Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Corrigé de l'épreuve

Banque PT: MATHS II-B.

I. Préliminaires

1°) Par définition $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$ d'après les propriétés de bilinéarité et de symétrie d'un produit scalaire. Cette égalité peut s'écrire :

$$\forall (x,y)\in E^2\ ,\quad 2\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 .$$

2°) a) Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\|\lambda x+y\|^2 = \langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle = \lambda^2\langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ est une fonction polynome du deuxième degré en λ qui garde un signe constant positif, quand λ parcourt R.. Le discriminant réduit $\Delta' = \langle x,y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2$ est donc négatif ou nul d' où :

$$\forall (x,y)\in E^2\ ,\quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\| .$$

---

b) Cas d' égalité

Supposons que $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$, alors $\Delta' = 0$ et l' équation du deuxième degré en λ admet donc une racine double λ_0 et ainsi $\|\lambda_0 x+y\|^2 = 0$, ce qui n' est possible qu' à condition que $\lambda_0 x + y = 0_E$, autrement dit que $\{x,y\}$ est une famille liée.

---

c) L' application définie sur $\left[C^0([0,a],R)\right]^2$ par $(f,g)\to \int_0^a f(t)\,g(t)\,dt$ est un produit scalaire :

Symétrie d' après la commutativité du produit des fonctions.

Bilinéarité d' après la distributivité de la multiplication par rapport à l' addition dans $C^0([0,a],R)$ et la linéarité de l' intégrale.

La forme quadratique associée est définie positive.

Positivité $\int_0^a (f(t))^2\,dt \ge 0$ car $a>0$ et $(f(t))^2 \ge 0$ sur $[0,a]$.

Caractère défini: Supposons $\int_0^a (f(t))^2\,dt = 0$. Comme f^2 est une fonction continue et positive sur $[0,a]$, si elle n' était pas identiquement nulle sur $[0,a]$, son intégrale serait strictement positive. Comme son intégrale est nulle c' est qu' elle est identiquement nulle sur $[0,a]$. cqfd.

Dès lors, l' inégalité de Cauchy-Schwarz vue précédemment s' écrit :

$$\left|\int_0^a f(t)\,g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\left(\int_0^a f^2(t)\,dt\right)\left(\int_0^a g^2(t)\,dt\right)} .$$

3°) Soit E espace vectoriel sur R.

Soit N une application de E dans R^+ vérifiant $\forall x \in E$, $N(x) = N(-x)$.

On pose $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y)\right)$ et on suppose que φ est un produit scalaire sur E.

Vérifions $N(0_E) = 0$. En effet, $\forall x \in E$, $\varphi(x,-x) = \frac{1}{2}\left(N^2(0_E) - 2N^2(x)\right)$ soit sous une autre forme : $\forall x \in E$, $N^2(0_E) = -2\varphi(x,x) + 2N^2(x)$ de sorte qu' en faisant $x = 0_E$ dans cette égalité, on obtient, puisque $\varphi(0_E, 0_E) = 0$: $N^2(0_E) = 2N^2(0_E)$ et donc $N(0_E) = 0$.

La norme euclidienne associée à φ est définie par $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Or on a d' après le calcul précédent $\forall x \in E$, $N^2(0_E) = -2\varphi(x,x) + 2N^2(x) = 0$ soit $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = N^2(x)$ et donc finalement $\forall x \in E$, $\sqrt{\varphi(x,x)} = N(x)$. cqfd.

II. Equivalence de normes

1°) Rappelons qu' une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Par suite :

$\exists x_0 \in [0,1];\ \underset{x\in[0,1]}{Inf}\ p(x) = p(x_0) = p_0 > 0$. $\exists x_1 \in [0,1];\ \underset{x\in[0,1]}{Sup}\ p(x) = p(x_1) = p_1 > 0$.

On en déduit : $\forall x \in [0,1],\ 0 < p_0 \le p(x) \le p_1$

De même pour la fonction q, $\exists x_1^{'} \in [0,1];\ \underset{x\in[0,1]}{Sup}\ q(x) = q(x_1^{'}) = q_1 \ge 0$ et on a :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \le q(x) \le q_1 .$$

2°) $H = \{u \in C^1([0,1], R);\ u(0) = u(1) = 0\}$. On pose pour $(u,v) \in H^2$:

$\langle u, v\rangle = \int_0^1 \left(u(t)\,v(t) + u'(t)\,v'(t)\right)dt$; $b(u,v) = \int_0^1 \left(q(t)\,u(t)\,v(t) + p(t)\,u'(t)\,v'(t)\right)dt$ et

$L(v) = \int_0^1 f(t)\,v(t)\,dt$.

a) H est évidemment un espace vectoriel, c' est un sous espace de $C^1([0,1], R)$.

$L(v) \in R$ et le caractère linéaire de L est assuré par la distributivité de la multiplication par rapport à l' addition dans $C^0([0,1], R)$ et la linéarité de l' intégrale.

---

b) $(u,v) \to \langle u, v\rangle$ est un produit scalaire sur H. Je ne redétaille pas tout, les arguments donnés dans I2c), s' appliquent entièrement de la même façon.

---

c) Pour $(u,v) \to b(u,v)$, les premiers arguments pour le caractère bilinéaire symétrique et le caractère positif de la forme quadratique associée sont les mêmes, il faut par contre revoir le caractère défini.

Supposons donc $\int_0^1 \left(q(t)\,u^2(t) + p(t)\,u'^2(t)\right)dt = 0$ alors on a en particulier que $p(t)\,u'^2(t)$

est identiquement nul sur $[0,1]$ et comme $p(t)>0$ sur $[0,1]$, on en déduit que $u'(t)=0$ sur $[0,1]$, de sorte que $u(t)=u(0)=0$ sur $[0,1]$, autrement dit $u=0$ fonction nulle. cqfd.

3°) a) Il s' agit de prouver que $\forall v \in H$, $\left|\int_0^1 f(t)\,v(t)\,dt\right| \le \gamma\sqrt{\int_0^1 \left(v^2(t)+v'^2(t)\right)dt}$. Or on a :

$$\forall v \in H\ ,\quad \left|\int_0^1 f(t)\,v(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}\ \sqrt{\int_0^1 v^2(t)\,dt}\ .$$

Posons alors $\gamma=\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$ on a à fortiori :

$$\forall v \in H\ ,\quad \left|\int_0^1 f(t)\,v(t)\,dt\right| \le \gamma\sqrt{\int_0^1 \left(v^2(t)+v'^2(t)\right)dt} \text{ soit } \forall v \in H\ ,\ |L(v)| \le \gamma\,\|v\|.$$

---

b) Il s' agit de prouver cette fois que : $\forall (u,v) \in H^2$,

$$\left|\int_0^1 \left(q(t)\,u(t)\,v(t)+p(t)\,u'(t)\,v'(t)\right)dt\right| \le \delta\sqrt{\int_0^1 \left(u^2(t)+u'^2(t)\right)dt}\sqrt{\int_0^1 \left(v^2(t)+v'^2(t)\right)dt}$$

Or on sait que :

$$|b(u,v)| \le \sqrt{b(u,u)}\ \sqrt{b(v,v)} = \sqrt{\int_0^1 \left(q(t)\,u^2(t)+p(t)\,u'^2(t)\ \right)dt}\ \sqrt{\int_0^1 \left(q(t)\,v^2(t)+p(t)\,v'^2(t)\ \right)dt}$$

Soit : $|b(u,v)| \le \sqrt{\sup(p_1,q_1)}\ \|u\|\ \sqrt{\sup(p_1,q_1)}\ \|v\|$ et finalement :

$$|b(u,v)| \le \delta\ \|u\|\ \|v\| \text{ avec } \delta=\sup(p_1,q_1)>0\ .$$

4°) a) Montrons que : $\forall v \in H$ on a $\forall x \in [0,1]\quad v^2(x) \le x\int_0^1 v'^2(t)\,dt$.

Cela revient à prouver que $|v(x)| \le \sqrt{x}\ \sqrt{\int_0^1 v'^2(t)\,dt}$.

Or $|v(x)| = \left|\int_0^x v'(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_0^x dt}\ \sqrt{\int_0^x v'^2(t)\,dt}$ d' après I2c) d' où

$|v(x)| \le \sqrt{x}\ \sqrt{\int_0^x v'^2(t)\,dt}$ et à fortiori $|v(x)| \le \sqrt{x}\ \sqrt{\int_0^1 v'^2(t)\,dt}$ cqfd.

---

b) On a :

$$\|v\|^2 = \int_0^1 \left(v^2(t)+v'^2(t)\right)dt \le \int_0^1 \left(t\int_0^1 v'^2(u)\,du\ \right)dt + \int_0^1 v'^2(t)\,dt \le \left[\int_0^1 t\,dt+1\right]\int_0^1 v'^2(t)\,dt\ .$$

soit $\|v\|^2 \le \dfrac{3}{2}\int_0^1 v'^2(t)\,dt$ et par suite : $p_0\|v\|^2 \le \dfrac{3}{2}\int_0^1 p_0 v'^2(t)\,dt \le \dfrac{3}{2}\int_0^1 p(t)\,v'^2(t)\,dt$

et à fortiori : $p_0\|v\|^2 \le \dfrac{3}{2}\int_0^1 \left(q(t)\,v^2(t)+p(t)\,v'^2(t)\right)dt = \dfrac{3}{2}b(v,v)$.

Conclusion : $\forall v \in H\ ,\quad p_0\|v\|^2 \le \dfrac{3}{2}b(v,v)$.

5°) Soient u_1 et u_2 des fonctions de H vérifiant $\forall v \in H$, $b(u_1,v) = L(v) = b(u_2,v)$.

On a alors $\forall v \in H$, $b(u_1,v) - b(u_2,v) = b(u_1 - u_2, v) = 0$ et en particulier pour $v = u_1 - u_2$ on aura $b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ ce qui assure que $u_1 - u_2 = 0$ puisque b est un produit scalaire.

Rq: *Seule l'égalité* $\forall v \in H$, $b(u_1,v) = b(u_2,v)$ *est importante pour conclure. Il n'y a pas besoin que ces quantités soient égales à* $L(v)$ *. Je crois qu'il y a ici un début de mélange avec l'existence d'un* $u \in H$; $\forall v \in H$, $b(u,v) = L(v)$ *qui est le résultat que dans un espace préhilbertien réel, toute forme linéaire est associée au produit scalaire avec un vecteur.*

6°) a) Soit $G = \{u \in C^0([0,1], R)\,;\ u(0) = u(1) = 0\,,\ u \quad C^1 \text{ par morceaux sur } [0,1]\}$

Définition :

On dit qu' une fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$ s' il existe une subdivision de $[0,1]$, $x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n = 1$ telle que la restriction f_i de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ peut se prolonger en une fonction $\tilde{f}_i$ de classe C^1 sur $[x_i, x_{i+1}]$

Notons qu' une fonction appartenant à G , possède de plus la propriété d' être continue sur $[0,1]$.

On peut alors définir :

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(u(t)\, v(t) + u'(t)\, v'(t)\big)\,dt \quad \text{et de même :}$$

$$b(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(q(t)\, u(t)\, v(t) + p(t)\, u'(t)\, v'(t)\big)\,dt$$

---

b) $b(v,v) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(q(t)\, v^2(t) + p(t)\, v'^2(t)\big)\,dt = 0$ nécessite en particulier que $v'(t) = 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ (cf chaque intégrale de la somme doit être nulle) donc v doit être constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. Mais alors, la continuité de v sur $[0,1]$ fait que $v = v(0) = 0$ sur $[x_0, x_1]$, puis vaut encore 0 sur $[x_1, x_2]$ et de proche en proche $v = 0$ sur $[0,1]$

III. Equation de Sturm-Liouville

Soit la recherche des solutions de classe C^2 sur $[0,1]$ de :

$$\forall x \in [0,1], \quad -\frac{d}{dx}\big(p(x)\, u'(x)\big) + q(x)\, u(x) = f(x) \qquad (1) \qquad \text{avec de plus } u(0) = u(1) = 0 \qquad (2)$$

1°) On se place dans le cas $p(x) = e^{-\alpha x}$ $\alpha \neq 0$ réel, $q(x) = 0$ et $f(x) = -2n_0\pi \cos(2n_0\pi\, x)$.

$n_0 \in N^*$.

On a alors l' équation $-\dfrac{d}{dx}\big(e^{-\alpha x}\, u'(x)\big) = -2n_0\pi \cos(2n_0\pi\, x)$ qui fournit dans un premier temps :

$e^{-\alpha x}\, u'(x) = \sin(2n_0\pi\, x) + \lambda$ soit $u'(x) = [\sin(2n_0\pi\, x) + \lambda]e^{\alpha x}$ d' où une expression de u est de la forme : $\dfrac{\lambda}{\alpha}e^{\alpha x}+\left(a\sin(2n_0\pi\, x)+b\cos(2n_0\pi\, x)\right)e^{\alpha x}+\mu$ et on doit avoir :

$\begin{cases}2n_0\pi\, a+\alpha\, b=0\\ \alpha\, a-2n_0\pi\, b=1\end{cases}$ on obtient : $a=\dfrac{\alpha}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}$ $\quad b=-\dfrac{2n_0\pi}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}$.

Il reste à déterminer les deux constantes au moyen des conditions $u(0)=u(1)=0$ qui donnent :

$u(0)=\dfrac{\lambda}{\alpha}-\dfrac{2n_0\pi}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}+\mu=0$ $\qquad u(1)=\dfrac{\lambda}{\alpha}e^{\alpha}-\dfrac{2n_0\pi}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}e^{\alpha}+\mu=0$ soit :

$\lambda=\dfrac{2n_0\pi\alpha}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}$ $\qquad \mu=0$. Conclusion, la solution cherchée est :

$u(x)=\dfrac{e^{\alpha x}}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}\left[2n_0\pi\left(1-\cos(2n_0\pi\, x)\right)+\alpha\sin(2n_0\pi\, x)\right]$ ou encore sous une autre forme

$$u(x)=\frac{2e^{\alpha x}\sin(n_0\pi\, x)}{4n_0^2\pi^2+\alpha^2}\left[2n_0\pi\sin(n_0\pi\, x)+\alpha\cos(n_0\pi\, x)\right].$$

2°) Soit u une solution du problème (1), (2), montrons que $\forall v\in H$, $b(u,v)=L(v)$.

$b(u,v)=\int_0^1\left(q(t)\,u(t)\,v(t)+p(t)\,u'(t)\,v'(t)\right)dt$. Faisons une intégration par parties pour

$A=\int_0^1 p(t)\,u'(t)\,v'(t)\,dt$. On pose : $\begin{cases}w(t)=p(t)\,u'(t) & w'(t)=\dfrac{d}{dt}\left(p(t)\,u'(t)\right)dt\\ s'(t)=v'(t) & s(t)=v(t)\end{cases}$

$A=\left[p(t)\,u'(t)\,v(t)\right]_0^1+\int_0^1-\dfrac{d}{dt}\left(p(t)\,u'(t)\right)v(t)\,dt=0+\int_0^1\left(f(t)-q(t)\,u(t)\right)v(t)\,dt$ de sorte que

$$\forall v\in H\ ,\quad b(u,v)=\int_0^1 f(t)\,v(t)\,dt=L(v).$$

D' après II5, on sait qu' il y a au plus une fonction $u\in H$ vérifiant $\forall v\in H$, $b(u,v)=L(v)$. On prouve ici qu' il y en bien une, c' est la solution dans H du problème (1), (2).

3°) On pose pour tout élément $v\in H$, $J(v)=\dfrac{1}{2}b(v,v)-L(v)$ et soit u l' unique solution dans H de $\forall v\in H$, $b(u,v)=L(v)$.

a) Pour $w\in H$ calculons

$J(u+w)=\dfrac{1}{2}b(u+w,u+w)-L(u+w)=\dfrac{1}{2}\left[b(u,u+w)+b(w,u+w)\right]-L(u+w)$ soit

$J(u+w)=\dfrac{1}{2}b(u,u)-L(u)+b(u,w)+\dfrac{1}{2}b(w,w)-L(w)=J(u)+J(w)+L(w)$.

D' où pour $w=v-u$, $J(u)=J(v)-\left[J(v-u)+L(v-u)\right]=J(v)-\dfrac{1}{2}b(v-u,v-u)$ ce qui prouve bien que $\qquad \forall v\in H\ ,\quad J(u)\le J(v)$.

---

b) Réciproquement, soit $u_0\in H$; $\forall v\in H$, $J(u_0)\le J(v)$.

$J(u_0+\lambda w)=\frac{1}{2}b(u_0+\lambda w,u_0+\lambda w)-L(u_0+\lambda w)$ soit

$J(u_0+\lambda w)=\frac{1}{2}\left[\lambda^2 b(w,w)+2\lambda b(u_0,w)+b(u_0,u_0)\right]-L(u_0)-\lambda L(w)$

$J(u_0+\lambda w)=\frac{1}{2}\lambda^2 b(w,w)+\lambda\big(b(u_0,w)-L(w)\big)+\frac{1}{2}b(u_0,u_0)-L(u_0)$ d' où :

$J(u_0+\lambda w)-J(u_0)=\frac{1}{2}\lambda^2 b(w,w)+\lambda\big(b(u_0,w)-L(w)\big)$ ce qui prouve que le polynome du deuxième degré $\frac{1}{2}\lambda^2 b(w,w)+\lambda\big(b(u_0,w)-L(w)\big)$ garde un signe constant positif quand $\lambda\in R$.

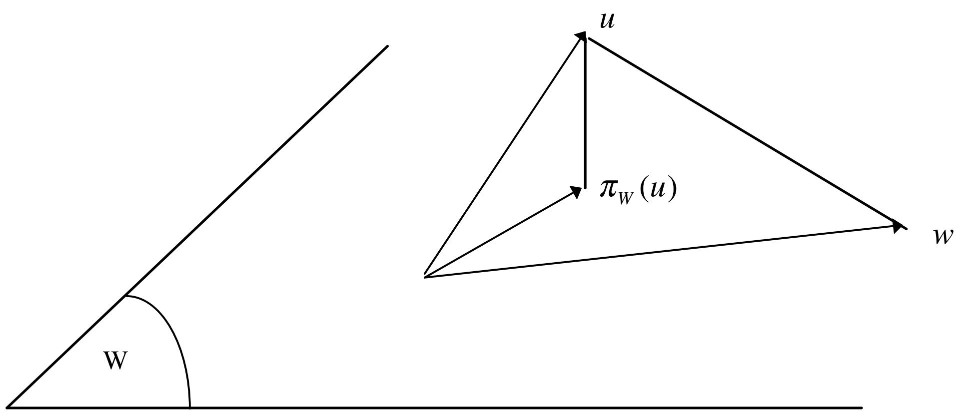
On en déduit que $\Delta=\big(b(u_0,w)-L(w)\big)^2\le 0$ donc en fait cette quantité est nulle et donc :

$$\forall w\in H\ ,\quad b(u_0,w)=L(w).$$

On retiendra que u, unique solution de $\forall v\in H\ ,\quad b(u,v)=L(v)$ dans H est l' unique fonction de H réalisant le minimum de J sur H.

4°) Soit W un sous espace de G de dimension finie d et de base $(\varphi_i)_{1\le i\le d}$. Soit π_W la projection orthogonale sur W pour le produit scalaire b.

a)



La formule demandée est la propriété classique de la projection orthogonale sur un sous espace. $u=\pi_W(u)+v$ avec $v=u-\pi_W(u)$ qui est orthogonal à W de sorte que, pour $w\in W$ on a :

$b(w-u,w-u)=b(w-\pi_W(u)-v,w-\pi_W(u)-v)=b(w-\pi_W(u),w-\pi_W(u))+b(v,v)$ et donc $b(w-u,w-u)=b(w-\pi_W(u),w-\pi_W(u))+b(\pi_W(u)-u,\pi_W(u)-u)$ ce qui fait que

$$\forall w\in W\ ,\quad b(\pi_W(u)-u,\pi_W(u)-u)\le b(w-u,w-u).$$

---

b) • Soit $u_W=\pi_W(u)$, montrons que $\forall v\in W\ ,\quad b(u_W,v)=L(v)$.

En effet, soit $v\in W$, $\quad b(u_W,v)=b(u+u_W-u,v)=b(u,v)+0=L(v)$. cqfd.

• Réciproquement, soit $u_0\in W\ ;\quad \forall v\in W\ ,\quad b(u_0,v)=L(v)=b(u,v)$. Montrons que $u_0=u_W$.

Pour cela soit $(\psi_i)_{1\le i\le d}$ une base <u>orthonormée</u> de W. Dans une telle base,

$$u_W = \sum_{i=1}^{d} b(u,\psi_i)\,\psi_i = \sum_{i=1}^{d} L(\psi_i)\,\psi_i \text{ et } u_0 = \sum_{i=1}^{d} b(u_0,\psi_i)\,\psi_i = \sum_{i=1}^{d} L(\psi_i)\,\psi_i \text{ et donc :}$$

$$u_0 = u_W \text{. cqfd.}$$

---

c) Soit $(\alpha_1,...,\alpha_d)$ les composantes de u_W dans la base $(\varphi_i)_{1\le i\le d}$.

$u_W = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \varphi_j$. Or $\forall i \in \{1,...,d\}$, $b(u_W,\varphi_i) = L(\varphi_i)$ et donc les α_j sont solutions du système $\sum_{j=1}^{d} b(\varphi_i,\varphi_j)\,\alpha_j = L(\varphi_i) \quad i = 1,...,d$.

On peut donner deux arguments pour assurer que ce système est de Cramer:

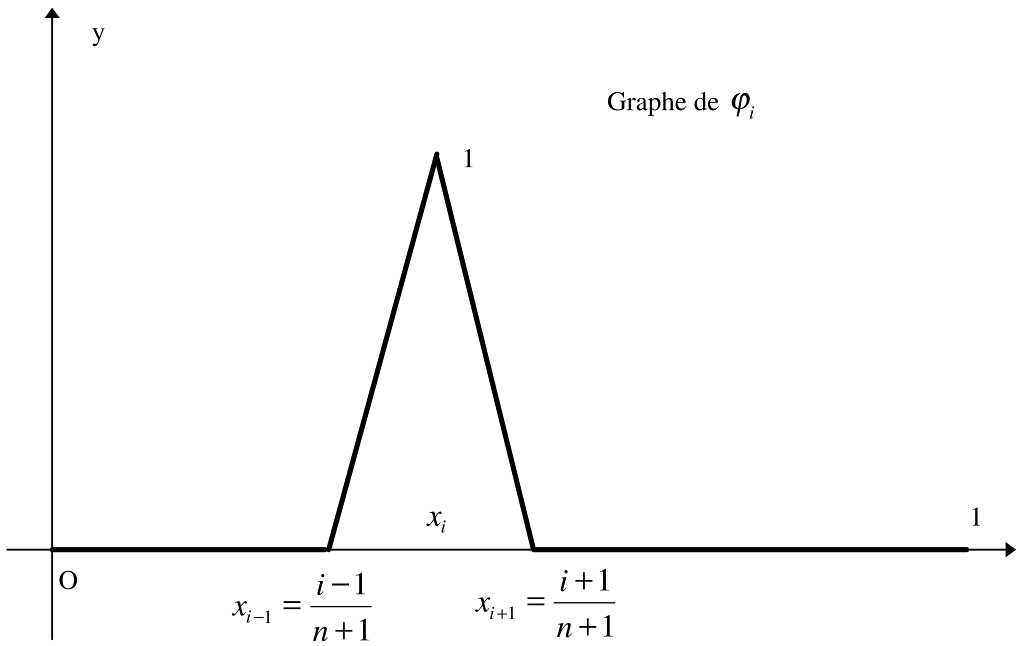
* C' est un système de d équations à d inconnues dont on sait qu' il admet une solution unique.

* Le déterminant de ce système est le déterminant de la forme quadradique, restriction de b à W relativement à la base $(\varphi_i)_{1\le i\le d}$. Ce déterminant est non nul et donc le système est de Cramer.

IV.Approximation de la solution u

Notons que les fonctions φ_i sont assez mal définies quant à leur domaine de définition. Nous les considérerons comme étant définies sur $[0,1]$; (mais le "pour tout entier naturel i , $x_i = ih$ " peut troubler un peu!)

1°) a) Prenons donc comme définition de φ_i, $\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x_i|}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$. Le graphe est immédiat.



Les fonctions φ_i sont bien continues sur $[0,1]$, de classe C^1 par morceaux sur $[0,1]$ et vérifient $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$ donc ce sont des éléments de G.

---

b) Soit $W_n = Vect(\varphi_1,...\varphi_n)$

On a de manière évidente $\varphi_i(x_j)=\delta_{i,j}$ de sorte que si on pose $\varphi=\sum_{i=1}^{n} t_i\varphi_i$, on a :

$\varphi(x_j)=t_j$. On retient $\forall i\in\{1,...,n\},\ \varphi(x_i)=t_i$.

La famille $(\varphi_i)_{1\le i\le n}$ est par définition une famille génératrice de W_n.

Montrons que c' est une famille libre.

Pour cela, soit la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} t_i\varphi_i = 0$, fonction identiquement nulle sur $[0,1]$,

alors $\forall x\in[0,1],\ \sum_{i=1}^{n} t_i\varphi_i(x)=0$ et donc en particulier pour $x=x_i$ ce qui fournit $t_i=0$.

cqfd.

---

c) Si $|j-i|\ge 2$ $\varphi_i\,\varphi_j = 0$ en tout point de $[0,1]$. Il en est de même pour $\varphi_i^{'}\,\varphi_j^{'}=0$ et par conséquent $b(\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^1 0\,dt=0$

2°) a) Il reste à calculer les quantités $b(\varphi_i,\varphi_i)$ et $b(\varphi_{i+1},\varphi_i)$ puisque $b(\varphi_i,\varphi_j)=0$ pour $|j-i|\ge 2$

- $b(\varphi_i,\varphi_i)=\int_{\frac{i-1}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} \dfrac{e^{-\alpha x}}{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}dx = \dfrac{(n+1)^2}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha(i-1)}{n+1}} - e^{-\frac{\alpha(i+1)}{n+1}}\right)$ soit :

$$b(\varphi_i,\varphi_i)=\frac{2(n+1)^2}{\alpha}e^{-\frac{\alpha i}{n+1}}sh(\frac{\alpha}{n+1}) \ .$$

- $b(\varphi_i,\varphi_{i+1})=\int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} -\dfrac{e^{-\alpha x}}{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}dx = \dfrac{(n+1)^2}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha(i+1)}{n+1}} - e^{-\frac{\alpha i)}{n+1}}\right)$ soit :

$$b(\varphi_i,\varphi_{i+1})=-\frac{2(n+1)^2}{\alpha}e^{-\frac{\alpha(i+\frac{1}{2})}{n+1}}sh\frac{\alpha}{2(n+1)} \ .$$

---

b) Pour $n=2$ on a :

$$\begin{vmatrix} b(\varphi_1,\varphi_1) & b(\varphi_1,\varphi_2) \\ b(\varphi_1,\varphi_2) & b(\varphi_2,\varphi_2) \end{vmatrix} = \frac{18^2}{\alpha^2}\begin{vmatrix} e^{-\frac{\alpha}{3}} sh\frac{\alpha}{3} & -e^{-\frac{\alpha}{2}} sh\frac{\alpha}{6} \\ -e^{-\frac{\alpha}{2}} sh\frac{\alpha}{6} & e^{-\frac{2\alpha}{3}} sh\frac{\alpha}{3} \end{vmatrix} = \frac{18^2}{\alpha^2} e^{-\alpha}\left(sh^2\frac{\alpha}{3} - sh^2\frac{\alpha}{6}\right) \text{ soit}$$

encore : $$\frac{18^2}{\alpha^2} e^{-\alpha} sh^2\frac{\alpha}{6}\left(4ch^2\frac{\alpha}{6} - 1\right) > 0.$$

3°) Soit $w_n = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\,\varphi_i$.

a) $\left(\int_y^t u''(z)\,dz\right) = u'(t) - u'(y)$ puis $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u'(t) - u'(y)\big)dy = u'(t)(x_i - x_{i-1}) - u(x_i) + u(x_{i-1})$.

Et enfin $\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x} \big[h\,u'(t) - \big(u(x_i) - u(x_{i-1})\big)\big]dt = u(x) - u(x_{i-1}) + \frac{1}{h}(x_{i-1} - x)\big(u(x_i) - u(x_{i-1})\big)$

soit encore $I = u(x) + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{h}x - u(x_{i-1}) - \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - (x_i - h)\,u(x_i)}{h}$ que

l' on peut encore écrire sous la forme :

$$I = u(x) + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{h}x - u(x_{i-1}) - u(x_i) - \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - x_i u(x_i)}{h}$$

Or pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $w_n(x) = u(x_{i-1})\,\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\,\varphi_i(x)$, c' est à dire :

$w_n(x) = u(x_{i-1})\left[1 - \frac{x - x_{i-1}}{h}\right] + u(x_i)\left[1 - \frac{x_i - x}{h}\right]$ soit :

$w_n(x) = u(x_{i-1}) + u(x_i) - \frac{x}{h}\big(u(x_{i-1}) - u(x_i)\big) + \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - x_i u(x_i)}{h}$ de sorte que

$u(x) - w_n(x) = u(x) + \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{h}x - u(x_{i-1}) - u(x_i) - \frac{x_{i-1}u(x_{i-1}) - x_i u(x_i)}{h} = I$. cqfd.

---

b) On a : $|u(x) - w_n(x)| \le \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}|u''(z)|\,dz\right)dy\right)dt$. On utilise I2c

$|u(x) - w_n(x)| \le \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}dz}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''^2(z)\,dz}\;dy\right)dt$ soit

$|u(x) - w_n(x)| \le \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sqrt{h}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''^2(z)\,dz}\;dy\right)dt = \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''^2(z)\,dz}\;h^2$ soit enfin :

$$|u(x) - w_n(x)| \le h^{\frac{3}{2}}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''^2(z)\,dz} \quad .$$

---

c) $u'(x) - w_n'(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_y^x u''(z)\,dz\right)dy$ et on a donc :

$|u'(x) - w_n'(x)| \le \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}|u''(z)|\,dz\right)dy \le \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}dz}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''^2(z)\,dz}\right)dy$ soit

$$\left|u'(x)-w_n'(x)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,dz}\; h \text{ soit enfin : } \left|u'(x)-w_n'(x)\right| \leq h^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,dz}\;.$$

4°) On a : $\|u-w_n\|^2 = \int_0^1 \left((u-w_n)^2(t)+(u'-w_n')^2(t)\right)dt = \sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left((u-w_n)^2(t)+(u'-w_n')^2(t)\right)dt$

$\|u-w_n\|^2 \leq (h^3+h)\sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,dz\right)dt = (h^4+h^2)\sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,dz$ soit finalement

$\|u-w_n\|^2 \leq (h^4+h^2)\int_0^1 u''^2(z)\,dz$ et donc $\|u-w_n\| \leq h\sqrt{1+h^2}\left(\int_0^1 u''^2(z)\,dz\right)^{\frac{1}{2}}$.

Or $\sqrt{1+h^2} \leq \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ car pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. Dès lors, on a :

$$\|u-w_n\| \leq h\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\int_0^1 u''^2(z)\,dz\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Conclusion : w_n converge vers u dans le préhilbertien $H, \langle\,,\rangle$.

____ **FIN** __________