Banque filière PT 2004
Corrigé de l'épreuve II-B *

23 mai 2004

I. Etude de la fonction Bêta

I.1 . (a) Soit $x \in]0,\ +\infty[$. Calculons (en utilisant le développement limité usuel de $\ln(1-t)$ en 0) :

$$(1-\frac{x}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} = e^{n(-\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n})} = e^{-x}\times e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{n}\varepsilon(\frac{1}{n})} = 1$, d'où le résultat : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n = e^{-x}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $[0,n]$, la dérivée de φ_n est :

$$\varphi_n{}'(x) = f'(x) - f_n{}'(x) = -e^{-x} + (1-\frac{x}{n})^{n-1} = e^{-x}(-1+e^{(n-1)\ln(1-\frac{x}{n})+x}) = e^{-x}(e^{\psi_n(x)}-1).$$

Donc $\underline{\varphi_n{}'(x) \text{ est de même signe que } \psi_n(x)}$. Or $\psi_n{}'(x) = \frac{1-x}{n-x}$, d'où le tableau de variations :

x	0		1		α_n		n
$\psi_n{}'(x)$		$+$	0		$-$		
ψ_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Remarquons que l'étude des variations de ψ_n donne un réel $\alpha_n \in]1,n[$ tel que $\psi_n(x)=0$, soit

$$(n-1)\ln(1-\frac{\alpha_n}{n}) = \alpha_n = 0. \qquad (1)$$

Utilisant ces résultats, nous obtenons directement le tableau des variations de φ_n :

x	0		α_n		n
$\varphi_n{}'(x)$		$+$	0	$-$	
φ_n	0	$\nearrow$	$\frac{\alpha_n}{n}e^{-\alpha_n}$	$\searrow$	e^{-n}

(c) L'étude des variations montre directement l'existence et l'unicité de $\alpha_n \in]1,n[$ tel que φ_n soit maximale en α_n.

(d) De plus, d'après (1), nous avons

$$\varphi_n(\alpha_n) = e^{-\alpha_n} - e^{n\ln(1-\frac{\alpha_n}{n})} = e^{-\alpha_n} - e^{-\alpha_n}e^{\ln(1-\frac{\alpha_n}{n})} = e^{-\alpha_n}[1-(1-\frac{\alpha_n}{n})],$$

d'où

$$\varphi_n(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n}e^{-\alpha_n}. \qquad (2)$$

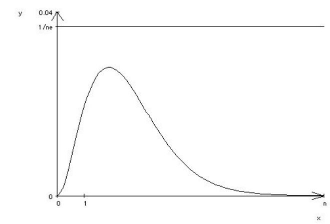
*Vous avez trouvé des erreurs (de math, de frappe, etc.) : guillaume.herve1@wanadoo.fr

(e) Posant $g : x \mapsto xe^{-x}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-x}(1-x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		1		n
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

En particulier, $\forall x \in [0,n]$, $g(x) \leq \frac{1}{e}$, d'où $\alpha_n e^{-\alpha_n} \leq \frac{1}{e}$, soit : $\boxed{\varphi_n(\alpha_n) \leq \frac{1}{ne}}$.

(f) Nous en déduisons le graphe de φ_n (ici, nous avons pris n=10, dessiné le graphe de φ_n et la droite $y = \frac{1}{ne}$) :



I.2 . Soit $u, v > 0$.

Avant de se lancer dans des calculs sur $B(u,v)$, il convient de justifier l'existence de cette intégrale généralisée, qui résulte des équivalents (de signe constant) suivants ($u, v > 0$, donc $u-1 > -1$, $1+v > 2$) :

$$\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{u-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1+v}}.$$

(a) Effectuons le changement de variable [1] (non évident à deviner!) : $x = \frac{t}{1+t}$, soit

$$\begin{array}{ll} t = \frac{x}{1-x}; & \text{" } dt = \frac{1}{(1-x)^2}\ dx\text{"}; \\ t \to 0 \text{ donne } x \to 0; & t \to +\infty \text{ donne } x \to 1; \end{array}$$

d'où

$$B(u,v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}}\ dt = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v+1}\frac{1}{(1-x)^2}\ dx = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\ dx.$$

(b) En utilisant l'expression de $B(u,v)$ déterminée en **I.2** a, il suffit d'effectuer le changement de variable $y = 1-x$ pour obtenir l'égalité $B(u,v) = B(v,u)$.

(c) Calculons, en utilisant une intégration par parties[2] :

$$\begin{aligned} (u+v)B(u+1,v) &= (u+v)\int_0^1 x^u(1-x)^{v-1}\ dx = \int_0^1 ux^u(1-x)^{v-1}\ dx + \int_0^1 x^u v(1-x)^{v-1}\ dx \\ &= \int_0^1 x^u(1-x)^{v-1}\ dx + [-(1-t)^v t^u]_0^1 + \int_0^1 ux^{u-1}(1-x)^v\ dx \\ &= \int_0^1 ux^{u-1}(1-x)^{v-1}(1-x+x)\ dx = uB(u,v), \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\boxed{B(u+1,v) = \frac{u}{u+v}B(u,v+1)}$.

I.3 . (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ici, le changement de variable "judicieux" n'est pas sorcier : $y = \frac{t}{n}$, qui nous donne directement

$$I_n(x) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\ dt = \int_0^1 (1-y)^n (ny)^{x-1} n\ dy = n^x B(n+1,x).$$

[1] Remarque : nous utilisons ici le fait qu'un changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ ne change pas la nature d'une intégrale impropre

[2] à justifier en intégrant entre 0 et y puis en faisant tendre y vers 1

(b) D'après la question précédente, $I_n(x) = n^x B(n+1,x)$. Or **I.2** c montre que $B(n+1,x) = \frac{n}{n+x}B(n,x)$. Par suite, une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$ montre que

$$I_n(x) = n^x \frac{n!}{(x+n)...(x+1)} B(1,x).$$

Mais $B(1,x) = \int_0^1 t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, d'où

$$\boxed{I_n(x) = n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}.}$$

II. Etude de la fonction Gamma

II.1 . Soit $x > 0$. Comme pour $B(u,v)$, regardons des comparaisons (avec des fonctions de signe constant!) :

– en 0 : $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ avec $x-1 > -1$, d'où la convergence ;
– en $+\infty$: $e^{-t}t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ d'où la convergence .

II.2 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Γ_n est une intégrale à paramètre définie sur un segment (donc non généralisée). L'application $(t,x) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est

(b) La convergence de Γ vue en **II.1** implique que $\lim\limits_{(y,z)\to(0,+\infty)} \int_y^z e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t = \Gamma(x)$. Donc par composition des limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)}$.

(c) Nous avons $\Gamma_n(1) = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t}\ \mathrm{d}t = e^{-\frac{1}{n}} - e^{-n}$ d'où à la limite quand $[n \to +\infty]$, $\boxed{\Gamma(1) = 1}$.

(d) En menant directement le calcul sur Γ (en fait, il faut calculer sur $\Gamma_p(n)$ puis passer à la limite quand $[p \to +\infty]$), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}\ \mathrm{d}t \\ &= [-e^{-t}t^{n-1}]_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-2}\ \mathrm{d}t \qquad \text{(intégration par parties)} \\ &= (n-1)\Gamma(n-1).\end{aligned}$$

D'où (récurrence immédiate) $\boxed{\Gamma(n) = n!}$.

II.3 . Soit $x > 1$. Le même calcul qu'à la question **II.2** d donne la relation fonctionnelle de Γ :

$$\boxed{\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)\ .}$$

Avec cette formule, on peut prolonger Γ à $]-1,0[$ en posant :

$$\forall x \in]-1,0[, \qquad \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

Et de proche en proche, la même formule permet alors de prolonger Γ à $]-2,-1[$ puis $]-3,-2[$, etc. et ainsi d'obtenir par récurrence un prolongement de Γ à $]-\infty,0[\ \setminus \mathbb{Z}$, qui satisfait encore l'équation fonctionnelle.

Remarque : il était implicitement demandé dans l'énoncé que le prolongement de Γ satisfasse l'équation fonctionnelle vérifiée par Γ sur $]0,\ +\infty[$.

II.4 . Soit $x > 0$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$.
La convergence de Γ implique que $\lim_{y\to+\infty} \int_y^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t = 0$. Par suite,

$$\exists B > 0 \text{ tel que } y > B \Rightarrow \left| \int_y^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $A = B + 1$, nous obtenons

$$\int_A^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t < \varepsilon.$$

(b) Prenons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $A < n_0$: ainsi, $\forall t \in [0, A]$, $\varphi_n(t) = f(t) - f_n(t)$.
Et alors $\int_0^A e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^A t^{x-1}\varphi_n(t)\ \mathrm{d}t$.
Mais $\forall t \in [0, A] \subset [0, n]$, $|t^{x-1}\varphi_n(t)| = t^{x-1}\varphi_n(t) \le t^{x-1}\varphi_n(\alpha_n)$. d'où

$$\left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| \le \int_0^A |\ e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ |\ \ \mathrm{d}t \le \varphi_n(\alpha_n) \int_0^A t^{x-1}\ \mathrm{d}t.$$

(c) D'après **I.1** e, $|\ \varphi_n(\alpha_n) \le \frac{1}{ne}$, donc en prenant $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 \ge n_0$ et $n1 \ge \frac{\int_0^A t^{x-1}\ \mathrm{d}t}{e\varepsilon}$, nous obtenons :

$$\forall n \ge n_1, \qquad \left| \int_0^A e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| \le \varepsilon.$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Définissons A et n_1 comme aux questions précédentes.
Nous avons $I_n(x) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ et $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$, d'où, pour $n \ge \max(A, n_1)$:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(x) - I_n(x)| &= \left| \textstyle\int_0^A e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t + \int_A^\infty e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_A^n t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| \\
&\le \left| \textstyle\int_0^A e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| + \textstyle\int_A^\infty e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t + \int_A^n e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t \quad (\forall t, |\ f_n(t)\ | \le f(t) = e^{-t}) \\
&\le \left| \textstyle\int_0^A e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t - \int_0^A t^{x-1}f_n(t)\ \mathrm{d}t \right| + 2\textstyle\int_A^\infty e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t \le 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)}$.

(e) Il résulte alors immédiatement de la question **I.3** b que $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(n^x \frac{n!}{(x+n)(x+n-1)\dots x} \right)}$.

III. Equation de Bessel

III.1 . (a) a est une série entière de rayon R, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et sa dérivée est la série des termes dérivés, de même rayon de convergence. Donc :

$$a(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(\lambda)x^n, \quad a'(x) = \sum_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}(\lambda)x^n \quad \text{et} \quad a''(x) = \sum_{n=0}^\infty \lambda(n+1)(n+2)a_{n+2}(\lambda)x^n.$$

$\lambda > 0$ donc $x^\lambda = e^{\lambda \ln(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, R[$.
Par suite, y est bien deux fois dérivable sur $]0, R[$, et :

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}a(x) + x^\lambda a'(x) \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}a(x) + 2\lambda x^{\lambda-1}a'(x) + x^\lambda a''(x).$$

y solution de $(\mathcal{E})$ donne alors, pour tout $x > 0$,

$$0 = x^{\lambda+2}a(x) + (2\lambda+1)a'(x) + x^{\lambda+2}a''(x),$$

d'où, à l'aide de quelques réindexations,

$$0 = x^\lambda \left[\sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+2}(\lambda) + (2\lambda n + n^2) a_n(\lambda)) x^n + (2\lambda+1) a_1(\lambda) x \right].$$

Il en résulte que $(2\lambda+1)a_1(\lambda) = 0$ et

$$(*) \qquad \forall n \geq 0, \qquad \boxed{a_n(\lambda) = -\frac{a_{n-2}(\lambda)}{2\lambda n + n^2}}.$$

(b) Comme $\lambda > 0$, $(2\lambda+1)a_1(\lambda) = 0$ implique que $\boxed{a_1(\lambda) = 0}$.

(c) $a_0(\lambda)$ peut prendre toutes les valeurs réelles possibles.
La relation $(*)$ et la nullité de $a_1(\lambda)$ montre que $a_{2p+1}(\lambda) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Donc $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}(\lambda) x^{2p}$. Nous pouvons en déduire que cette somme est paire.

(d) Notons $b_p(\lambda) = a_{2p}(\lambda)$ et $b(y) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p(\lambda) y^p$. Alors $a(x) = b(x^2)$: donc pour montrer que le rayon R de a est infini, il suffit que de montrer que b est de rayon infini.
Pour ce faire, calculons

$$\frac{b_{p+1}\, y^{p+1}}{b_p\, y^p} = \frac{a_{2(p+1)}}{a_{2p}} \times y = -\frac{1}{4\lambda(p+1) + (2p+2)^2} \times y$$

donc $\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{b_{p+1}\, y^{p+1}}{b_p\, y^p} \right) = 0$.
La règle de d'Alembert (pour les séries numériques) montre la convergence de la série numérique $b(y)$ converge pour tout y, donc la série entière b est de rayon infini, d'où $\boxed{R = +\infty}$, d'après une remarque ci-dessus.
Il en résulte que y définie au **III.1** a est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\ +\infty[$, et les calculs ci-dessus montrent que y est alors solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

(e) Supposons pour la suite que $a_0(\lambda) = \frac{1}{2^\lambda\ \Gamma(\lambda+1)}$.
Montrons, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\ p!\,\Gamma(\lambda+p+1)}$.
<u>$p = 0$</u> : c'est l'hypothèse que nous venons de faire.
<u>Soit $p \in \mathbb{N}^*$</u> et supposons la propriété vraie jusqu'à $p-1$: nous avons alors

$$\begin{aligned} a_{2p}(\lambda) &= -\frac{a_{2p-2}(\lambda)}{2\lambda(2p)+(2p)^2} && (\textit{ relation}\,(*)) \\ &= \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2(p-1)+\lambda}\ (p-1)!\,\Gamma(\lambda+p)} \times \frac{1}{4p(\lambda+p)} && (\textit{ hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\ p!\,(\lambda+p)\,\Gamma(\lambda+p)} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\lambda}\ p!\,\Gamma(\lambda+p+1)} && (\textit{ équation fonctionnelle de } \Gamma) \end{aligned}$$

d'où la propriété au rang p, ce qui achève la récurrence.

(f) Cette question me semble mal définie : comment sont définis les coefficients $a_n(-\lambda)$ pour $\lambda < 0$? Nous allons donc supposer que ces coefficients continuent de vérifier la relation $(*)$, ainsi que $a_0(-\lambda) = \frac{1}{2^{-\lambda}\ \Gamma(-\lambda+1)}$ ce qui permet de justifier la convergence et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de $J_{-\lambda}$ avec des arguments semblables à ceux utilisés pour $J_\lambda = y$. Et une récurrence (utilisant le prolongement fonctionnele de Γ vu partie **II.**) montre alors que ces coefficients vérifient encore la formule démontrée au **III.1** e .
Donc

$$J_{-\lambda}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\, p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)} \times x^{2p-\lambda} \quad ; \quad {J_{-\lambda}}'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\,(2p-\lambda)}{2^{2p-\lambda}\, p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)} \times x^{2p-\lambda-1}$$

$$\text{et} \qquad {J_{-\lambda}}''(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\,(2p-\lambda)(2p-\lambda-1)}{2^{2p-\lambda}\, p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)} \times x^{2p-\lambda-2}.$$

Un calcul simple montre alors que

$$x^2 J_{-\lambda}''(x) + xJ_{-\lambda}{}'(x) + (x^2 - \lambda^2)J_{-\lambda}(x) = 0 \qquad \forall x > 0,$$

donc que $J_{-\lambda}$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

(g) Nous avons (en utilisant $\frac{1}{2^{2p+\lambda}} = \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}$) :

$$J_{-\lambda}(x) = x^\lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p-\lambda}\, p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)} x^{2p} = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(-\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

(h) Si on suppose que $(J_\lambda,\ J_{-\lambda})$ est une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$, alors la forme générale des solutions est :

$$\forall x > 0, \boxed{f(x) = \alpha J_\lambda(x) + \beta J_{-\lambda}(x)}\,,$$

avec α et β des constantes réelles.

Remarque : nous savons déjà (c.f. cours) que cet espace est un e.v. de dimension 2. Par suite, comme J_λ et $J_{-\lambda}$ appartiennent à cet espace, il suffit de montrer que la famille est libre pour montrer que c'est une base de l'espace des solutions. C'est ce point qui n'est pas évident et que l'on admet ici.

III.2 . (a) Calculons :

$$u'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}y(x) + x^{1/2}y'(x) \qquad \text{et } quadu''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y(x) + x^{-1/2}y'(x) + x^{1/2}y''(x).$$

Donc

$$u''(x) + (1 + \frac{\sigma}{x^2})u(x) = x^{-3/2}\left(x^2y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 + (\sigma - \frac{1}{4}\right)y(x)\right) = x^{-3/2}\left((\sigma - \frac{1}{4}) + \lambda^2\right)y(x).$$

Par suite, u est solution de l'équation proposée si on a $\boxed{\sigma = \frac{1}{4} - \lambda^2}$.

(b) Dans le cas où $\lambda = \frac{1}{2}$, ce qui précède montre que u est solution de l'équation différentielle $u''(x) + u(x) = 0$. Donc $\exists A, B \in \mathbb{R}$ telles que $u(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, $\forall x > 0$.
Par suite, nous avons

$$\forall x > 0, \boxed{y(x) = A\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + B\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}}.$$

La dernière question est obscure : doit-on tracer une solution particulière ?