Jean-Marie DELORME delorme.jean-marie@wanadoo.fr
François-Xavier COQ francois.coq@ac-orleans-tours.fr
Jacki LUCAS jackilucas@aol.com
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2005 CCP Filière PC
Physique 1

PROBLÈME I
L'ASCENSEUR SPATIAL

I.1 Mouvements orbitaux

- I.1.1 Le théorème de Gauss conduit à: $G_0 = \dfrac{\mathcal{G}\, M_T}{R_T^{\,2}}$. G_0 est l'intensité du champ de gravitation, g celle du champ de pesanteur contenant le champ de gravitation et le champ d'inertie d'entraînement.

- I.1.2 Le principe fondamental de la dynamique pour un mouvement circulaire conduit à: $\dfrac{r^3}{\tau^2} = \dfrac{\mathcal{G}\, M_T}{4\,\pi^2}$.

- I.1.3 Pour la Lune: τ_L = 2,37.10^6 s = 27,4 jours (valeur approchée connue).

- I.1.4 Le satellite est immobile si $\tau = \dfrac{2\,\pi}{\Omega}$ (= 1 jour), donc: $R_{GS} = \left(\dfrac{\mathcal{G}\, M_T}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ = 42,2.10^3 km, d'où une altitude d'environ 36.10^3 km, valeur connue.

I.2 Équilibre du câble

- I.2.1 Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_T{}^*$ est en translation (quasi circulaire uniforme) par rapport au référentiel de Copernic. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est en rotation (uniforme) par rapport au référentiel géocentrique.
Pendant des durées très faibles devant une année, le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_T{}^*$ peut être considéré comme galiléen.

- I.2.2 $\mathbf{F}_I(r,\theta) = m\ \Omega^{\,2}\,\mathbf{HM}$ où H est le projeté de M sur l'axe de rotation:

$$\mathbf{F}_I(r,\theta) = m\ \Omega^{\,2}\, r\ (\sin\theta\ \mathbf{e}_r + \cos\theta\ \mathbf{e}_\theta).$$

$$\mathbf{F}_G(r) = -\ \frac{\mathcal{G}\ m M_T}{r^2}\ \mathbf{e}_r = -\ \frac{G_0\ m R_T^{\,2}}{r^2}\ \mathbf{e}_r.$$

- I.2.3 Pour l'équilibre de l'élément situé entre r et r+dr à l'équateur ($\theta = \pi/2$), il vient:

$$d\mathbf{F}_I + d\mathbf{F}_G + T(r+dr)\ \mathbf{e}_r - T(r)\ \mathbf{e}_r, \text{ donc: } T(r+dr) - T(r) + \mu(r)\ dr\left(\Omega^2\, r - G_0\, \frac{R_T^{\,2}}{r^2}\right) = 0.$$

Remarque: le texte dit que $T(r)$ s'oppose à l'allongement du câble et $T(r) > 0$: ça semble contradictoire. En fait $T(r)$ s'oppose à l'effondrement du câble.

- I.2.4 Cette équation s'écrit aussi: $\dfrac{dT}{dr} = -\mu\left(\Omega^2\, r - G_0\, \dfrac{R_T^{\,2}}{r^2}\right)$, d'où par intégration entre R_{top} et r:

$$T(r) - T(R_{top}) = -\mu\left(\frac{1}{2}\,\Omega^2\left(r^2 - R_{top}^{\,2}\right) + G_0\, R_T^{\,2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{top}}\right)\right) .$$

De plus l'équilibre de la masse M_{top} soumise à la tension du fil $-\,T(R_{top})\ \mathbf{e}_r$, à la force de gravitation

- $G_0\, M_{top}\, \dfrac{R_T^{\,2}}{R_{top}^{\,2}}$ $\mathbf{e}_r$ et à la force d'inertie d'entraînement: $M_{top}\, \Omega^2 R_{top}\, \mathbf{e}_r$ donne:

$T(R_{top}) = M_{top}\, \Omega^2 R_{top} - G_0\, M_{top}\, \dfrac{R_T^{\,2}}{R_{top}^{\,2}}$ et donc:

$$T(r) = -\mu\left(\frac{1}{2}\Omega^2\left(r^2 - R_{top}^{\,2}\right) + G_0\, R_T^{\,2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{top}}\right)\right) + M_{top}\, \Omega^2 R_{top} - G_0\, M_{top}\, \frac{R_T^{\,2}}{R_{top}^{\,2}}$$

Remarque: dans cette question, $R_{top} > R_{GS}$ ne sert pas.

- I.2.5 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0$ pour $r = r_m$ tel que: $r_m\, \Omega^2 = G_0\, M_{top}\, \dfrac{R_T^{\,2}}{r_m^{\,2}}$,

donc: $r_m = \left(\dfrac{G_0\, R_T^{\,2}}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{3}} = R_{GS} < R_{top}$.

r	R_T		$r_m = R_{GS}$		R_{top}
$\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$		+	0	-	
$T(r)$	T_{min1}	↗	T_{max}	↘	T_{min2}

Le tableau des variations de $T(r)$ ci-contre montre que la tension reste positive si $T_{min1} = T(R_T) > 0$ et $T_{min2} = T(R_{top}) > 0$.

$T(R_{top}) = M_{top}\, R_{top}\, \Omega^2 \left(1 - \dfrac{R_{GS}^{\,3}}{R_{top}^{\,3}}\right)$, donc $T(R_{top}) > 0$.

La condition $T(R_T) > 0$ donnera une condition sur M_{top} et R_{top}, qui n'est pas simple... la fonction de M_{top} donne une valeur minimale $M_{top,min}$, mais la fonction de R_{top} donne une équation du troisième degré à résoudre ???

- I.2.6 Si $M_{top} = 0$, alors $T(R_{top}) = 0$ et $T(R_T) = -\mu\left(\dfrac{1}{2}\Omega^2\left(R_T^{\,2} - R_{top}^{\,2}\right) + G_0\, R_T^{\,2}\left(\dfrac{1}{R_T} - \dfrac{1}{R_{top}}\right)\right)$. En utilisant $G_0\, R_T^{\,2} = \Omega^2\, R_{GS}^{\,3}$, il vient: $T(R_T) = -\mu\, G_0\, R_T\left(\dfrac{1}{2} R_T \dfrac{\left(R_T^{\,2} - R_{top}^{\,2}\right)}{R_{GS}^{\,3}} + 1 - \dfrac{R_T}{R_{top}}\right)$.

Numériquement, la parenthèse vaut: $\left(\dfrac{1}{2} 6{,}38 \dfrac{\left(6{,}38^2 - 145^2\right)}{42{,}2^3} + 1 - \dfrac{6{,}38}{145}\right) = 6{,}5 > 0$, donc $T(R_T) < 0$ et le câble n'est pas stable (il s'effondre).

- I.3 Masse et résistance du câble

- I.3.1 Σ est une force par unité de surface, donc une pression s'exprimant en pascals (Pa) ou $\mathrm{N.m^{-2}}$.

- I.3.2 La masse linéïque est $\mu = \dfrac{m}{l} = \dfrac{\rho A l}{l} = \rho\, A = \rho\, \pi\, r_c^{\,2}$.

- I.3.3 Remarque: si on suit le texte, on répond directement $\Sigma_{max} = \Sigma_c$ ou $\Sigma_{max} = \dfrac{T_{max}}{\pi\, r_c^{\,2}}$.

D'après le I.2.5, $T(r)$ est maximale en $r_m = R_{GS}$ et prend une valeur T_{max} (dont l'expression en fonction des données est longue et sans intérêt).

Le câble résiste si $\Sigma_{max} = \dfrac{T_{max}}{\pi\, r_c^{\,2}}$ est inférieur à Σ_c. Il faut donc: $\Sigma_{max} = \dfrac{\rho}{\mu} T_{max} < \Sigma_c$.

$$\Sigma_{max} = \frac{T_{max}}{\pi\, r_c^{\,2}} = -\rho\left(\frac{1}{2}\Omega^2\left(R_{GS}^{\,2} - R_{top}^{\,2}\right) + G_0\, R_T^{\,2}\left(\frac{1}{R_{GS}} - \frac{1}{R_{top}}\right)\right) + \frac{1}{\pi\, r_c^{\,2}}\left(M_{top}\, \Omega^2 R_{top} - G_0\, M_{top}\, \frac{R_T^{\,2}}{R_{top}^{\,2}}\right).$$

$$\Sigma_{max} = -\rho\left(\frac{1}{2}\Omega^2\left({R_{GS}}^2 - {R_{top}}^2\right) + G_0\, {R_T}^2\left(\frac{1}{R_{GS}} - \frac{1}{R_{top}}\right)\right) + \frac{1}{\pi {r_c}^2} M_{top}\, G_0 \frac{{R_T}^2}{{R_{top}}^2}\left(\frac{{R_{top}}^3}{{R_{GS}}^3} - 1\right) .$$

La dernière parenthèse étant positive, Σ_{max} diminue lorsque r_c augmente: le câble est alors plus solide ce qui semble logique.

Dans le cas où $M_{top} = 0$, Σ_{max} est indépendant du rayon du câble.

- I.3.4 Remarque: pour faire les applications numériques, il faudrait connaître M_{top} qui n'est pas donné...

Nous allons prendre $M_{top} = 0$, mais ce n'est pas cohérent avec le I.2.6 qui a montré que le câble s'effondrait.

On trouve: pour l'acier: $\Sigma_{max} = 3{,}5.10^{11}$ Pa > $\Sigma_{c(acier)} = 10^9$ Pa

pour le Kevlar: $\Sigma_{max} = 6{,}4.10^{10}$ Pa > $\Sigma_{c(kevlar)} = 3{,}6.10^9$ Pa .

Dans les deux cas, la résistance du câble est insuffisante.

Le module d'Young Y est donné par: $\Sigma = Y \dfrac{\delta l}{l}$, on en déduit les valeurs maximales des allongements relatifs pour l'acier: $\dfrac{\delta l}{l} = 1{,}7$ et pour le Kevlar: $\dfrac{\delta l}{l} = 18$. Ces valeurs sont importantes, certainement hors des domaines d'élasticité des matériaux.

- I.3.5 Remarque: le texte devrait donner $\Sigma_c = 100.10^9$ Pa.

On trouve: pour les nanotubes de carbone: $\Sigma_{max} = 58.10^9$ Pa < $\Sigma_{c(nanotubes)} = 100.10^9$ Pa, donc le câble spatial en nanotubes de carbone serait assez solide, mais comme le dit le texte on ne sait pas réaliser des tubes de plus d'un micromètre.

- I.3.6 $\Sigma = \dfrac{T(r)}{\pi {r_c}^2}$. À la limite où $\Sigma = \Sigma_c$, $\pi {r_c}^2 = \dfrac{T(r)}{\Sigma_c}$ et $\mu(r) = \rho\, \pi\, {r_c}^2 = \dfrac{\rho}{\Sigma_c} T(r)$.

- I.3.7 Posons $t(r) = T(r) / \mu$. L'équation du I.2.3 devient: $\dfrac{dt}{dr} = -\left(\Omega^2 r - G_0 \dfrac{{R_T}^2}{r^2}\right)$.

Remarque: l'équation en $T(r)$ est la même qu'en I.2.3, pourquoi la reécrire ? La résolution en $T(r)$ ne peut se faire que si on connaît l'expression de $\mu(r)$. La résolution en $t(r)$ est la même qu'au I.2.4.

- I.3.8 Remarque: $t(r)$, donc $T(r)$, peut devenir négative dans les mêmes conditions qu'au I.2.5.

Doit-on ici considérer $M_{top} = 0$???

Le texte n'est pas clair. Si vous avez des idées, envoyez les nous, merci.

Conclusion: avec des questions aussi mal posées, comment peut-on juger les acquis et les savoir-faire des étudiants ? Celui qui ne se sera pas posé de question aura gagné du temps et des points. Ce n'est pas exactement ce que nous essayons d'enseigner.

- I.4.1 L'équation proposée (avec un vecteur nul dans le membre de droite) est une équation de d'Alembert, ou équation d'onde de célérité $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ (qui est la vitesse de phase). c = $7{,}7.10^3$ m.s^{-1}.

- I.4.2 Il y a un *nœud* de vibration en R_T et en R_{top}. Deux nœuds étant séparés d'un multiple de $\lambda/2$, pour le mode fondamental: $R_{top} - R_T = \lambda_1/2 = c/(2f_1)$, ce qui donne: $f_1 = 8{,}9.10^{-5}$ Hz et une période $T_1 = 3{,}12$ h.

Les fréquences des autres modes sont $f_p = p\, f_1$ avec p un entier supérieur ou égal à 2.

- I.4.3 Les marées lunaires sont de période 12 h $\approx 4\ T_1$, donc de fréquence proche de $f_1 / 4$.

Si les périodes de vibration sont proches de 12 h, il y a un phénomène de résonance et amplification de l'amplitude des vibrations et éventuellement rupture du câble.

- I.4.4 Le nombre de Reynolds peut être pris égal à $R_e = \dfrac{\rho_a u\, d}{\eta} = 2.10^5 >> 10^3$, donc le régime est turbulent et la force de friction de l'air est: $F_{vent} = C_x \left(\dfrac{\rho_a u^2}{2}\right) d\ H.$

La partie située entre R_T et $R_T + H$ est soumise à la force du vent horizontale, à son poids et à la tension. L'inclinaison du fil vaut, en ordre de grandeur $\alpha \approx \tan\alpha \approx \dfrac{F_{vent}}{poids} = \dfrac{C_x \rho_a \dfrac{u^2}{2} d\,H}{\rho \pi \dfrac{d^2}{4} H} = 4{,}9$ rad ce qui n'est pas petit et ne permet pas de valider le calcul ???

Le déplacement induit est alors $H \tan\alpha =$

Remarque: attend-on ici un ordre de grandeur ? La force du vent est répartie sur la hauteur H, doit-on considérer le poids de cette partie ou de l'ensemble...?

- I.4.5 La célérité vaut $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = 3{,}2.10^3$ m.s^{-1}. La longueur du train d'ondes est $l = c\ \Delta t = 32$ km.

- I.4.6 Prenons $\mathbf{h} = h_0 \cos(\omega\ t\ -\ k\ x)\ \mathbf{e_x}$.

Alors $\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\ \omega\ h_0 \sin(\omega\ t\ -\ k\ x)\ \mathbf{e_x}$ et $\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} = k\ h_0 \sin(\omega\ t\ -\ k\ x)\ \mathbf{e_x}$.

Par unité de longueur: $\langle e\rangle = \dfrac{1}{4}\ \mu\, \omega^2 h_0^2 + \dfrac{1}{4}\ T\, k^2 h_0^2$ avec $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{\omega^2}{T}\mu$, d'où

$\langle e\rangle = \dfrac{1}{2}\ \mu\, \omega^2 h_0^2$. Pour toute la longueur l de l'onde: $\langle E\rangle = \dfrac{1}{2}\ \mu\, \omega^2 h_0^2\, l = 6{,}4$ MJ.

- I.5.1 Tracé des lignes de champ: cours.

- I.5.2 Pour Paris, $\theta = 40\ °$. $\mathsf{M} = \dfrac{B\, R_T^3}{\sqrt{4\ \cos^2 40° + \sin^2 40°}} = 7{,}8.10^{15}$ T.m^3.

Dans le plan équatorial: $\theta = 90\ °$, à l'altitude R_{GS}: $B = 1{,}04.10^{-7}$ T.

- I.5.3 Le champ électromoteur (ce nom est-il exigible des étudiants ?) est $\mathbf{E_{em}} = \mathbf{v_e} \wedge \mathbf{B}$, avec

$\mathbf{v_e} = \dfrac{\partial h_x}{\partial t}\ \mathbf{e_x} + \dfrac{\partial h_y}{\partial t}\ \mathbf{e_y}$ et $\mathbf{B} = B\ \mathbf{e_y}$ donc: $\mathbf{E_{em}} = \dfrac{\partial h_x}{\partial t}\ B\ \mathbf{e_z}$.

- I.5.4 Le vecteur densité (surfacique) de courant volumique est $\mathbf{j} = \sigma\ \mathbf{E_{em}}$ et l'intensité: $I = \mathbf{j}\ .\ S\ \mathbf{e_z}$, donc:

$I = \sigma\, S\, B\, \dfrac{\partial h_x}{\partial t}$.

- I.5.5 La force de Laplace élémentaire est: $d\mathbf{F}_{Lap} = I\, dz\; \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{B} = -\, I\, dz\, B\, \mathbf{e}_x$.

L'équation du mouvement selon $\mathbf{e}_x$ devient: $\mu\, dz\, \dfrac{\partial^2 h_x}{\partial t^2}$ = termes précédents - $I\, B\, dz$, conduisant à:

$\mu\, \dfrac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} - T\, \dfrac{\partial^2 h_x}{\partial r^2} = -\, \sigma\, S\, B^2\, \dfrac{\partial h_x}{\partial t}$. On pose donc $K = -\, \sigma\, S\, B^2$.

La force de Laplace n'ayant pas de composante selon $\mathbf{e}_y$, l'équation pour h_y est inchangée.

- I.5.6 Entre r et r+dr, la puissance des forces de Laplace vaut: $dP_{Lap} = \mathbf{dF_{Lap}.v} = -\, I\, B\, dr\, \dfrac{\partial h_x}{\partial t}$. Cette puissance est reçue par le câble puis dissipée par effet Joule.

Remarque: le texte demande de comparer une énergie à une puissance, nous préférons comparer des grandeurs de même dimension, par exemple des énergies.

$dP_{diss} = \sigma\, S\, B^2\, \dfrac{\partial^2 h_x}{\partial t^2}\, dr = \sigma\, S\, B^2\, h_0^2\, \omega^2\, \sin^2(\omega\, t - k\, x)\, dr$, si par exemple $h_x = h_0 \cos(\omega\, t - k\, x)$.

La moyenne temporelle est alors: $\langle dP_{diss}\rangle = \sigma\, S\, B^2\, h_0^2\, \omega^2\, \dfrac{1}{2}\, dr$. En intégrant sur la longueur du câble:

$$\langle P_{diss}\rangle = \sigma\, S\, B^2\, h_0^2\, \omega^2\, \frac{1}{2}\, (R_{top} - R_T), \text{ donc: } \langle P_{diss}\rangle = 2{,}5.10^4 \text{ W}.$$

La durée caractéristique τ de l'amortissement est telle que: $\langle P_{diss}\rangle\, \tau = \langle E_{méca}\rangle$, avec $\langle E_{méca}\rangle$ = 6,4 MJ, d'où:

$\tau = 2{,}6.10^{-2}$ s. L'amortissement selon Ox est très lent (τ >> période = 1 s). C'est étonnant !

Il n'y a pas d'amortissement selon Oy (à l'équateur).

- I.5.7 $\mathbf{B} = B_y\, \mathbf{e}_y + B_r\, \mathbf{e}_r$, avec le trièdre ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_r$) direct. Le champ électromoteur vaut alors: $\mathbf{E}_{em} = \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}$, avec $\mathbf{v}_e = \dfrac{\partial h_x}{\partial t}\, \mathbf{e}_x + \dfrac{\partial h_y}{\partial t}\, \mathbf{e}_y$, donc: $\mathbf{E}_{em} = \dfrac{\partial h_x}{\partial t}\, B_y\, \mathbf{e}_r - \dfrac{\partial h_x}{\partial t}\, B_r\, \mathbf{e}_y + \dfrac{\partial h_y}{\partial t}\, B_r\, \mathbf{e}_x$. Le vecteur densité de courant devient: $\mathbf{j} = \sigma\, \mathbf{E}_{em} = j_x\, \mathbf{e}_x + j_y\, \mathbf{e}_y + j_z\, \mathbf{e}_z$. La force de Laplace élémentaire est: $d\mathbf{F}_{Lap} = \mathbf{j}\, S\, dr\, \wedge \mathbf{B}$, donc:
$d\mathbf{F}_{Lap} = S\, dr\, (B_y\, j_x\, \mathbf{e}_r - B_r\, j_x\, \mathbf{e}_y + B_r\, j_y\, \mathbf{e}_x - B_y\, j_r\, \mathbf{e}_x)$.

Le principe fondamental de la dynamique donne alors:

selon Ox: $\mu\, \dfrac{\partial^2 h_x}{\partial t^2}\, dr = T\, dr\, \dfrac{\partial^2 h_x}{\partial r^2} + S\, dr\, (B_r j_y - B_y j_r)$, donc:

$$\mu\, \frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} - T\, \frac{\partial^2 h_x}{\partial r^2} = \sigma\, S\, \left(- B_r^2\, \frac{\partial h_y}{\partial t} - B_y^2\, \frac{\partial h_x}{\partial t}\right).$$

Le dernier terme est bien celui du I.5.5, le précédent est un terme de couplage.

Selon Oy: $\mu\, \dfrac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} - T\, \dfrac{\partial^2 h_y}{\partial r^2} = -\, S\, B_r\, j_x = -\, \sigma\, S\, B_r^2\, \dfrac{\partial h_y}{\partial t}$.

PROBLÈME II
OPTIQUE PHYSIQUE ET PHOTOGRAPHIE

Remarques: les données numériques ne sont pas très cohérentes du point de vue des chiffres significatifs. Nous choisissons d'en donner 2 ou 3 dans les résultats.

Dans le 1., **E** est une représentation complexe du champ électrique, dans le 2., c'est la fonction réelle.

- II.1 L'énergie lumineuse

- II.1.1 $\omega = 2\pi\dfrac{c}{\lambda} = 3{,}14.10^{15}$ rad.s^{-1}; $q = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 1{,}05.10^{7}$ m^{-1}.

- II.1.2 Pour l'onde électromagnétique plane progressive dans le vide de vecteur d'onde $\mathbf{q} = q\,\mathbf{e}_x$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{q}\wedge\mathbf{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c}\,\mathbf{e}_z\,e^{i(qx-\omega t)}.$$

- II.1.3 Le vecteur de Poynting est: $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}}{\mu_0}$ avec **E** et **B** les <u>fonctions réelles</u>.

Sa valeur moyenne est, en utilisant les fonctions complexes: $\langle\mathbf{R}\rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}^*}{\mu_0}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{E_0^{\,2}}{c\,\mu_0}\,\mathbf{e}_x$.

- II.1.4 La puissance moyenne transportée par l'onde par unité de surface est le module du vecteur de Poynting: $P = \dfrac{1}{2}\dfrac{E_0^{\,2}}{c\,\mu_0}$, donc: $E_0 = \sqrt{2\,\mu_0\,c\,P} = 27{,}5$ V.m^{-1}.

- II.1.5 Un photon transporte l'énergie $h\,\nu$. Pendant dt, l'énergie traversant une surface S perpendiculaire à $\mathbf{e}_x$ vaut: $P\,S\,\mathrm{d}t = N\,h\,\nu\,S\,\mathrm{d}t$, donc: $N = \dfrac{P}{h\nu} = 3{,}0.10^{18}$ m^{-2}.s^{-1}.

II.2 Courbe de noircissement d'une émulsion photosensible

- II.2.1 La réaction étant élémentaire, la vitesse de la réaction vaut: $v = k\,[A]\,[\gamma]$, avec ici: $[\gamma]$= cste.

D'autre part: $v = -\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t}$, donc: $-\dfrac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}t} = k\,[A]\,[\gamma]$.

- II.2.2 On obtient $[A] = [A]_0\exp(-k\,[\gamma]\,t)$, puis $[A] + [B] = \text{cste} = [A]_0$ donne: $[B] = [A]_0\,(1 - \exp(-k\,[\gamma]\,t))$. Donc: $[A](\tau) = [A]_0\exp(-k\,[\gamma]\,\tau)$ et $[B](\tau) = [A]_0\,(1 - \exp(-k\,[\gamma]\,\tau))$.

- II.2.3 Tant que $[B]$ n'a pas atteint b, l'opacité est égale à v, puis elle est proportionnelle à $[B]$- b (et même - v). On obtient bien l'allure de la courbe donnée.

II.3 Montage

- II.3.1 Il y a superposition de deux ondes cohérentes car provenant d'une même source ponctuelle. On observe donc des interférences, ici des franges rectilignes perpendiculaires à Oy et régulièrement espacées.

- II.3.2 Deux ondes provenant de sources distinctes ne sont pas cohérentes, il n'y aurait pas d'interférences.

- II.3.3 Remarque: l'onde provenant de A (ou B) étant plane, il n'y a pas de rayon allant de A vers M (sauf pour M_0). On va calculer des différences de phase (ou retards de phase) en utilisant un plan d'onde passant par A (ou B) et un plan d'onde passant par M.

Pour l'onde plane venant de A, la phase est: $\phi_1 = \mathbf{k_1.AM}$ $(-\,\omega\,t)$ avec $\mathbf{k_1} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\,\mathbf{e}_z$.

Pour l'onde plane venant de B, la phase est: $\phi'_2 = \mathbf{k_2.BM}$ $(-\,\omega\,t)$ avec $\mathbf{k_2} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\,(-\cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_z)$ auquel il faut ajouter le retard de phase dû à la propagation de A vers B soit $\phi''_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda}\,d$, donc au total:

$\phi_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda}\,(d + (y - d)\sin\theta + L\cos\theta)$; $\phi_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda}\,L$.

De plus si θ est petit, donc: $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \tan\theta = \dfrac{d}{L}$. Il vient donc: $\phi_2 - \phi_1 \approx \dfrac{2\pi}{\lambda}\,(d + (y - d)\,\dfrac{d}{L}$),

qui est bien de la forme $\phi_2 - \phi_1 = C - y/a$ avec $a = \dfrac{\lambda L}{2\pi d} = \dfrac{\lambda}{2\pi\sin\theta}$.

Remarque: d'autres calculs sont possibles, il donnent le même a, mais des C qui peuvent être différents.

- II.3.4 Remarque: l'énoncé ne distingue pas grandeur réelle et grandeur complexe ce qui conduit à une moyenne temporelle d'une grandeur complexe qui n'a pas de sens. Il faut lire moyenne temporelle des grandeurs réelles.

L'intensité lumineuse moyenne s'écrit $I(y) = \dfrac{1}{2} K\, \mathrm{Re}(E(y)E(y)^*) = K\, E_0^2\, (1 + \cos(\phi_2 - \phi_1))$.

En posant $I_0 = K\, E_0^2$, on obtient: $I(y) = I_0\, (1 + \cos(C - y/a))$.

- II.3.5 L'interfrange est $i = 2\,\pi\, a = \dfrac{\lambda}{\sin\theta} = 1{,}2.10^{-6}$ m $= 1{,}2.10^{-3}$ mm.

Par millimètre il y a donc $\dfrac{1}{i_{mm}} = 8{,}2.10^2$ franges: c'est invisible à l'oeil nu.

- II.4 Dispersion de la lumière

- II.4.1 D'après le principe de Huygens-Fresnel, l'onde en $M(y,z)$ est de la forme (on note y' et z' les coordonnées d'un point P sur le film): $E(M,t) = \iint A(y',z')\, exp(i(\mathbf{k.OP'} - \omega t))\, \mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$.

L'intégrale sur z donne la largeur (éclairée) du film, donc une constante qu'on n'écrira pas dans la suite.

Remarque: la constante C donnée dans $A(y,z)$ n'est pas la même que dans le II.3.3: on la notera C'.

De plus, $A(y',z') = C' + D\cos\left(\dfrac{2\,\pi\, y'}{p_y}\right) = C' + \dfrac{D}{2}\left(exp\left(i\,2\,\pi\dfrac{y'}{p_y}\right) + exp\left(-i\,2\,\pi\dfrac{y'}{p_y}\right)\right)$ et $\mathbf{k.OP'} = k_y y'$.

En notant b la largeur du film, il vient trois intégrales: $\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} exp(-y' k_y)\, \mathrm{d}y'$;

$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} exp\left(-y'\left(\dfrac{2\,\pi}{p_y} + k_y\right)\right)\mathrm{d}y'$ et $\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} exp\left(-y'\left(-\dfrac{2\,\pi}{p_y} + k_y\right)\right)\mathrm{d}y'$.

La première conduit à $b\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{k_y}{2\,\pi} b\right)$ qui est maximale pour $k_y = 0$, correspondant à une onde plane horizontale de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\,\mathbf{u_x}$ avec $k = \dfrac{2\,\pi}{\lambda}$;

La deuxième conduit à $b\,\mathrm{sinc}\left(\left(\dfrac{k_y}{2\,\pi} - \dfrac{1}{p_y}\right)b\right)$ qui est maximale pour $k_y = \dfrac{2\,\pi}{p_y}$, correspondant à une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\,\mathbf{u_x} + k_y\,\mathbf{u_y}$, donc faisant un angle $\alpha = \tan\alpha = \dfrac{k_y}{k} = \dfrac{\lambda}{p_y}$ avec l'horizontale.

La troisième conduit à $b\,\mathrm{sinc}\left(\left(\dfrac{k_y}{2\,\pi} + \dfrac{1}{p_y}\right)b\right)$ qui est maximale pour $k_y = -\dfrac{2\,\pi}{p_y}$, correspondant à une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\,\mathbf{u_x} + k_y\,\mathbf{u_y}$, donc faisant un angle $-\alpha$ avec l'horizontale.

- II.4.2 $\alpha' = \dfrac{\lambda'}{p_y}$, donc $\dfrac{\alpha'}{\lambda'} = \dfrac{\alpha}{\lambda}$.

Si $\lambda' \neq \lambda$, alors $\alpha' \neq \alpha$: ce film disperse la lumière blanche. Il peut être utilisé dans un spectroscope et ainsi déterminer le spectre de la lumière incidente.