Banque filière PT

Epreuve Mathématique II-B

Corrigé de J-Pierre DURIN (PT Cluny)

Première Partie

1) **Soit $\alpha \neq 0$, $F = I_3 + 2\alpha E_1\,{}^tE_2$ et $G = {}^tF$.** $F = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$ implique que Vect $(\vec{e_3})$ est stable par f.

$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{e_2}) = 2\alpha\vec{e_1} + \vec{e_2}$ impliquent aussi que Vect $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est stable par f.

2) **Valeurs propres de gof.**

$\vec{e_3}$ est un vecteur propre de gof associé à la valeur propre 1. En effet gof $(\vec{e_3}) = g(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$.

Vect $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est également stable par g. La restriction de gof à Vect $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ a pour matrice dans $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2\alpha & 4\alpha^2+1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont réelles (matrice symétrique réelle) et sont les racines du polynome $X^2 - (4\alpha^2 + 1)X + 1$ donc vérifient: $\mu_1\mu_2 = 1$ et $\mu_1 + \mu_2 = 4\alpha^2 + 1$ ce qui implique que μ_1 et μ_2 sont de même signe strictement positif.

Conclusion: On numérotera les valeurs propres de gof, μ_1, μ_2, μ_3 avec $\mu_1 > \mu_2 > 0$ et $\mu_1\mu_2 = \mu_3 = 1$.

3) Soit a et b deux réels, on définit les deux vecteurs: $\vec{u_1} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\vec{e_1} + \vec{e_2}$

a) $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ se traduit par $ab + 1 = 0$

$f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ se traduit par $(a + 2\alpha)(b + 2\alpha) + 1 = 0$

On aura simultanément $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si a et b vérifient $ab = -1$ et $2\alpha(a + b + 2\alpha) = 0$ soit, puisque $\alpha \neq 0$, $ab = -1$ et $a + b = -2\alpha$

Conclusion: $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si a et b sont racines de $X^2 + 2\alpha X - 1 = 0$

b) On pose $\vec{u_3} = \vec{e_3}$. Cherchons a et b pour que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ et $(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), f(\vec{u_3}))$ soient deux bases orthogonales, $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ étant de plus, directe.

On doit avoir $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ donc a et b sont racines de $X^2 + 2\alpha X - 1 = 0$

$\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = (a - b)\,\vec{e_3} = (a - b)\,\vec{u_3}$ donc $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ sera orthogonale directe si on choisit $a > b$.

On prendra donc $a = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ et $b = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}$. L'orthogonalité entre $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ et $\vec{u_3}$ d'une part et $(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}))$ et $f(\vec{u_3})$ d'autre part étant acquise d'après 1).

4) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ **est une base de vecteurs propres de gof**. En effet:

gof$(\vec{u}_1)$ = g [(a + 2α) $\vec{e}_1$ + $\vec{e}_2$] = (a + 2α) g ($\vec{e}_1$) + g ($\vec{e}_2$) = (a + 2α) ($\vec{e}_1$ + 2α$\vec{e}_2$) + $\vec{e}_2$ = (a + 2α)$\vec{e}_1$ + [2α(a + 2α) + 1] $\vec{e}_2$

gof$(\vec{u}_1) = [\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}]\vec{e}_1 + [2\alpha(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+1]\vec{e}_2 = [2\alpha(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+1][(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})\vec{e}_1 + \vec{e}_2]$

car $[2\alpha(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+1](-\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}) = \alpha+\sqrt{\alpha^2+1}$ (vérification en développant)

<u>Conclusion:</u> $\vec{u}_1$ **est vecteur propre de gof associé à la valeur propre** $2\alpha(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+1$.

Un calcul analogue montre que $\vec{u}_2$ **est vecteur propre de gof associé à la valeur propre** $2\alpha(\alpha-\sqrt{\alpha^2+1})+1$.

On sait déjà que $\vec{u}_3$ **est vecteur propre de gof associé à la valeur propre 1.**

5) Soit r_θ la rotation d'axe orienté par $\vec{e}_3$ et d'angle θ ∈] -π, π [. On a: S = $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit

S = $\begin{pmatrix} \cos\theta & 2\alpha\cos\theta+\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -2\alpha\sin\theta+\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ S est la matrice de s dans une base orthonormée directe. s sera un endomorphisme symétrique si S est symétrique, c'est à dire si: 2αcosθ + sinθ = – sinθ . On a alors

S = $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -2\alpha\sin\theta+\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et les racines de $X^2 + 2(\alpha\sin\theta - \cos\theta)X + 1$. Les deux racines sont strictement positives si cosθ – αsinθ > 0. On cherche donc θ ∈] -π, π [tel que: αcosθ = – sinθ
et cosθ – αsinθ > 0

<u>1er cas</u>: α > 0 θ = – Arctanα ∈] -π/2, 0 [alors cosθ – αsinθ > 0
θ = – Arctanα + π ∈] π/2, π [alors cosθ – αsinθ < 0

<u>2èm cas</u>: α < 0 θ = – Arctanα ∈] 0, π/2 [alors cosθ – αsinθ > 0
θ = – Arctanα – π ∈] -π, -π/2 [alors cosθ – αsinθ < 0

<u>Conclusion:</u> c'est toujours θ = – Arctanα qu'il faut choisir pour que s soit symétrique à valeurs propres > 0.

<u>Deuxième Partie</u>

1) On a: $\vec{Om}_{n+1}$ = (gof)($\vec{Om}_n$) et $\vec{Op}_{n+1}$ = (fog)($\vec{Op}_n$) pour n ≥ 0 et par conséquent:

$\vec{Om}_n$ **= (gof)ⁿ(**$\vec{Om}_0$ **)** et $\vec{Op}_n$ **= (fog)ⁿ(**$\vec{Op}_0$ **)**

a) Comme Vect ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) et Vect ($\vec{e}_3$) sont stables par gof et fog et que de plus gof ($\vec{e}_3$) = $\vec{e}_3$ et fog ($\vec{e}_3$) = $\vec{e}_3$ on a:

(gof) ($x_n\vec{e}_1 + y_n\vec{e}_2 + z_n\vec{e}_3$) = $x_{n+1}\vec{e}_1 + y_{n+1}\vec{e}_2 + z_n\vec{e}_3$ et donc $\mathbf{z_{n+1} = z_n}$ **la suite z_n est constante**. On a le même résultat pour la suite z^ₙ .

<u>Conclusion:</u> $\mathbf{z_n = \hat{z}_n = z_0}$ **avec** $\vec{Om}_0 = \mathbf{x_0}\vec{e}_1 + \mathbf{y_0}\vec{e}_2 + \mathbf{z_0}\vec{e}_3$

b) (m_n) est convergente si $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$ quand $n \to \infty$. Alors la suite (p_n) est convergente car les coordonnées de

p_n ont pour limite: $\begin{pmatrix} x^\wedge \\ y^\wedge \\ z^\wedge \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Réciproquement, supposons que la suite (p_n) soit convergente, alors la suite (m_n) est convergente car les coordonnées de m_n auront pour limite: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x^\wedge \\ y^\wedge \\ z^\wedge \end{pmatrix}$

2) On suppose que la suite (m_n) est convergente de limite m.

a) On a vu que $\overrightarrow{Om_{n+1}}$ = (gof)($\overrightarrow{Om_n}$). En faisant tendre n vers l' ∞ et en utilisant la continuité de gof, (x_{n+1} et y_{n+1} sont des fonctions continues de x_n et y_n car: GF = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 5y_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$ on a par unicité de la limite:

$\overrightarrow{Om}$ **=(gof)(**$\overrightarrow{Om}$ **) et donc** $\overrightarrow{Om}$ **est invariant par gof.**

b) m est donc un point tel que $\overrightarrow{Om}$ est un vecteur propre de gof associé à la valeur propre 1. Un tel vecteur propre est de la forme k$\overrightarrow{e_3}$, or on sait que la composante de $\overrightarrow{Om}$ sur $\overrightarrow{e_3}$ est égale à z_0 lorsque $\overrightarrow{Om_0}$ = $x_0\overrightarrow{e_1}$ + $y_0\overrightarrow{e_2}$ + $z_0\overrightarrow{e_3}$

<u>**Conclusion:**</u> $\overrightarrow{Om}$ = $z_0\overrightarrow{e_3}$ **m est la projection orthogonale de m_0 sur** $\overrightarrow{e_3}$

3) Soit Q la matrice de passage de Bc à B, et M'$_n$ = $\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

a) M'$_n$ représente la matrice colonne des composantes du vecteur $\overrightarrow{Om}$ relativement à la base B.

b) On a que $\overrightarrow{Om_{n+1}}$ = (gof)($\overrightarrow{Om_n}$) se traduit matriciellement par $M_{n+1} = GFM_n$

On a donc $M'_{n+1} = Q^{-1} M_{n+1} = Q^{-1}GF\, M_n = Q^{-1}GFQ\, M'_n$ et **finalement $M'_{n+1} = [Q^{-1}(GF)Q]\, M'_n$**

c) $Q^{-1}(GF)Q$ est une matrice diagonale ayant dans la diagonale les valeurs propres de gof, μ_1, μ_2, μ_3

$Q^{-1}(GF)Q = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $M'_n = [Q^{-1}(GF)Q]^n\, M'_0$ on aura: $M'_n = \begin{pmatrix} (3+2\sqrt{2})^n x'_0 \\ (3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$ et par conséquent: **une CNS pour que la suite M'$_n$ converge est que M'$_0$ =** $\begin{pmatrix} 0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$ **et alors M'$_n$** $\to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$

4) a) Dire que la suite (m_n) converge est équivalent à dire que la suite (M'$_n$) converge. Autrement dit, il faut que $M_0 = Q \begin{pmatrix} 0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$

soit $M_0 = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{2})y'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$

<u>Conclusion:</u> Le point m_0 doit donc être dans le plan (Π) d'équation $x + (1 + \sqrt{2}) y = 0$ dans le repère (O, Bc).

b) Soit $m_0 \in$ (Π) et non situé sur $(O, \vec{e_3})$ on a: $M_n = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$ soit

$M_n = \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ (3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$ ce qui traduit que les points m_n sont dans le plan (Π) à la cote $z = z_0$

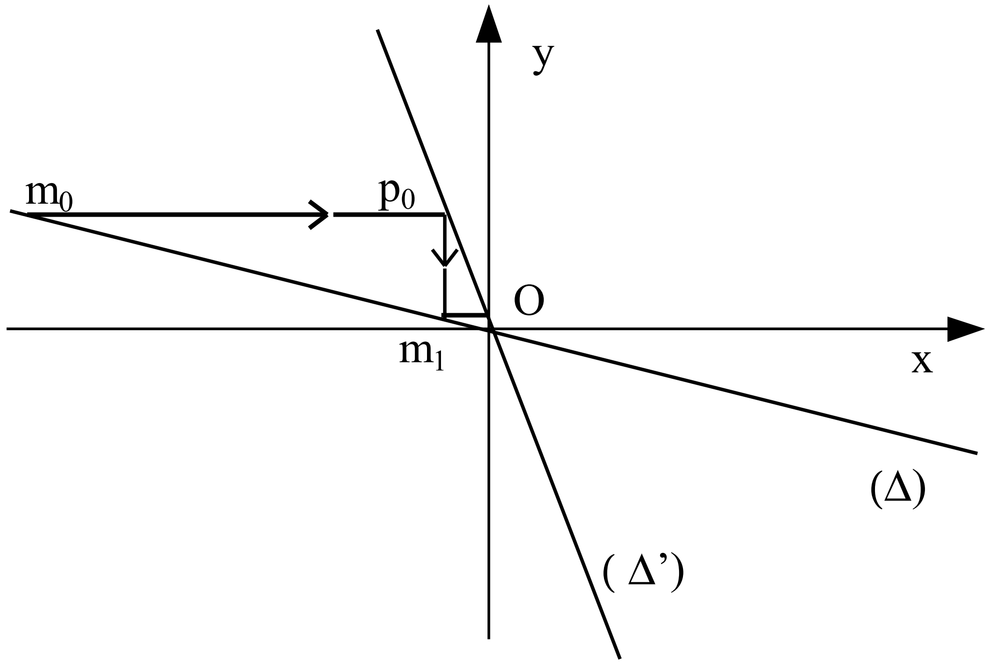
<u>Conclusion:</u> les points $m_n \in$ (Δ): $x + (1 + \sqrt{2}) y = 0$, $z = z0$.

On a $P_n = FM_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ (3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ (3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix}$

<u>Conclusion:</u> les points $p_n \in$ (Δ'): $x - (1 - \sqrt{2}) y = 0$, $z = z0$.

c) Dans le cas où $z_0 = 0$, les points **m_n et p_n** sont dans le plan xoy et on constate que **m_n et p_n ont la même ordonnée**.

$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_n = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ XX \\ 0 \end{pmatrix}$ **m_{n+1} et p_n ont la même abscisse.** D'où la construction des points m_i et p_i **sachant qu'ils sont situés sur (Δ) et (Δ')**



Troisième Partie

1) **a)** Φ endomorphisme de R^3 est dit défini positif si $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \quad \vec{x} \cdot \Phi(\vec{x}) > 0$.

Soit λ une valeur propre réelle de Φ et $\vec{x}$ un vecteur propre associé. On a: $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\Phi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ mais alors

$$\boldsymbol{\vec{x} \cdot \Phi(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \cdot \vec{x} = \lambda \|\vec{x}\|^2 > 0 \text{ implique } \lambda > 0.}$$

b) Soit Φ un endomorphisme symétrique ayant ses valeurs propres strictement positives ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$). On sait qu'un tel endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormée $B = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$.

Soit $\vec{x} = \alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \alpha_3 \vec{u_3}$ alors $\Phi(\vec{x}) = \alpha_1\lambda_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \lambda_2 \vec{u_2} + \alpha_3 \lambda_3 \vec{u_3}$ et

<u>Conclusion:</u> $\boldsymbol{\vec{x} \cdot \Phi(\vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2 > 0}$ **si** $\vec{x} \neq \vec{0}$

c) gof a pour matrice relativement à la base orthonormée Bc, ${}^tFF$ qui est une matrice symétrique. Ceci caractérise un endomorphisme symétrique de R^3.
det(f) > 0 implique que 0 n'est pas valeur propre de f et donc que f est bijective.
Mais alors, soit λ une valeur propre de gof et $\vec{x}$ un vecteur propre associé. (donc $\vec{x} \neq \vec{0}$)

$\vec{x} \cdot \text{gof}(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \cdot \vec{x} = \lambda \|\vec{x}\|^2$ d'une part et par ailleurs

$\vec{x} \cdot \text{gof}(\vec{x}) = {}^tX\,{}^tFF\,X = {}^t(FX)\,FX = \|f(\vec{x})\|^2 > 0$ car $f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ puisque f est injective. On en déduit que $\lambda > 0$

<u>Conclusion:</u> gof est symétrique et défini positif d'après b)

2) **a)** Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base orthogonale de R^3 constituée de vecteurs propres de gof.

$(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3))$ est alors une famille libre de R^3, donc une base. En effet, si cette famille était une famille liée, son image par g le serait aussi, or $gof(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$ avec $\lambda_i > 0$, et on aurait que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ serait une famille liée ce qui est contradictoire.

$(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3))$ est une famille orthogonale. En effet, calculons par exemple $f(\vec{u}_1) . f(\vec{u}_2)$.

$f(\vec{u}_1) . f(\vec{u}_2) = {}^t(FU_1)\, FU_2 = {}^tU_1\, {}^tFF\, U_2 = \vec{u}_1 . gof(\vec{u}_2) = \lambda_2\, \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = 0$

<u>Conclusion:</u> **la famille $(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3))$ est une base orthogonale de R^3**

b) On suppose que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3))$ sont deux bases orthogonales de R^3.

Soit $i \neq j$ $\vec{u}_i . gof(\vec{u}_j) = {}^tU_i\, {}^tFFU_j = {}^t(FU_i)\, FU_j = f(\vec{u}_i) . f(\vec{u}_j) = 0$

On en déduit par exemple que $gof(\vec{u}_1)$ est orthogonal à $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ et donc appartient à Vect $(\vec{u}_1)$, soit $gof(\vec{u}_1) = \lambda_1 \vec{u}_1$ ce qui traduit que $\vec{u}_1$ est vecteur propre de gof. Même raisonnement pour $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$.

<u>Conclusion:</u> **$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de R^3 constituée de vecteurs propres de gof.**

3) Soit $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base orthonormée de R^3 constituée de vecteurs propres de gof, où $gof(\vec{u}_i) = \mu_i \vec{u}_i$ et $\left\|\vec{u}_i\right\| = 1$.

a) Montrons ${}^tFF = \sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i\, {}^tU_i$ Il suffit pour cela de prouver que l'endomorphisme de matrice $\sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i\, {}^tU_i$ relativement à la base B, agit sur $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ comme le fait gof. Or en effet, par exemple pour $\vec{u}_1$:

$(\sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i\, {}^tU_i)\, U_1 = \sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i\, ({}^tU_i U_1) = \mu_1 U_1$ car ${}^tU_2 U_1 = {}^tU_3 U_1 = 0$ et ${}^tU_1 U_1 = 1$

et $\mu_1 U_1 = {}^tFF\, U_1$ puisque $\vec{u}_1$ est vecteur propre de gof associé à μ_1.

<u>Conclusion:</u> **${}^tFF = \sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i\, {}^tU_i$.**

b) Soit $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$ et $S = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i U_i\, {}^tU_i$

<u>Calcul de S^2</u> $S^2 = (\sum_{i=1}^{3} \lambda_i U_i\, {}^tU_i)(\sum_{j=1}^{3} \lambda_j U_j\, {}^tU_j) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i U_i\, {}^tU_i\, (\sum_{j=1}^{3} \lambda_j U_j\, {}^tU_j)$

$S^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i U_i (\sum_{j=1}^{3} \lambda_j\, {}^tU_i U_j\, {}^tU_j) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i U_i \lambda_i\, {}^tU_i$ car ${}^tU_i U_j = \vec{u}_i . \vec{u}_j = 0$ pour $j \neq i$ et ${}^tU_i U_i = 1$ d'où

<u>Conclusion:</u> **$S^2 = \sum_{i=1}^{3} \mu_i U_i\, {}^tU_i = {}^tFF$.**

s est un endomorphisme symétrique car sa matrice S relativement à une base orthinormée est une matrice symétrique. Montrons enfin que les valeurs propres de s sont > 0, ce qui permettra de conclure au caractère défini positif grâce à III1b

Or en effet: $SU_j = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i U_i {}^tU_i U_j = \lambda_j U_j$ puisque ${}^tU_i U_j = \vec{u_i} \cdot \vec{u_j} = 0$ pour $i \neq j$. Ceci prouve que $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ sont vecteurs propres de s associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et les λ_i sont > 0.

<u>Conclusion:</u> s est un endomorphisme symétrique, défini positif.

4) **a)** Soit $R = FS^{-1}$

Rappelons que ce qui précède assure que s est injective donc bijective et que par conséquent S^{-1} existe.

R est une matrice orthogonale si et seulement si ${}^tRR = I_3$. Or en effet:

${}^tRR = {}^tS^{-1}\,{}^tFF\,S^{-1} = {}^tS^{-1} S^2 S^{-1} = {}^tS^{-1} S = ({}^tS)^{-1} = S^{-1} S = I_3$ On a utilisé ${}^tFF = S^2$, ${}^tS^{-1} = ({}^tS)^{-1}$ et ${}^tS = S$

<u>Conclusion:</u> $R = FS^{-1}$ est orthogonale.

b) On en déduit que $F = RS$ soit $f = r o s$ avec s endomorphisme symétrique défini positif et s isométrie de R^3.

r est en fait une rotation car det (f) = det (r) det (s) > 0 (hypothèse faite sur s) implique det (r) > 0 donc égal à 1, car det (s) $= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$.

<u>Conclusion:</u> f = ros r rotation de R^3, s endomorphisme symétrique défini positif.

5) On définit $\vec{u'_1}, \vec{u'_2}, \vec{u'_3}$ par $f(\vec{u_i}) = \lambda_i \vec{u'_i}$

a) D'après 2a), on sait que $(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), f(\vec{u_3}))$ est une base orthogonale de R^3, donc $B' = (\vec{u'_1}, \vec{u'_2}, \vec{u'_3})$ est aussi une base orthogonale.

Il reste à montrer que $\left\|\vec{u'_i}\right\| = 1$. Or en effet $\left\|\vec{u'_i}\right\|^2 = \dfrac{1}{\mu_i}\left\|f(\vec{u_i})\right\|^2$ et on a:

$\left\|f(\vec{u_i})\right\|^2 = {}^t(FU_i)\,FU_i = U_i\,{}^tFF\,U_i = {}^tU_i \left(\sum_{j=1}^{3} \mu_j U_j {}^tU_j\right) U_i = {}^tU_i \sum_{j=1}^{3} \mu_j U_j ({}^tU_j U_i) = {}^tU_i \mu_i U_i = \mu_i$ car ${}^tU_i U_i = 1$.

d'où $\left\|\vec{u'_i}\right\|^2 = 1$ et **<u>Conclusion:</u> $(\vec{u'_1}, \vec{u'_2}, \vec{u'_3})$ est une base orthonormée de R^3.**

b) Q matrice de passage de Bc à B, Q' matrice de passage de Bc à B'.

D'après 3b), on sait que $s(\vec{u_i}) = \lambda_i \vec{u_i}$ et par suite $s^{-1}(\vec{u_i}) = \dfrac{1}{\lambda_i}\vec{u_i}$

$$r(\vec{u_i}) = fos^{-1}(\vec{u_i}) = \frac{1}{\lambda_i} f(\vec{u_i}) = \vec{u'_i}$$

Dès lors, soit Q'' la matrice de passage de la base B à la base B'. On a Q' = QQ''.

Or cette matrice Q'' peut aussi s'interpréter comme la matrice de r, relativement à la base B, puisque $\vec{u'_i} = r(\vec{u_i})$

Mais alors, $Q'' = Q^{-1} RQ$ et on a donc $Q' = QQ^{-1} RQ$ soit $Q' = RQ$ et finalement:

<u>Conclusion:</u> $R = Q'Q^{-1} = Q'\,{}^tQ$ car Q est orthogonale.

6) Soit M appartenant à la sphère de centre O et de rayon ρ. On peut écrire:

$\vec{OM} = \alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \alpha_3 \vec{u_3}$ avec $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \rho^2$

s ($\vec{OM}$) = $\alpha_1\lambda_1 \vec{u_1} + \alpha_2\lambda_2 \vec{u_2} + \alpha_3\lambda_3 \vec{u_3}$ et f ($\vec{OM}$) = ros ($\vec{OM}$) = $\alpha_1\lambda_1 \vec{u'_1} + \alpha_2\lambda_2 \vec{u'_2} + \alpha_3\lambda_3 \vec{u'_3}$

soit f ($\vec{OM}$) = $\alpha'_1 \vec{u'_1} + \alpha'_2 \vec{u'_2} + \alpha'_3 \vec{u'_3}$ avec $\frac{\alpha'^2_1}{\lambda_1^2} + \frac{\alpha'^2_2}{\lambda_2^2} + \frac{\alpha'^2_3}{\lambda_3^2} = \rho^2$

<u>**Conclusion:**</u> **L'image de la sphère est donc l'ellipsoïde d'équation** $\frac{X^2}{(\lambda_1\rho)^2} + \frac{Y^2}{(\lambda_2\rho)^2} + \frac{Z^2}{(\lambda_3\rho)^2} = 1$ **dans le repère (O, B'), dont les axes sont donc des axes principaux de l'ellipsoïde.**

Fin...

****