k\pi} b_k(\widetilde{B}_n).
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
b_k(\widetilde{B}_{n+1}) &= 2\int_0^1 \widetilde{B}_{n+1}(x)\sin 2\pi kx\,dx \\
&= \left[-\widetilde{B}_{n+1}(x)\frac{\cos 2\pi kx}{\pi k}\right]_0^1 + \frac{n+1}{\pi k}\int_0^1 \widetilde{B}_n(x)\cos 2\pi kx\,dx \\
&= \frac{n+1}{2k\pi} a_k(\widetilde{B}_n),
\end{aligned}$$

car $\widetilde{B}_{n+1}(1) = \widetilde{B}_{n+1}(0)$.

III.2.e On en déduit que $a_k(\widetilde{B}_{n+2}) = -\dfrac{(n+1)(n+2)}{4k^2\pi^2}a_k(\widetilde{B}_n)$ et $b_k(\widetilde{B}_{n+2}) = -\dfrac{(n+1)(n+2)}{4k^2\pi^2}b_k(\widetilde{B}_n)$.
Or $a_k(\widetilde{B}_1) = 0$ donc tous les $a_k(\widetilde{B}_{2n+1})$ pour $n \geqslant 0$ sont nuls.
De même $b_k(\widetilde{B}_2) = 0$ donc tous les $b_k(\widetilde{B}_{2n})$ pour $n \geqslant 1$ sont également nuls.
III.2.f Appliquant ce qui a été dit au début de la question précédente, on obtient naturellement :

$$a_k(\widetilde{B}_{2n}) = (-1)^{n-1}\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\times 4\times 3}{(2k\pi)^{n-1}}a_k(\widetilde{B}_2) = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2.(2k\pi)^{n-1}}\frac{1}{k^2\pi^2} = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}.$$

Alors $b_k(\widetilde{B}_{2n+1}) = \dfrac{2n+1}{2k\pi}a_k(\widetilde{B}_{2n}) = \dfrac{2(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(2k\pi)^{2n+1}}$.
III.2.g D'après II.5, pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$ donc $a_0(\widetilde{B}_n) = 0$.
On a dit en 2.a que $\widetilde{B}_n$ coïncidait en tout point avec la somme de sa série de Fourier.
On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{B}_{2n}(x) = (2n)!2(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2n}}$$

$$\widetilde{B}_{2n+1}(x) = (2n+1)!2(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{(2k\pi)^{2n+1}}.$$

Question III.3

III.3.a On sait que la série $(\sum \frac{1}{k^x})$ converge si et seulement si $x > 1$.
III.3.b On a $\widetilde{B}_{2n}(0) = (2n)!2(-1)^{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi)^{2n}k^{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$.
Or $\widetilde{B}_{2n}(0) = \beta_{2n}$ donc $\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\beta_{2n}$.
III.3.c En particulier $\zeta(2) = \dfrac{2\pi^2}{2}\beta_2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.