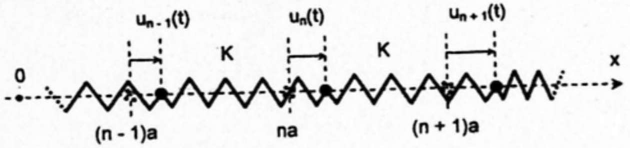
Concours . E_3A . PC . 2007 ①

Première partie : Onde élastique dans un barreau solide.

A. Modèle microscopique et approximation des milieux continus.



A.1* a) $F_n = K(u_{n-1} - u_n) + K(u_{n+1} - u_n)$

A.1* b) $\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = \dfrac{K}{m}\left[u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right]$ on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$

A.2* a) $-\omega^2 \underline{u_n} = \omega_0^2\left[\underline{u_{n+1}} + \underline{u_{n-1}} - 2\underline{u_n}\right]$

A.2* b) $\underline{u_{n+1}} = \underline{u_{n-1}} = \underline{u_n} \rightarrow \omega^2 \underline{u_n} = 0 \quad \forall \underline{u_n} \Rightarrow \omega = 0$

Il s'agit de la limite en basse fréquence.

A.2* c) $-\omega^2 \underline{u_n} = -4\omega_0^2 \underline{u_n} \Rightarrow \omega = 2\omega_0$

A.3* a) Onde progressive se propageant vers les x croissants.

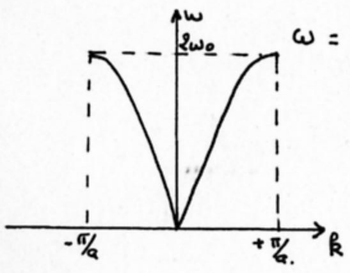
A ind^t de n $\rightarrow$ ni amortissement, ni amplification.

A.3* b) $\underline{u_{n+1}} = \underline{u_n}\, e^{-jka} \qquad \underline{u_{n-1}} = \underline{u_n}\, e^{+jka}$.

$\rightarrow -\omega^2 \underline{u_n} = \omega_0^2\left[e^{-jka} + e^{+jka} - 2\right]\underline{u_n}$

$\omega^2 = \omega_0^2\left[2 - 2\cos ka\right] = 4\omega_0^2 \sin^2 \dfrac{ka}{2}$.

$\omega = \pm\, 2\omega_0 \sin ka$. ou encore avec $\omega > 0$: $\underline{\omega = \left|2\omega_0 \sin \dfrac{ka}{2}\right|}$



A.3* c) Fonction paire pour $\omega > 0$ décrite entièrement sur le domaine $-\pi/a < k < +\pi/a$.

A.3* d) $\underline{u_n} = \underline{u_{n-1}}\, e^{-jka} = A e^{j(\omega t - \omega\tau - k(n-1)a)}$

En posant $ka = \omega\tau$

$\rightarrow \tau = \dfrac{ka}{\left|2\omega_0 \sin\frac{ka}{2}\right|}$

On peut donc défini une vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{a}{\tau} = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\left|2\omega_0 \sin\frac{ka}{2}\right|}{k}$

v_φ dépend de k $\rightarrow$ propagation dispersive.

A.4* a) Par définition $V_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \omega_0 a \cos \dfrac{ka}{2}$.

②

A.4* b) qd $k \rightarrow 0$ $\quad V_\varphi \rightarrow \omega_0 a$.

$V_g \rightarrow \omega_0 a$.

Lorsque $k \rightarrow 0$ la relation de dispersion devient linéaire $\omega = \omega_0 a k$.

le milieu n'est plus dispersif et $V_g = V_\varphi$.

A.4* c) qd $k \rightarrow \dfrac{\pi}{a}$ $\quad v_\varphi \rightarrow \dfrac{2\omega_0 a}{\pi}$

$V_g \rightarrow 0$

ω tend vers sa valeur limite. L'energie ne peut plus se propager.

A.5 $\quad u_{n+1}(t) = u_n(t) + \dfrac{\partial u}{\partial x} a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2$

$u_{n-1}(t) = u_n(t) - \dfrac{\partial u}{\partial x} a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2$

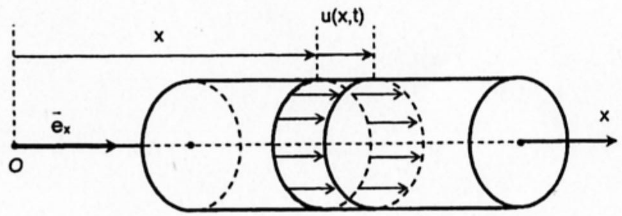
$m \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} a^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{m}{Ka^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

avec $\underline{c} = a\sqrt{\dfrac{K}{m}} = \underline{a\omega_0}$

Correspond à la limite du modèle précédent pour $k \ll \dfrac{\pi}{a}$.

C'est à dire pour $a \ll \lambda$.

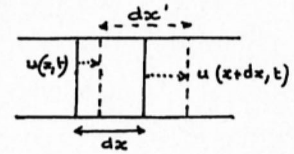
B. Modèle macroscopique et module d'Young.



B.1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ sans dimensions $\rightarrow E \sim \dfrac{\text{Force}}{\text{Surface}} \sim$ pression.

Une section est supposée sans épaisseur, donc de masse nulle.

on a donc $\vec{F_d} + \vec{F_g} = \vec{0}$.



B.2. $dx' = u(x+dx, t) - u(x,t) + dx$

$= dx\left(1 + \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$

$\underline{\delta} = \dfrac{dx'}{dx} - 1 = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

B.3 pour la tranche d'epaisseur dx : $\quad dm = \rho S\, dx$

$\rho S dx \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_g(x) + F_d(x+dx) = -F_d(x) + F_d(x+dx)$

$\rho \cancel{S} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial F_d}{\partial x} = E \cancel{S} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{E}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

avec $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

C. liaison interatomique et module d'Young

$$E_p(r) = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^{10}}$$

C.1*a) $F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{2\lambda}{r^3} + \frac{10\mu}{r^{11}}$

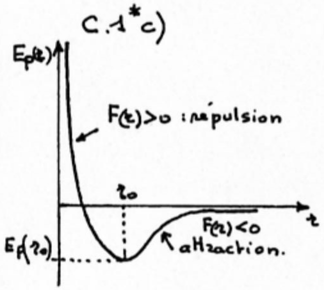
à l'équilibre $F(r_0) = 0 = -\frac{2\lambda}{r_0^3} + \frac{10\mu}{r_0^{11}} \Rightarrow \underline{r_0^8 = \frac{5\mu}{\lambda}}$

C.1*b) $\mu = \frac{0{,}37}{5} \times (0{,}274)^8 = \underline{2{,}35\,10^{-6}\ \text{eV.nm}^{10}}$

$\underline{E_p(r_0)} = \frac{-0{,}37}{(0{,}274)^2} + \frac{2{,}35\,10^{-6}}{(0{,}274)^{10}} = \underline{-3{,}94\ \text{eV}}$

$E_p(r_0)$ représente le puits de potentiel dans lequel se trouve le système A-B à l'équilibre.

C.1*c)



C.2. $F(r) = \underset{0}{F(r_0)} + \left(\frac{dF(r)}{dr}\right)_{r_0} \times r = -Kr$

$\rightarrow K = -\left(\frac{dF(r)}{dr}\right)_{r_0}$

$$\frac{dF(r)}{dr} = +\frac{6\lambda}{r^4} - \frac{110\mu}{r^{12}}$$

$$\underline{K} = -\frac{6\lambda}{r_0^4} + \frac{110\lambda}{5r_0^4} = \underline{\frac{16\lambda}{r_0^4}}.$$

A.N. $\lambda = 0{,}37 \times 1{,}6\,10^{-9} \times 10^{-18}\ \text{J m}^2$ $\underline{K = 10{,}5\ \text{N m}^{-1}}$

C.3*a) $a\sqrt{3} = 2r_0 \rightarrow a = 0{,}316$ nm.

C.3*b) Il y a 2 atomes par maille. $\rho = \frac{2m}{a^3}$

C.4*a) $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{K}{3m}} \times a$ $\frac{Ea^3}{2m} = \frac{Ka^2}{3m}$ $\underline{E = \frac{2K}{3a}}$ (et m ?)

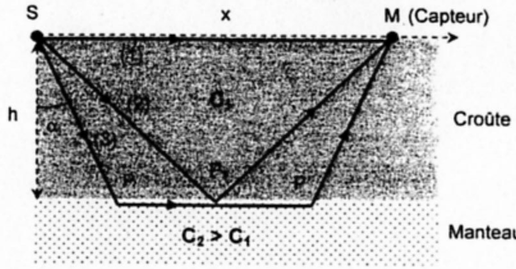
$$\underline{E} = \frac{\cancel{2} \times 16\lambda \times \sqrt{3}}{3 r_0^4 \times \cancel{2} r_0} = \underline{\frac{16\lambda\sqrt{3}}{r_0^5}}$$

C.4*b) $\underline{E = 2{,}21\,10^{10}\ \text{Pa}}$.

→

deuxième partie : Etude des ondes sismiques terrestres

A_ Etude Locale



A.1. $\tau_1 = \frac{x}{c_1}$

A.2. $\tau_2 = \frac{2}{c_1}\sqrt{\frac{x^2}{4} + h^2}$

A.3*a) $\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{1}{c_2}$

détectable si $x > x_m = 2h\tan\alpha$

$\tan\alpha = \frac{c_1/c_2}{\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}}$

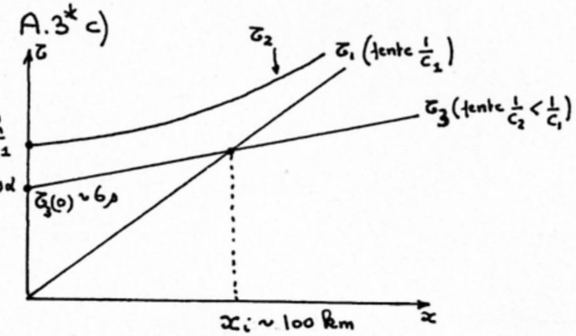
$\Rightarrow \underline{x_m = \frac{2h\, c_1/c_2}{\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}}}$

A.3*b) $\tau_3 = \frac{2h}{\cos\alpha} \times \frac{1}{c_1} + \frac{x - 2h\tan\alpha}{c_2}$

$\tau_3 = \frac{x}{c_2} + \frac{2h}{\cos\alpha}\left[\frac{1}{c_1} - \frac{\sin\alpha}{c_2}\right] = \frac{x}{c_2} + \frac{2h}{\cos\alpha} \times \frac{1}{c_1}\left[1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right]$

$$\underline{\tau_3 = \frac{x}{c_2} + \frac{2h}{c_1}\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}}$$

A.3*c)



A.4. $\underline{c_1 = \frac{x}{\tau_1} \sim \frac{100}{16} = 6{,}25\ \text{km s}^{-1}}$

$\underline{c_2 = \frac{\Delta x}{\Delta \tau_3} \simeq \frac{200}{20} = 10\ \text{km s}^{-1}}$

b) $\frac{2h}{c_1}\left(1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right)^{1/2} \simeq 6\ \text{s} = \tau_3(0)$

$\underline{h = \frac{3c_1}{\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}} = 24\ \text{km}}$

a) $x_i\left[\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right] = \frac{2h}{c_1}\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}$

$\rightarrow \underline{h} = \frac{x_i}{2} \frac{1 - \frac{c_1}{c_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2}} = \frac{x_i}{2}\sqrt{\frac{1 - c_1/c_2}{1 + c_1/c_2}} = \underline{24\ \text{km}}.$

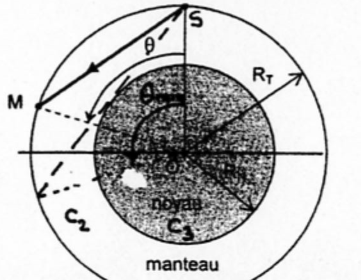
Ces deux résultats sont en excellent accord ! surtout compte tenu de l'inhomogénéité des milieux et de la simplicité du modèle.

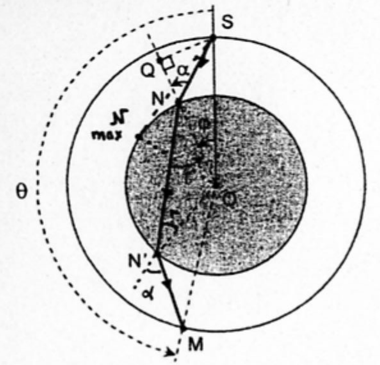
B_ Etude à grande échelle

B.1*a) $\tau = \frac{2R_T \sin\theta/2}{c_2}$

B.1*b) $R_T \cos\frac{\theta_{min}}{2} = R_N$

B.1*c) $R_N = 3{,}85\,10^3$ km.





B.2*.a) Non car $C_3 < C_2$

B.2*. b) φ_{max} correspond à N en N_{max} tel que SN_{max} soit tangent au noyau.

$$\varphi_{max} = \frac{\theta_{min}}{2} = \arccos \frac{R_N}{R_T} = 53°$$

B.2*.c) $SQ = R_T \sin \varphi = SN \sin \alpha$

avec $SN = \sqrt{R_T^2 + R_N^2 - 2 R_T R_N \cos\varphi}$.

d'où $\sin \alpha = \dfrac{R_T \sin\varphi}{\sqrt{R_T^2 + R_N^2 - 2 R_T R_N \cos\varphi}}$.

B.2*d) $\dfrac{\sin\alpha}{C_2} = \dfrac{\sin r}{C_3} \rightarrow r = \text{Arcsin}\left(\dfrac{C_3}{C_2}\sin\alpha\right)$

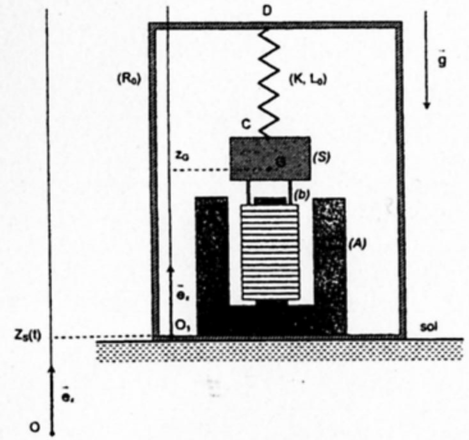
$$\theta = 2\varphi + (ON, ON') = 2\varphi + (\pi - 2r) = 2\varphi + \pi - 2\,\text{Arcsin}\left(\frac{C_3}{C_2}\frac{R_T \sin\varphi}{\sqrt{R_T^2 + R_N^2 - 2R_TR_N\cos\varphi}}\right)$$

B.2*.e) Pour les rayons directs (B.1) $\quad 0 < \theta < 106°$

Pour les rayons SNN'M (B.2) $\quad 146 < \theta < 180°$

On a donc une zone d'ombre $\quad 106 < \theta < 146°$

Troisième partie. Sismographe electromagnétique



A. Bobine en circuit ouvert

A.1. R_0 n'est pas galiléen losque le bati est accéléré /O.

A.2. $\vec{V_e} = \dfrac{dZ_s(t)}{dt}\vec{e_z} \qquad \vec{a_e} = \dfrac{d^2 Z_s(t)}{dt^2}\vec{e_z}$

A.3. $L(t) - L_{eq} = z_{eq} - z_G(t)$ (dans R_0)

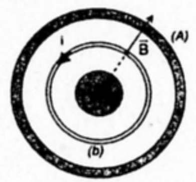
$L(t) = L_{eq} - z(t)$.

A.4. $m\left(\dfrac{d^2 z_G}{dt^2} + \dfrac{d^2 Z_s}{dt^2}\right) = -K\left(L_0 - L(t)\right) - mg$

à l'équilibre $K(L_0 - L_{eq}) = -mg$

$\rightarrow m\left(\dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{d^2 Z_s}{dt^2}\right) = K\left(L(t) - L_{eq}\right)$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{K}{m} z = -\frac{d^2 Z_s}{dt^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$



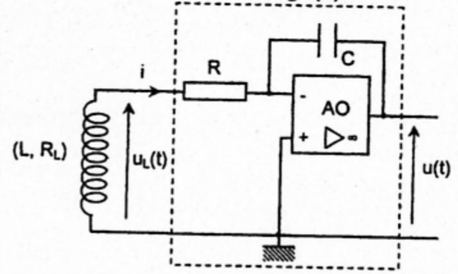
B. Etude du dispositif de détection des vibrations.

B.1. Sur chaque élément de spire $\vec{dF} = -i\,dl\,B\,\vec{e_z}$

$\rightarrow$ sur toute la bobine $\vec{F} = -i\ell B\,\vec{e_z}$

$$\rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{B\ell}{m} i + \omega_0^2 z = -\frac{d^2 Z_s}{dt^2} \quad \rightarrow \gamma = \frac{B\ell}{m}$$

montage (E)



B.2*a) $de = (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{d\ell} = \dfrac{dz}{dt} \times B \times d\ell$

$$\rightarrow e = B\ell \frac{dz}{dt}$$

B.2* b) Couplage electrodynamique par induction ?

$$e = (R_L + R) i + L \frac{di}{dt}$$

B.3*a $\quad B\ell \dfrac{dz}{dt} = (R_L + R) i + L \dfrac{di}{dt}$

$\rightarrow j\omega B\ell\, \underline{z} = (R_L + R + jL\omega)\, \underline{i} \quad \rightarrow j\omega B\ell\, \underline{Z} = (R_L + R + jL\omega)\, \underline{I}$

si $L\omega \ll R_L + R \rightarrow \underline{Z} = \dfrac{R_L + R}{j\omega B\ell}\, \underline{I}$

B.3*. b) Montage intégrateur. $\quad \underline{u_L} = R\,\underline{i} \quad \underline{u} = -\dfrac{1}{jC\omega}\,\underline{i} \rightarrow \underline{U} = -\dfrac{\underline{U_L}}{jRC\omega}$

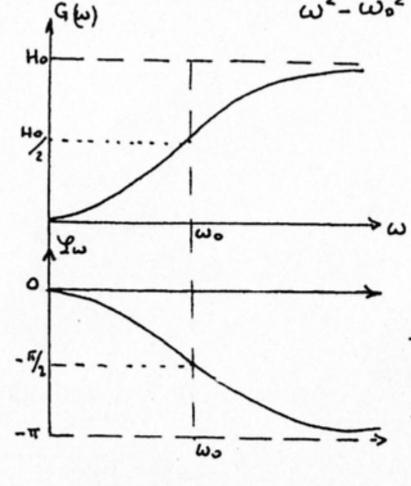
B.3*c) $(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{Z} + \dfrac{B\ell}{m} \times \dfrac{j\omega B\ell}{R_L + R}\, \underline{Z} = +\omega^2 Z_0$

$\rightarrow \dfrac{\underline{Z}}{Z_0} = \dfrac{+\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \dfrac{B^2\ell^2}{m(R_L + R)}} \qquad u = -\dfrac{1}{jC\omega} \times \dfrac{j\omega B\ell}{R_L + R}\,\underline{Z} = -\dfrac{B\ell}{C(R_L + R)}\,\underline{Z}$

$$\rightarrow \frac{\underline{U}}{Z_0} = -\frac{B\ell}{C(R_L + R)} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \dfrac{B^2\ell^2}{m(R_L + R)}} \rightarrow \begin{cases} H_0 = \dfrac{B\ell}{C(R_L + R)} \\ \lambda = \dfrac{B^2\ell^2}{2m(R_L + R)} \end{cases}$$

B.4*a) $\lambda = \omega_0 \rightarrow G(\omega) = H_0 \dfrac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_0^2\omega^2}} = H_0 \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 + \omega^2}$

$\tan \varphi(\omega) = \dfrac{2\,\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \qquad$ avec $\cos\varphi(\omega)$ du signe de $\omega_0^2 - \omega^2$



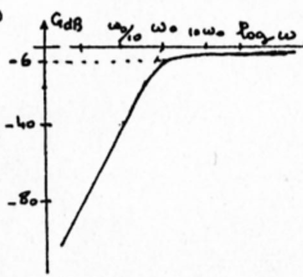
B.4*b) Filtre passe haut

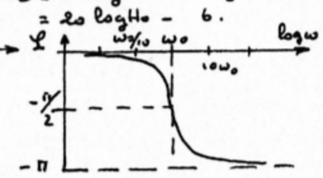
$G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log H_0 + 40 \log\omega - 20 \log(\omega_0^2 + \omega^2)$

pour $\omega > 10\omega_0 \quad G_{dB} = 20 \log H_0 = c^{te}$.

$\omega < 10\omega_0 \quad G_{dB} = 20 \log H_0 + 40 \log\omega - 40 \log\omega_0$

$\omega = \omega_0 \quad G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log 2$
$= 20 \log H_0 - 6$.





B.5*a) ω_0 doit être faible. $\longrightarrow$ K faible et m grande

B.5*b) $\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2+\omega^2} = 0,99 \longrightarrow 0,01\,\omega^2 \# \omega_0^2$ $\quad \omega_0 = \dfrac{\omega}{10} \rightarrow \underline{f > 10 f_0}$

B.5*c) $f_H = 0,1$ Hz

B.5*d) $0,1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}} \longrightarrow m = \dfrac{K}{(0,2\pi)^2} = 12,6$ Tonnes ?????

(j'émets des doutes sur la valeur de K !)