Banque PT 2009 — épreuve C

Partie I

Question I.1

I.1.a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$.

I.1.b f est bornée : soit $M > 0$ tel que $\forall t, |f(t)| \leqslant M$. Alors $t \mapsto e^{-st}f(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et bornée par $|e^{-st}f(t)| \leqslant Me^{-st}$ or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\,dt$ est absolument convergente donc convergente.

Question I.2

$F(s) = \displaystyle\int_a^b \tau e^{-st}\,dt = \left[-\frac{\tau}{s}e^{-st}\right]_a^b = \frac{\tau}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$.

Question I.3

I.3.a On écrit directement :

$$\begin{aligned}\int_0^N e^{-st}f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1} e^{-st}f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}(-1)^n\tau_n e^{-st}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n\tau_n}{s}(e^{-ns} - e^{-(n+1)s}) = \frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\tau_n e^{-ns}.\end{aligned}$$

Comme $|(-1)^n\tau_n e^{-ns}| \leqslant e^{-ns} = (e^{-s})^n = q^n$ où $0 < q < 1$, et comme $(\sum q^n)$ est alors convergente, on en déduit que $(\sum(-1)^n\tau_n e^{-ns})$ est absolument convergente, donc convergente.

On a vu que $F(s)$ existe (puisque f est bornée par 1 dans cette question), et donc

$$F(s) = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-st}f(t)\,dt = \frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\tau_n e^{-ns} = \sum_{n=0}^{+\infty}U_n(s),$$

où on a posé $U_n(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s}(-1)^n\tau_n e^{-ns}$.

I.3.b Si $n \geqslant 2$ et $n = 2p$ pair (avec donc $p \geqslant 1$), on a $\tau_{n+1} - \tau_n = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}} > 0$.

Si $n \geqslant 2$ et $n = 2p+1$ impair (avec donc $p \geqslant 1$), on a $\tau_{n+1} - \tau_n = \dfrac{1}{\sqrt{2p+2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2p+1-1}} < 0$.

Autrement dit $\tau_{n+1} - \tau_n$ est positif si n pair et négatif si n impair.

Bien sûr, $\tau_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$ et $(\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}})$ diverge donc la série $(\sum \tau_n)$ diverge.

On écrit un développement généralisé :

$$\tau_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{2n\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}),$$

ce qui donne le résultat demandé avec $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Alors $(-1)^n\tau_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} + \delta_n$ où $|\delta_n| = O(\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}})$.

Mais $(\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ est une série alternée convergente d'après le critère spécial, puisque $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroît vers 0.

De même $(\sum \frac{1}{2n\sqrt{n}})$ est une série de Riemann convergente car $3/2 > 1$.
Enfin, $(\sum \delta_n)$ est une série absolument convergente (car bornée par une série de Riemann convergente).
Finalement, $(\sum (-1)^n \tau_n)$ converge, comme somme de séries convergentes.

Question I.4

I.4.a Comme f est bornée, $t \mapsto f(t/n) - f(0)$ aussi, et l'intégrale proposée est bien convergente d'après I.1.b.
Le changement de variable $u = nt$ et la question I.1.a pour $s = 1$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} nF(n) - f(0) &= n \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt}\, dt - f(0) \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(\frac{u}{n}) e^{-u}\, du - \int_0^{+\infty} f(0) e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} (f(\frac{t}{n}) - f(0)) e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

I.4.b $\varepsilon > 0$ est fixé. On sait que f est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall x, |f(x)| \leqslant M$. Alors, en particulier, pour tout t et tout n, $|f(\frac{t}{n}) - f(0)| \leqslant 2M$.
Reste donc à trouver A_ε tel que $\displaystyle\int_{A_\varepsilon}^{+\infty} 2Me^{-t}\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$: mais l'intégrale vaut $2Me^{-A_\varepsilon}$ et il suffit donc de choisir $A_\varepsilon = \ln \frac{4M}{\varepsilon}$, qui ne dépend effectivement pas de n.

I.4.c Alors, pour tout n, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |nF(n) - f(0)| &= \left| \int_0^{+\infty} (f(\frac{t}{n}) - f(0)) e^{-t}\, dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^{A_\varepsilon} (f(\frac{t}{n}) - f(0)) e^{-t}\, dt \right| + \left| \int_{A_\varepsilon}^{+\infty} (f(\frac{t}{n}) - f(0)) e^{-t}\, dt \right| \\ &\leqslant \int_0^{A_\varepsilon} \left| f(\frac{t}{n}) - f(0) \right| e^{-t}\, dt + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Mais f est continue en 0 : pour le ε que nous avons fixé, nous savons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leqslant x \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors, pour $n \geqslant \frac{A_\varepsilon}{\eta}$, on aura, quand $0 \leqslant t \leqslant A_\varepsilon$, $|f(\frac{t}{n}) - f(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ donc

$$0 \leqslant \int_0^{A_\varepsilon} \left| f(\frac{t}{n}) - f(0) \right| e^{-t}\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{A_\varepsilon} e^{-t}\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ on savait trouver $N_\varepsilon = \frac{A_\varepsilon}{\eta}$ tel que $n \geqslant N_\varepsilon$ implique $|nF(n) - f(0)| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie exactement que $\lim_{n \to +\infty} (nF(n) - f(0)) = 0$.

Partie II

Question II.1

Les racines sont $\lambda_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Question II.2

$x \mapsto x^2 - x + 1$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$, donc les théorèmes usuels montrent que f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Question II.3

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$.

Question II.4

On applique la formule de Leibniz à l'ordre n au produit $(x^2+x-1)f(x)$ et comme les dérivées d'ordre 3 ou plus du polynôme sont toutes nulles, on obtient directement la formule de l'énoncé.

Question II.5

II.5.a $a_0 = f(0) = -1$ et $a_1 = f'(0) = -1$.

II.5.b La relation obtenue au II.4, appliquée en $x = 0$, fournit, pour $p \geqslant 2$: $-p!u_p + p.(p-1)!u_{p-1} + p(p-1).(p-2)!u_{p-2} = 0$, ce qui se simplifie par $p!$ et donne $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.

II.5.c On a reconnu une suite de Fibonacci. L'équation caractéristique est $x^2 = x+1$, dont les racines sont $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$. On sait qu'il existe alors deux constantes a et b telles que, $\forall p, u_p = \frac{a}{\lambda_1^p} + \frac{b}{\lambda_2^p}$.

Les conditions $u_0 = u_1 = -1$ conduisent alors à $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ donc

$$\forall p, u_p = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\lambda_1^{-p} - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\lambda_2^{-p}.$$

Question II.6

La formule de Taylor-Young annonce que si f est de classe C^n sur un intervalle ouvert I contenant un réel a, alors, au voisinage de a, on dispose de $f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$.

On l'applique ici en $a = 0$ et on trouve le développement limité demandé : $f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} u_k x^k + o(x^n)$.

Question II.7

II.7.a On trouve facilement $\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{x-\lambda_1} - \frac{1}{x-\lambda_2}\right)$ ce qui revient à dire que $\alpha = -\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

II.7.b On a $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x-\lambda} = \frac{(-1)^n n!}{(x-\lambda)^{n+1}}$, ce qu'établit facilement une récurrence sur n.

II.7.c On en déduit que

$$u_p = \frac{1}{p!}(-\frac{1}{\sqrt{5}})\left(\frac{(-1)^p p!}{(-\lambda_1)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p}{(-\lambda_2)^{p+1}}\right) = \frac{1}{\lambda_1\sqrt{5}}\lambda_1^{-p} - \frac{1}{\lambda_2\sqrt{5}}\lambda_2^{-p},$$

ce qui est la même réponse qu'en II.5.c puisque $\frac{1}{\lambda_1\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\lambda_2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Question II.8

II.8.a La suite (v_n) est géométrique de raison λ_2 et $0 \leqslant \lambda_2 < 1$ ($\lambda_2 \approx 0{,}618$) donc la série est bien convergente.

II.8.b Le calcul du reste partiel d'une série géométrique est bien connu :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\lambda_2^{n+1}}{1-\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2^{n+3}.$$

Partie III

Question III.1

III.1.a La série entière $(\sum nx^n)$ est de rayon de convergence égal à 1, de même que la série entière $(\sum x^n)$.

Or on peut dériver/intégrer terme à terme sur l'intervalle $]-1,1[$, et ainsi, posant $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, j'ai $T'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

III.1.b Si $y > 1$, on a $x = \frac{1}{y} \in]0,1[$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{(1-\frac{1}{y})^2} = \frac{1}{y-2+\frac{1}{y}}.$$

Question III.2

III.2.a Là encore, on a une suite de Fibonacci, mais cette fois les conditions initiales ont changé.
On sait qu'il existe deux constantes a' et b' telles que, $\forall n, w_n = \dfrac{a'}{\lambda_1^n} + \dfrac{b'}{\lambda_2^n}$. Comme $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$, on trouve : $a = -b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ donc $w_n = -\dfrac{\lambda_1^{-n}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\lambda_2^{-n}}{\sqrt{5}}$.
On a $\lambda_1 < -1 < 0 < \lambda_2 < 1$ donc $|w_n| \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}\lambda_2^n}$ et $\left|\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right| \sim \dfrac{1}{\lambda_2}$. Ainsi le rayon de convergence de la série entière $(\sum w_n x^n)$ est, d'après la règle de d'Alembert, égal à $R = \lambda_2$.

III.2.b On travaille ici pour $x \in]-\lambda_2, \lambda_2[$: notons alors $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, j'ai $xS(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n$ et $x^2 S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} w_{n-2} x^n$ donc

$$(1 - x - x^2)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (w_n - w_{n-1} - w_{n-2})x^n + (w_1 - w_0)x + w_0 = 0 + x + 0 = x.$$

III.2.c Soit maintenant $y > \dfrac{1}{\lambda_2}$ de sorte que $x = \dfrac{1}{y} \in]0, \lambda_2[$, ce qui permet de lui appliquer le résultat précédent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{y - 1 - \frac{1}{y}}.$$

Partie IV

Notons z_n le nombre de solutions.
Si $n = 1$, il n'y a qu'une solution : un domino vertical, et $z_1 = 1$.
Si $n = 2$, il y a deux solutions : deux dominos verticaux, ou deux dominos horizontaux superposés. Ainsi $z_2 = 2$.
Supposons qu'on ait su paver les quadrillages de longueur inférieure ou égale à $n - 1$, et considérons un pavage de longueur $n \geqslant 3$.
On regarde les derniers dominos de droite : soit c'est un domino vertical, et il y a à sa gauche un pavage d'un quadrillage de longueur $n - 1$, ce qui fournit z_{n-1} solutions ; ou bien ce sont deux dominos horizontaux superposés, et il y a à leur gauche un pavage d'un quadrillage de longueur $n - 2$, ce qui fournit z_{n-2} solutions. On a donc $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$, et on retrouve la suite de Fibonacci classique, c'est-à-dire précisément $z_n = w_n$.