Corrigé épreuve II.B, banque PT 2003

1 Décomposition en série de Fourier

1. Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels a_1, a_2,...,a_n tels que :

   - $a_1 < a_2 < ... < a_n$;
   - $f_{|]-\infty,a_1[} = \varphi_0$, $f_{|]a_n,+\infty[} = \varphi_n$ et $\forall 1 \leq i \leq n-1$, $f_{|]a_i,a_{i+1}[} = \varphi_i$;

   où $\varphi_0 :]-\infty, a_0] \to \mathbb{R}$, $\varphi_n : [a_n, +\infty[\to \mathbb{R}$ et pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\varphi_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

   Toute fonction de E étant 1-péridique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Dirichlet assure qu'elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

2. Soit $f \in E$.

   Commençons par supposer que f s'écrive f_1+f_2 avec $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$. Alors pour tout réel x, nous avons $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$: il en résulte que $f_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et que $f_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ceci prouve l'unicité de la décomposition.

   Et, en définissant f_1 et f_2 comme ci-dessus, il est immédiat que ces fonctions ont la même régularité et périodicité que f, donc appartiennent à E, et que f_1 est paire, f_2 impaire. Finalement, $f_1 \in E_1$, $f_2 \in E_2$ et $f = f_1 + f_2$: l'existence de la décomposition est démontrée.

   Il en résulte que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Calculons : $a_n(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\lambda f(t) + \mu g(t)) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t$
   $= 2\lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t + 2\mu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g)$.
   Par suite, a_n est linéaire.
   On montre de même que a_0 est linéaire, ainsi que b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Calculons : $c_n(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2i\pi nt}\ \mathrm{d}t$
   $= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(\cos(2\pi nt) - i\sin(2\pi nt))\ \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t - i\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi nt)\ \mathrm{d}t$.
   D'où $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$. De même, nous obtiendrions $c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ et $c_0(f) = a_0$.

4. (a) Soit $f \in E_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Calculons $a_n(f) = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t$.
   Comme $t \mapsto f(t)\cos(2\pi nt)$ est paire, un changement de variable $u = -t$ donne
   $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(u) \cos(2\pi nu)\ \mathrm{d}u$, d'où $a_n(f) = 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t$.
   Par contre, le même calcul montre que $a_0(f) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \cos(2\pi 0t)\ \mathrm{d}t$.

   (b) Soit $f \in E_2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un calcul similaire à 4a, utilisant le fait que cette fois, $t \mapsto f(t)\sin(2\pi nt)$ est paire, montre que $b_n(f) = 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \sin(2\pi nt)\ \mathrm{d}t$.

5. (a)

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Remarquons d'abord que f_3 est paire, donc $b_n(f_3) = 0$ (ceci résulte d'un calcul du type 4a, en utilisant que $t \mapsto f_3(t)\sin(2\pi nt)$ est impaire). Pour $a_n(f_3)$, calculons :

$$\begin{aligned}
a_n(f_3) &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} f_3(t) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2) \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t \\
&= 4\left[\tfrac{1-t^2}{2\pi n} \sin(2\pi nt)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \tfrac{8}{2\pi n} \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin(2\pi nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \tfrac{2}{\pi n}\left(\tfrac{3}{4}\sin(n\pi) - \sin(0)\right) + \tfrac{4}{\pi n}\left[-\tfrac{t}{2\pi n}\cos(2\pi nt)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{(\pi n)^2}\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi nt)\ \mathrm{d}t \\
&= -\tfrac{2}{(\pi n)^2}\left(\tfrac{1}{2}\cos(\pi n) - 0\cos(0)\right) + \tfrac{2}{(\pi n)^2}\left[\tfrac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nt)\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \tfrac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2}.
\end{aligned}$$

   Et $a_0 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2)\ \mathrm{d}t = 2[t - \frac{t^3}{3}]_0^{\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}) = \frac{11}{12}$.

(c) $f_3 \in E$ (f_3 est continue car $\lim_{t\to -\frac{1}{2}^+} f_3(t) = \frac{3}{4} = \lim_{t\to \frac{1}{2}^-} f_3(t)$), donc d'après 1, f_3 est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier.
Par ailleurs, $c_n(f_3) = c_{-n}(f_3) = \frac{a_n(f_3)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f_3)e^{2i\pi nt} = a_0(f_3) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f_3)\cos(2\pi nt)$, $\forall t \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}^*$.
D'où, en $\frac{1}{2}$, l'égalité de f_3 et de la somme de sa série de Fourier écrite à l'aide des $a_n(f_3)$ donne :

$$\frac{3}{4} = f_3(\frac{1}{2}) = a_0(f_3) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_3)\cos(2\pi n\frac{1}{2}),$$

soit

$$\frac{3}{4} - \frac{11}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2\pi^2},$$

d'où finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part, f_3 étant 1-périodique et localement intégrable, le théorème de Bessel-Parseval s'applique et donne :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t))^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n(f_3))^2 = (a_0(f_3))^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f_3))^2.$$

Or $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t))^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-2t^2+t^4) \,\mathrm{d}t$
$= [t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\times 3} + \frac{1}{32\times 5}) = \frac{16\times 3\times 5 - 40 + 3}{16\times 3\times 5} = \frac{207}{240}$, d'où

$$\frac{121}{144} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4\pi^4} = \frac{207}{240},$$

soit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{2}(\frac{207}{240} - \frac{121}{144}) = \frac{\pi^4}{2} \times \frac{207\times 3 - 121\times 5}{720} = \frac{16\pi^4}{2\times 720} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2 Approximation d'une fonction continue

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par remarquer que g et g_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
De plus, $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $g'(t) = -2\pi\sin(2\pi t)$ et ${g_n}'(t) = -2\pi n D_n \sin(2\pi t)(1+\cos(2\pi t))^{n-1}$.
D'où les tableaux de variations suivants :

t	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
$g'(t)$		$+$		$-$	
g	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

t	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
${g_n}'(t)$		$+$		$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$2^n D_n$	$\searrow$	0

(b) Commençons par établir la relation de récurrence.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi t))^{2n} \,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(\pi t))^{2n-1}\cos(\pi t) \,\mathrm{d}t \\ &= [\frac{\sin(\pi t)}{\pi}(\cos(\pi t))^{2n-1}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + (2n-1)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\sin(\pi t))^2(\cos(\pi t))^{2n-2} \,\mathrm{d}t \\ &= (2n-1)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-(\cos(\pi t))^2)(\cos(\pi t))^{2n-2} \,\mathrm{d}t \\ &= (2n-1)(J_{n-1} - J_n) \end{aligned}$$

D'où $J_n = \frac{2n-1}{2n} J_{n-1}$.

Comme $J_0=\int_{-\frac12}^{\frac12}\ \mathrm{d}t=1$, une récurrence immédiate montre que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad J_n=\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\cdot\times\frac{1}{2}=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}.$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$.
Comme pour tout réel t, $1+\cos(2\pi t)=2(\cos(\pi t))^2$, nous avons $(1+\cos(2\pi t))^n=2^n(\cos(\pi t))^{2n}$.
Par suite, $I_n=2^nJ_n$, soit $I_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

(d) Nous en déduisons bien que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $D_n=\frac{1}{I_n}=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{n}}=\frac{(n+1)^{n+\frac12}}{n^{n+\frac12}}\times e^{-1},$$

d'où $v_n=\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})=(n+\frac12)\ln(\frac{n+1}{n})+\ln(e^{-1})=(n+\frac12)\ln(1+\frac1n)-1$.
Par suite, en utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'origine,

$$v_n=(n+\frac12)\left(\frac1n-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{n^3}\varepsilon_1(\frac1n)\right)-1=\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_2(\frac1n)$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions telles que $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon_1(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon_2(x)=0$.
Il en résulte que $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{12n^2}$, donc pour n assez grand, $|v_n|\le 2\times\frac{1}{12n^2}$, soit $v_n=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Ceci prouve que la série $(\sum v_n)$ converge absolument : posons $A=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n\in\mathbb{R}$.

(b) Pour tout naturel k, $v_k=\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)$, d'où $\sum\limits_{k=0}^{n-1}v_k=\ln(u_n)-\ln(u_0)=\ln(u_n)$.
Par suite, $u_n=e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}v_k}$, et comme exp est continue en A, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^A$.
Posons $B=e^{-A}>0$: $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac1B$, d'où

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}Bn^ne^{-n}\sqrt{n}.$$

(c) Il résulte de ce qui précède que :

$$D_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2^n\left(Bn^ne^{-n}\sqrt{n}\right)^2}{B(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}=\frac{B\sqrt{n}}{2^n\sqrt2},$$

d'où

$$D_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{B\sqrt{n}}{2^n\sqrt2}\quad\text{et par suite}\quad\lim_{n\to+\infty}D_n=0.$$

(d)

3. (a) Soit $\varepsilon>0$. f est continue en 0, donc $\exists\eta_1>0$ tel que :

$$|x-0|<\eta_1\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

Alors $\eta=\min(\eta_1,\frac14)$ satisfait aux exigences de la question.

(b)

$$g_n(\eta)=D_n(1+\cos(2\pi\eta))^n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{B\sqrt{n}}{2^n\sqrt2}\times((1+\cos(2\pi\eta))^n=\left(\frac{1+\cos(2\pi\eta)}{2}\right)^n\times\frac{B\sqrt{n}}{\sqrt2},$$

donc $g_n(\eta)\underset{n\to+\infty}{\sim}\alpha k^n\sqrt{n}$ où $0<k<1$, et donc (comparaison des fonctions usuelles),

$$\lim_{n\to+\infty}g_n(\eta)=0.$$

(c) f n'est pas l'application nulle, donc $M = 2 \sup_{t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |f(t)| > 0$.

Par suite $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$, et $g_n(\eta) \leq 0$, donc d'après 3b, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow 0 \leq g_n(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

Or, d'après l'étude des variations de g_n, pour tout $n \geq n_1$, nous avons :

- g_n est décroissante sur $]\eta, \frac{1}{2}[$, donc $\forall t \in]\eta, \frac{1}{2}[$, $g_n(t) \leq g_n(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$;
- g_n est croissante sur $]-\frac{1}{2}, -\eta[$, donc $\forall t \in]-\frac{1}{2}, \eta[$, $g_n(t) \leq g_n(-\eta) = g_n(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$.

Finalement, nous avons montré que pour tout entier $n \geq n_1$,

$$\forall t \in]-\frac{1}{2}, -\eta[\cup]\eta, \frac{1}{2}[, \qquad 0 \leq g_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

(d) Soit $n \geq n_1$ et $t \in]-\frac{1}{2}, -\eta[\cup]\eta, \frac{1}{2}[$.

$$|f(t) - f(0)|g_n(t) \leq (|f(t)| + |f(0)|)g_n(t) \leq 2 \times \sup_{t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |f(t)| \times g_n(t) \leq 2 \times \frac{M}{2} \times \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} |K_n| &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t) - f(0))g_n(t) \text{ d}t \right| \\ &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{-\eta} (|f(t) - f(0)|)g_n(t) \text{ d}t + \int_{-\eta}^{\eta} (|f(t) - f(0)|)g_n(t) \text{ d}t + \int_{\eta}^{\frac{1}{2}} (|f(t) - f(0)|)g_n(t) \text{ d}t, \end{aligned}$$

d'où, si $n \leq n_1$,

$$|K_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\times(\frac{1}{2}-\eta)+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\eta}^{\eta} g_n(t) \text{ d}t+\frac{\varepsilon}{2}\times(\frac{1}{2}-\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}\times(\frac{1}{2}-\eta)+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(t) \text{ d}t+\frac{\varepsilon}{2}\times(\frac{1}{2}-\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}(2-2\eta) \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, nous avons démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = 0.$$

4. (a) Soit $u \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n, nous avons (avec un changement de variable $x = t - u$ dans la première intégrale) :

$$f_n(u)-f_n(0) = \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} f(t)g_n(t-u) \text{ d}t-f_n(u)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g_n(x) \text{ d}x = \int -\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} (f(x+u)-f(u))g_n(x) \text{ d}x = K_n(h),$$

où $h : x \mapsto h(x) = f(x + u)$ est une application périodique de période 1, continue et non nulle.

L'étude faite à la question 2 s'applique et montre que $\lim_{n\to+\infty} K_n(h) = 0$, soit

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n(u) - f(u)) = 0.$$

(b) Soit $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculons :

$$\begin{aligned} g_n(t) &= D_n(1 + \cos(2\pi t))^n = D_n\big(2\cos^2(\pi t)\big)^n = 2^n D_n\left(\frac{e^{i\pi t}+e^{-i\pi t}}{2}\right)^{2n} \\ &= 2^{-n}D_n\sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^k e^{il\pi t}e^{-i(2n-l)\pi t} = 2^{-n}D_n\sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i2(l-n)\pi t} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} 2^{-n}D_n C_{2n}^{n+k} e^{2i\pi kt} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{2i\pi kt}, \end{aligned}$$

où $\alpha_k = 2^{-n}D_n C_{2n}^{n+k}$ pour tout $k \in \{-n, ..., n\}$.

(c) D'après ce qui précède, pour tout réel u,

$$f(u) = \lim_{n\to+\infty} f_n(u).$$

Et f_n est pour tout entier n, une somme finie de fonctions trigonométriques. En effet :

$$\begin{aligned} f_n(u) &= \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} (f(t)g_n(t-u)) \text{ d}t = \int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} [f(t)\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{2i\pi k(t-u)}] \text{ d}t \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_{-\frac{1}{2}+u}^{\frac{1}{2}+u} \alpha_k f(t)e^{2i\pi t} \text{ d}t\right) e^{-2ik\pi u} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \beta_k e_k(u) \end{aligned}$$

3 Théorème d'échantillonnage

1. (a) Soit $h \in H$.
   Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}, |h(t)e^{-2i\pi t\tau}| \leq |h(t)|$, donc l'intégrale $\hat{h}(\tau)$ est absolument convergente, donc définie.
   De même, $\check{h}(\tau)$ est définie pour tout réel τ.

   (b) Soit $h \in H$.
   Pour $\tau \in \mathbb{R}$, nous avons :
$$\overline{\hat{h}(\tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t)e^{2i\pi t\tau}} \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-2i\pi t\tau} \, \mathrm{d}t = \check{h}(\tau),$$
   d'où $\overline{\hat{h}} = \check{h}$.
   Et par hypothèse, pour tout réel t,
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\tau)e^{-2i\pi t\tau} \, \mathrm{d}\tau = \check{\hat{h}}(t),$$
   d'où $\check{\hat{h}} = h$.

2. Pour tout réel τ, nous avons :
$$|\hat{h}(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{2i\pi t\tau} \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)e^{2i\pi t\tau}| \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = M,$$
   Et M étant une constante réelle indépendante de τ, ceci montre que $\hat{h}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   De même, $\check{h}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
   L'énoncé nous dit de supposer que les applications $\hat{h}$ et $\check{h}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$! Elles sont donc en particulier continues sur $\mathbb{R}$. (La démonstration de cette continuité peut être faite directement en appliquant le théorème de convergence dominée .)

3. Soit $f \in F$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$c_n(\tilde{g}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(t)e^{-2i\pi nt} \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(t)e^{-2i\pi nt} \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{-2i\pi nt} \, \mathrm{d}t = f(n),$$
   car $f \in F$, donc $\hat{f}(t) = 0$ si $|t| > \frac{1}{2}$.

   (b) Par hypothèse, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme $\hat{f}(t) = 0$ si $|t| > \frac{1}{2}$, nécessairement, $\hat{f}(-\frac{1}{2}) = 0 = \hat{f}(\frac{1}{2})$, et donc $\tilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\tilde{g}$ est 1-péridique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Dirichlet s'applique :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\tilde{g})e^{2i\pi nt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi nt}.$$
   Il vient que pour tout réel t,
$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\tau)e^{-2i\pi\tau t} \, \mathrm{d}\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\tau)e^{-2i\pi\tau t} \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(\tau)e^{-2i\pi\tau t} \, \mathrm{d}\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi n\tau} \right) e^{-2i\pi\tau t} \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi n\tau}e^{-2i\pi\tau t} \right\} \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

   (c) Nous admettons que l'on a le droit d'intervertir l'intégrale et la somme d'où, pour tout réel $t \notin \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{2i\pi n\tau}e^{-2i\pi\tau t} \right\} \mathrm{d}\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n)e^{2i\pi n\tau}e^{-2i\pi\tau t} \, \mathrm{d}\tau \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ f(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi(n-t)\tau} \, \mathrm{d}\tau \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ f(n) \left[\frac{e^{2i\pi(n-t)\tau}}{2i\pi(n-t)} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ f(n) [\frac{e^{i\pi(n-t)} - e^{-i\pi(n-t)}}{2i\pi(n-t)} \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin(\pi(n-t))}{\pi(n-t)} \end{aligned}$$