

ÉPREUVE DE PHYSIQUE MPI

Écoles Normales Supérieures de Paris, Lyon, Cachan

Session 2006 — Durée : 5 heures

1 L'expérience de diffusion de Rutherford

1.1 Questions préliminaires

1.— $\vec{f}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$ est la loi de force de Coulomb, où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide.

2.— Les symétries du champ électrostatique sont les mêmes que celles des charges qui lui donnent naissance (le champ \vec{E} est un vecteur polaire). Tout plan contenant $M_1 M_2$ est plan de symétrie des charges donc $\vec{E}(M_2)$ est contenu dans chacun de ces plans et $\vec{E}(M_2) = E(M_2) \vec{u}$. Le champ créé par q_1 est, comme q_1 invariant par toute rotation de centre M_1 et $E(M_2) = E(r)$.

Le théorème de Gauss, appliqué à une sphère (\mathcal{S}) de centre M_1 et de rayon r , impose $\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q_1}{\epsilon_0}$, au moins tant que M_2 est extérieur à q_1 ; on a

par ailleurs pour flux du champ $\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 E(r)$ et on retrouve bien le résultat demandé, $\vec{f}_2 = q_2 \vec{E}(M_2)$

garde la même expression $\vec{f}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}$ que dans le cas précédent.

3.— On définit l'énergie potentielle E_p par $dE_p = -\delta W$ où le travail des deux forces \vec{f}_2 (exercée sur q_2) et $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ (exercée sur q_1) est $\delta W = \vec{f}_2 \cdot d(\overline{OM}_2 - \overline{OM}_1)$ qui s'écrit aussi $\delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d(r\vec{u})$ où on sait que $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$ puisque $\vec{u}^2 = 1$; on a donc $\delta W = \frac{q_1 q_2 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ qui, compte tenu de la condition limite imposée, s'intègre

$$\text{en } E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

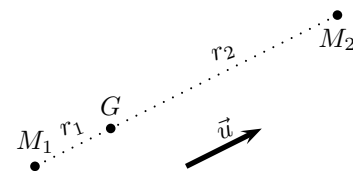
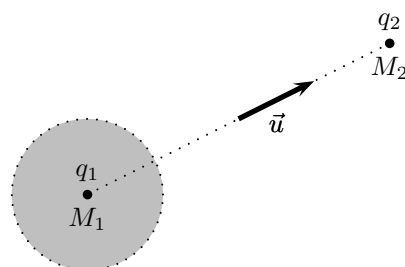
4.— Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système isolé formé des deux particules en interaction impose $(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$ où la dérivée est calculée dans un référentiel galiléen ; le mouvement de G dans ce référentiel étant rectiligne et uniforme, le référentiel barycentrique (qui est par définition en translation à la vitesse \vec{v}_G) est galiléen.

5.— Notons $\overline{GM}_1} = -r_1 \vec{u}$ et $\overline{GM}_2} = r_2 \vec{u}$; on a alors $r = r_1 + r_2$ et (par définition de G) $m_1 r_1 = m_2 r_2$. on en déduit $r_2 = \frac{\mu}{m_2} r$ où on a posé par définition

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ donc } m_2 \frac{d^2 \overline{GM}_2}{dt^2} = \vec{f}_2 \text{ (qui est le principe fondamental de la dy-$$

namique écrit dans le référentiel barycentrique, galiléen) devient $\mu \frac{d^2 \overline{GM}}{dt^2} = \vec{f}_2$;

tout se passe comme si une particule fictive située en M et de masse μ subissait la force \vec{f}_2 . Le mouvement de M permet de déterminer les mouvements de M_2 et M_1 par homothétie puisque $\overline{GM}_2} = \frac{\mu}{m_2} \overline{GM}$ et $\overline{GM}_1} = -\frac{\mu}{m_1} \overline{GM}$.

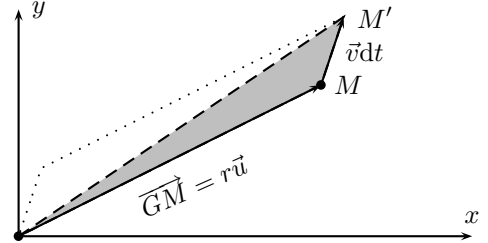


6.— La force \vec{f}_2 est centrale; notant $\vec{v} = \frac{d\vec{GM}}{dt}$ et $\vec{\sigma}_G = \mu\vec{GM} \wedge \vec{v}$, le théorème du moment cinétique au point (fixe) G impose $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{GM} \wedge \vec{f}_2 = \vec{0}$ et \vec{GM} reste perpendiculaire au vecteur constant $\vec{\sigma}_G$: le mouvement de M est plan dans un plan passant par G et perpendiculaire à $\vec{\sigma}_G$.

7.— $\vec{\sigma}_G = \mu r \vec{u} \wedge (\dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{u}') = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ où $\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire du plan (Gxy) directement perpendiculaire à \vec{u} (vecteur unitaire orthoradial) donc $\vec{\sigma}_G = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ est constant ce qui impose que $C = r^2 \dot{\theta}$ est constant au cours du mouvement.

8.— L'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{GM} = r\vec{u}$ pendant la durée dt est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur G, M, M' avec $\vec{MM}' = \vec{v}dt$. Si on oriente positivement cette aire $d\mathcal{A}$ pour un parcours dans le sens trigonométrique, et notant $d\vec{\mathcal{A}} = d\mathcal{A}\vec{e}_z$;

il vient $d\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}r\vec{u} \wedge \vec{v}dt$ donc $\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} = \frac{C}{2}\vec{e}_z$; la grandeur $\frac{C}{2}$ est la vitesse aréolaire de parcours de sa trajectoire par M (et non la constante des aires, terme qui désigne habituellement C).



9.— L'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2$ s'exprime en remarquant que $\vec{v}_i = \frac{d\vec{GM}_i}{dt}$ donc $\vec{v}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\vec{v}$ et $\vec{v}_2 = \frac{\mu}{m_2}\vec{v}$; après calculs, on trouve $E_c = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)$ compte tenu de $\dot{\theta} = C/r^2$. On a vu que

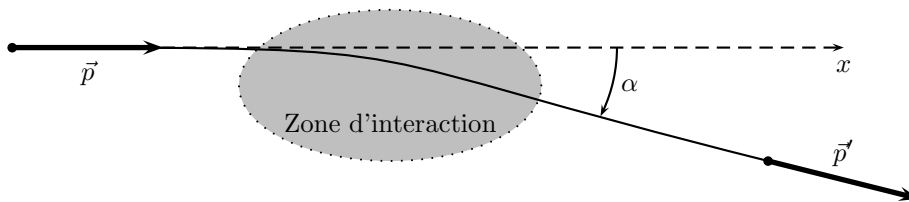
l'énergie potentielle du même système est $E_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ donc on écrira l'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ en

fonction de l'énergie potentielle effective $U(r)$ selon $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r)$ avec $U(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mu C^2}{2r^2}$.

1.2 La diffusion d'un faisceau de particules alpha par les atomes d'une fine feuille d'or

1.2.1 Interaction d'une particule alpha avec les électrons des atomes d'or

10.— Dans l'interaction avec l'électron, la particule α perd $\Delta\vec{p}$ et on peut écrire après le « choc » $\vec{p}' = \vec{p} - \Delta\vec{p}$. On a donc, au second ordre près, $p'^2 = p^2 - 2\vec{p} \cdot \Delta\vec{p}$ qui s'écrit encore $p'^2 = p^2 \left(1 - 2\frac{\Delta p_x}{p}\right)$ et, au même ordre, $p' = p \left(1 - \frac{\Delta p_x}{p}\right)$.



Toujours à l'ordre deux près, $\Delta p^2 = 0 = (\vec{p}' - \vec{p})^2$ impose $p'^2 + p^2 - 2pp' \cos \alpha = 0$ soit après développement $\cos \alpha = 1$: au premier ordre en Δp_x , la trajectoire n'est pas modifiée par l'interaction, la particule α est seulement ralentie.

11.— Le système formé de la particule α et de l'électron est isolé; si la particule α perd $\Delta\vec{p}$, l'électron gagne $\Delta\vec{p}$. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule α s'écrit $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$ avec pour constante des aires $C = \vec{e}_z \cdot (\vec{r} \wedge \vec{v})$ qui, calculé à l'instant initial (longtemps avant l'interaction) fournit $C = -bv_0$; on peut donc écrire $d\vec{p} = -\frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 C}\vec{u}d\theta = \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 bv_0}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)d\theta$ et il vient dans le cadre de

cette approximation $-\Delta\vec{p} = \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 bv_0} \int_\pi^0 (\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)d\theta$ donc $\Delta\vec{p} = -\frac{Z_\alpha e^2}{2\pi\epsilon_0 bv_0}\vec{e}_y$ dans le cadre de cette approximation (électron fixe).

12.— Dans les mêmes conditions d'approximation, la variation d'énergie cinétique de l'électron prend l'expression $\Delta E_c = E_{c,\text{final}} - 0 = \frac{\Delta \vec{p}^2}{2m_e}$ vaut $\Delta E_c = \frac{Z_\alpha^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 b^2 v_0^2 m_e}$.

13.— Il y a $\frac{Z_{\text{Au}} \rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}} = 4,7 \times 10^{30}$ électrons par mètre cube soit une distance moyenne (dans une répartition spatiale cubique de côté \bar{d}) entre électrons $\bar{d} = \left(\frac{m_{\text{Au}}}{Z_{\text{Au}} \rho_{\text{Au}}} \right)^{\frac{1}{3}} = 6,0 \times 10^{-11}$ m et le paramètre d'impact « moyen » $\bar{b} = 3,0 \times 10^{-11}$ m. Par ailleurs, la vitesse des particules α est $v_0 = 1,9 \times 10^7$ m·s⁻¹ (on en remarque le caractère quasi-relativiste même si on poursuit l'étude dans le cadre de la dynamique classique).

Considérant alors que l'essentiel de l'interaction a lieu à la distance \bar{b} entre électron et particule α , il vient $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ donc $-\frac{2_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 \bar{b}^2} \vec{e}_y \sim \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ d'où une durée d'interaction $\Delta t \sim \frac{2\bar{b}}{v_0}$ et, pendant ce temps, un déplacement de

l'électron de l'ordre de $\frac{\vec{f}_2}{2m_e} \Delta t^2 = -\Delta y \vec{e}_y$ avec $\Delta y \sim \frac{Z_\alpha e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e v_0^2} = 2,7 \times 10^{-12}$ m ou $\frac{\Delta y}{\bar{b}} \sim 0,1$: l'électron a donc peu de temps pour se déplacer et son déplacement n'est au maximum que 10% de la distance moyenne entre deux électrons. Ceci valide l'hypothèse (i) : en première approximation, l'électron reste fixe.

Par ailleurs, on calcule immédiatement $\frac{\|\Delta \vec{p}\|}{m_\alpha v_0} = \frac{Z_\alpha e^2}{2\pi\epsilon_0 m_\alpha v_0^2 \bar{b}} = 1,2 \times 10^{-5} \ll 1$: ceci valide l'hypothèse (ii) avec une excellente précision, la quantité de mouvement cédée par la particule α à l'électron reste très faible.

14.— Le système est isolé donc la quantité de mouvement totale reste constante et on peut écrire $\vec{p} = \vec{p}' + \Delta \vec{p}$ avec les mêmes notations que précédemment.

Le système est aussi conservatif et les énergies potentielles d'interaction initiale et finale sont nulles ce qui permet d'écrire la conservation de l'énergie cinétique, $\frac{\vec{p}^2}{2m_\alpha} = \frac{\vec{p}'^2}{2m_\alpha} + \frac{\Delta \vec{p}^2}{2m_e}$. Éliminant \vec{p}'^2 entre ces deux

équations, il vient $\Delta \vec{p}^2 \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_e} \right) = 2\vec{p} \cdot \Delta \vec{p}$ ou, en notant θ l'angle $(\vec{p}, \Delta \vec{p})$ et p et Δp les normes de \vec{p} et $\Delta \vec{p}$, $\Delta p = \frac{2m_e p}{m_e + m_\alpha} |\cos \theta|$.

On en déduit que Δp (ainsi que ΔE_c) sera maximal si $|\cos \theta| = 1$ donc si $\theta = 0$: ΔE_c est maximal si l'électron est heurté en choc frontal par la particule α et $\Delta p_{\text{max}} = \frac{2m_e p}{m_e + m_\alpha} \simeq \frac{2m_e m_\alpha v_0}{m_\alpha}$ donc le transfert maximal d'énergie cinétique est $\Delta E_{c,\text{max}} = 2m_e v_0^2$.

15.— $\Delta E_c = \frac{Z_\alpha^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 v_0^2 m_e b^2}$ est une fonction décroissante de b donc $\Delta E_{c,\text{max}}$ correspond à b_{min} avec $2m_e v_0^2 = \frac{Z_\alpha^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 v_0^2 m_e b_{\text{min}}^2}$ donc $b_{\text{min}} = \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2} = 1,4 \times 10^{-12}$ m.

16.— De la même façon, $\Delta E_{\text{min}} = I_{\text{Au}}$ car, en dessous de cette valeur de transfert d'énergie, l'électron reste lié à l'atome d'or auquel il appartient ; on ne s'intéresserait alors plus à la diffusion par un électron unique, mais à l'interaction avec l'atome d'or lui-même, qui est étudiée plus loin. $\Delta E_{c,\text{min}}$ correspond donc à b_{max} qui vérifie

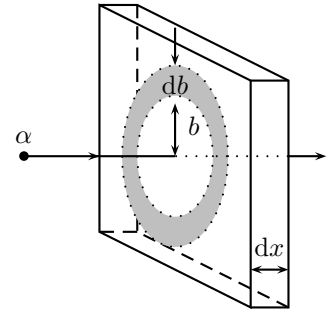
$$b_{\text{max}} = \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 v_0} \sqrt{\frac{2}{m_e I_{\text{Au}}}} = 3,0 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

17.— Le nombre dN_e demandé est le nombre des électrons situés à une distance de la trajectoire de la particule α comprise entre b et $b + db$ donc dans le volume $d\tau = 2\pi b db dx$ à raison de $\frac{Z_{\text{Au}} \rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}}$ électrons par unité de volume, donc on en

$$\text{dédit } dN_e = \frac{Z_{\text{Au}} \rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}} 2\pi b db dx.$$

18.— La variation d'énergie cinétique s'écrit $d^2 E_c = -dN_e \Delta E_c$ pour une valeur de b fixée, donc aussi $\frac{d^2 E_c}{dx} = -\frac{Z_{\text{Au}} Z_\alpha^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 v_0^2 m_e} \frac{\rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}} \frac{db}{b}$ ou, après intégration sur toutes

$$\text{les valeurs admissibles de } b, \frac{dE_c}{dx} = -\frac{Z_{\text{Au}} Z_\alpha^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 v_0^2 m_e} \frac{\rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}} \ln \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}.$$



19.— On obtient $-\frac{dE_c}{dx} = 2,8 \times 10^{-8} \text{ J}\cdot\text{m}^{-1}$ donc $-\frac{dE_c}{dx} = 0,18 \text{ MeV}\cdot\mu\text{m}^{-1}$ pour le transfert d'énergie des particules α aux électrons, ceux-ci étant excités au moins assez pour quitter leur atome (ionisation).

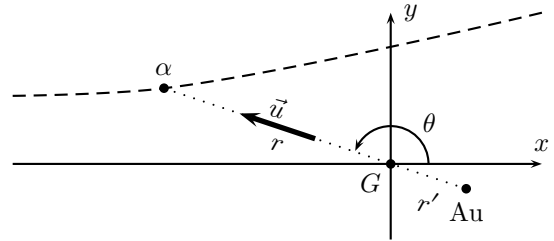
20.— Pour une épaisseur $\ell = 0,5 \mu\text{m}$, la perte d'énergie des particules α est $\Delta E_0 = \frac{dE_c}{dx} \ell = -90 \text{ keV}$.

21.— $\frac{\Delta E_0}{E_0} = -1,2\%$ donc on peut, au moins en première approximation, négliger l'interaction des particules α avec les électrons.

1.2.2 Interaction d'une particule alpha avec un noyau d'or

22.— Par définition de G , $\frac{r'}{r} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_{\text{Au}}} = 2,0 \times 10^{-2}$ donc

on peut (à 2% près) confondre les positions du noyau de l'atome d'or et du centre d'inertie G du système. Par ailleurs, le système étant considéré ici comme globalement isolé lors de cette interaction, le centre de masse G est immobile dans le référentiel galiléen étudié. Compte tenu de l'approximation précédente, le noyau d'or reste donc quasiment immobile



dans les mêmes conditions d'approximation. On remarque qu'on néglige ici les interactions de l'atome d'or au sein du réseau cristallin métallique de la feuille d'or servant de cible au faisceau.

23.— Dans le cas d'une force newtonienne répulsive ($q_1 q_2 = Z_\alpha Z_{\text{Au}} e^2 > 0$ ici), on sait que la trajectoire est une branche d'hyperbole dont G est un des foyers.

24.— $r(t)$ est minimal quand sa dérivée est nulle donc quand $\vec{v} \cdot \vec{u} = \dot{r} = 0$. Les lois de conservation (entre le début du mouvement et la position de distance minimale r_{\min}) imposent alors $\frac{1}{2} m_\alpha v_0^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_\theta^2 + \frac{Z_\alpha Z_{\text{Au}} e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}$ pour la conservation de l'énergie mécanique (où la vitesse au point de distance minimale est $\vec{v} = v_\theta \vec{u}'$), et $m_\alpha b v_0 = -m_\alpha r_{\min} v_\theta$ pour celle du moment cinétique (puisque au point de distance minimale, $\vec{r}' \wedge \vec{v} = r_{\min} \vec{u}' \wedge v_\theta \vec{u}'$ donc $\vec{r}' \wedge \vec{v} = r_{\min} v_\theta \vec{e}_z$ tandis qu'on a déjà vu que, longtemps avant le début de l'interaction, $\vec{r}' \wedge \vec{v} = -b v_0 \vec{e}_z$).

On élimine v_θ entre ces équations pour obtenir $m_\alpha v_0^2 - \frac{Z_\alpha Z_{\text{Au}} e^2}{2\pi\epsilon_0 r_{\min}} - m_\alpha v_0^2 \frac{b^2}{r_{\min}^2} = 0$ qui prend aussi la forme de l'équation du second degré $r_{\min}^2 - a_0 r_{\min} - b^2 = 0$. Cette équation admet toujours une unique racine positive qui est évidemment la distance minimale d'approche entre particule α et noyau d'or sur une trajectoire donnée

(et donc pour un paramètre d'impact b donné) $r_{\min} = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4b^2}}{2}$.

25.— a_0 étant donné par les caractéristiques du faisceau de particules α incidentes, seul b est variable (de manière quasiment aléatoire) dans ce faisceau; la distance minimale d'approche d est donc $d = \min_{b \geq 0} (r_{\min}(b))$ et

correspond donc à $b = 0$ (« choc frontal ») donc $d = a_0 = 3,0 \times 10^{-14} \text{ m}$. On remarquera que cette distance (30 fm) est légèrement supérieure aux rayons additionnés des noyaux d'or et d'hélium ($< 10 \text{ fm}$) ce qui assure l'absence d'interaction nucléaire au moment de la diffusion : l'expérience proposée ici décrit une diffusion sous l'action de forces purement électromagnétiques.

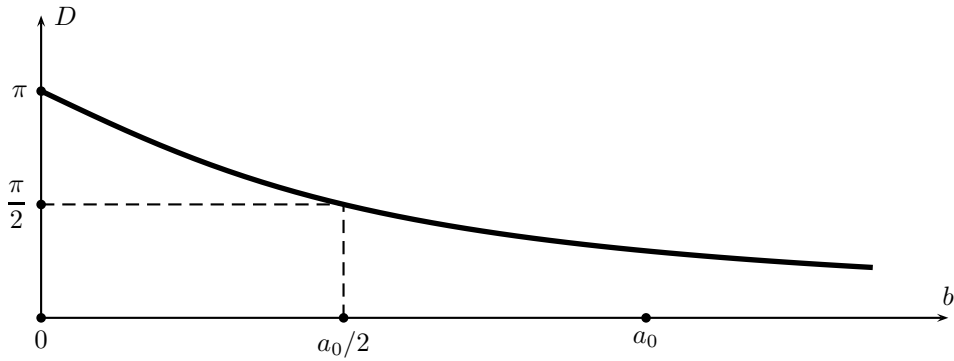
26.— Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{Z_\alpha Z_{\text{Au}} e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$ soit, compte tenu de la définition

de a_0 et vu que $C = -b v_0 = r^2 \dot{\theta}$, $m_\alpha \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{E_0 a_0 \dot{\theta}}{b v_0} \vec{u}$ dont la projection sur \vec{e}_y s'écrit $dv_y = -\frac{v_0}{2b} \sin \theta d\theta$ qui s'intègre entre ($\theta = \pi, v_y = 0$) avant la diffusion et ($\theta = D, v_y = v_0 \sin D$) après celle-ci en fournissant

$\sin D = \frac{a_0}{2b} (1 + \cos D)$ ou encore, au moyen des transformations trigonométriques usuelles, $\tan \frac{D}{2} = \frac{a_0}{2b}$.

27.— La fonction décrivant $D(b)$ est monotone décroissante avec les trois valeurs particulières $D(b=0) = \pi$

(choc frontal, retour en arrière du projectile), $D(b_0 = a_0/2) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{b \rightarrow \infty} D(b) = 0$ (passage du projectile à très grande distance, absence d'interaction donc de déviation). La courbe représentative de $D(b)$ est tracée ci-après.



1.2.3 Diffusion d'un faisceau de particules alpha par les noyaux d'or

28.— L'interaction des particules α avec des molécules de gaz arrêterait le faisceau ou (en fonction de la densité du gaz), au moins, perturberait les trajectoires des projectiles de part et d'autre de la feuille d'or, diminuant la précision de la méthode :

- en introduisant des variations dans la norme et la direction de la vitesse initiale des particules α ;
- en introduisant des erreurs dans la détermination des angles de déviation D .

et on doit donc assurer un vide aussi poussé que possible.

29.— On a vu que les paramètres d'impact correspondant à des déviations significatives sont associées à des valeurs de b faibles, $b \leq a_0/2$ par exemple. Prenant de manière beaucoup plus généreuse la condition $0 \leq b \leq 10a_0$, les particules α qui vérifient cette condition traversent un cylindre centré sur un noyau d'or, de rayon $10a_0$ et d'épaisseur ℓ ; elles y rencontrent donc en moyenne $N = \frac{\rho_{\text{Au}}}{m_{\text{Au}}} \pi (10a_0)^2 \ell = 8 \times 10^{-3}$ noyaux d'or ; la probabilité d'en rencontrer (à une distance inférieure à $10a_0$) deux ou plus sur cette même trajectoire est donc extrêmement faible.

Avec une feuille d'épaisseur $\ell' = 1$ mm, le même calcul mène à $N \simeq 16$; cette fois-ci au contraire, ce sont donc les diffusions multiples qui sont les plus probables.

On pourra remarquer que le choix du matériau (l'or) dans l'expérience de Rutherford est conditionné par la nécessité de réaliser des feuilles de très faible épaisseur, indispensables à l'étude de diffusions simples qui sont les seules susceptibles d'une mise en équation complète.

30.— L'existence de grandes valeurs de D ($D > \pi/2$ jusqu'à $D = \pi$ avec rétrodiffusion des particules α) correspond dans ce qui précède à de faibles valeurs de b et de la distance minimale d'approche : les particules α peuvent donc accéder à des distances faibles du noyau atomique, ce qui montre une structure lacunaire des atomes, l'essentiel de leur masse étant concentrée de manière quasi-ponctuelle.

Signalons d'ailleurs que, pour des énergies du faisceau incident assez élevées, la même méthode permet d'accéder à une mesure du rayon de ces noyaux atomiques : on observera un écart aux prévisions théoriques de la diffusion newtonienne pour des angles $D > D_1$ tels que $d < d_1$ avec $d_1 = r_{\text{Au}} + r_{\alpha}$, somme des rayons nucléaires des particules α et de l'or.

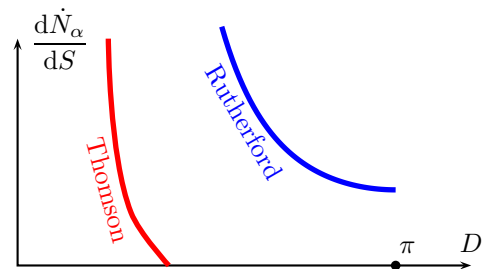
31.— La surface de la couronne circulaire est $dS_{\alpha} = d\varphi b db$ où $d\varphi$ représente l'ouverture angulaire autour de l'axe du faisceau incident. De même, dS est une surface tracée sur un cercle de rayon R et d'angles sphériques D et φ donc $dS = R^2 \sin D d\varphi dD$. On a par ailleurs $b = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\tan \frac{D}{2}}$ donc $db = \left| \frac{db}{dD} \right| dD = \frac{a_0}{4 \sin^2 \frac{D}{2}} dD$; il vient

donc après simplifications $dS_{\alpha} = \frac{a_0^2}{16R^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{D}{2}} dS$.

32.— Φ_{α} étant le flux de particules α par unité de surface et de temps dans le faisceau incident, on aura $d\dot{N}_{\alpha} = \Phi_{\alpha} dS_{\alpha}$ soit

$\frac{d\dot{N}_{\alpha}}{dS} = \Phi_{\alpha} \frac{a_0^2}{16R^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{D}{2}}$. Il y a incompatibilité entre cette expres-

sion (qui prévoit une limite non nulle pour $D \rightarrow \pi$) et le modèle de Thomson qui prévoit une annulation rapide de $\frac{d\dot{N}_{\alpha}}{dS}$ dès que $D \gtrsim 0$ (cf. ci-contre).



33.— Si $D \rightarrow 0$, $\frac{d\dot{N}_{\alpha}}{dS} \rightarrow \infty$ dans le modèle ci-dessus ; cette limite n'a pas de sens physique. L'origine de cette divergence est le caractère supposé infini (dans la direction transverse) du faisceau de particules α et de

la feuille d'or : la grande majorité des particules α ne sont pas déviées et on retrouve, dans la direction $D = 0$, toutes les particules qui traversent la feuille d'or sans interagir avec un noyau d'or. En réalité, ces particules seront en nombre fini et on n'observera pas de divergence pour $D \rightarrow 0$, mais seulement une zone d'impacts très nombreux.

2 La diffusion d'une onde électromagnétique par une assemblée de molécules identiques

2.1 Généralités

34.— On se place dans [l'approximation dipolaire], définie par $R \gg a$ où a est la plus grande dimension du dipôle, c'est-à-dire l'excursion spatiale des électrons de la molécule. On peut aussi écrire $a = \max(OP)$ si P est la position d'une charge mobile.

Pour la suite des calculs des champs \vec{E} et \vec{B} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ rayonnés, on se place de plus dans la [zone de rayonnement] (approximation de Fraunhofer) définie par $R \gg \lambda$. En pratique, cette seconde condition $R \gg 500 \text{ nm}$ est plus restrictive que la précédente ($R \gg 0,1 \text{ nm}$).

35.— Le calcul de $\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{p}_1(t-R/c)}{R} = \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \dot{\vec{p}}_1(t-R/c)}{R} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \dot{\vec{p}}_1(t-R/c)$ fait intervenir deux termes d'ordres de grandeur très différents puisque $\|\overrightarrow{\text{rot}} \dot{\vec{p}}_1\| \simeq \frac{\omega}{c} |\dot{p}_1|$ (en dérivant ce vecteur comme une onde quasi-plane) tandis que $\|\overrightarrow{\text{grad}}(1/R)\| = \frac{1}{R^2}$ donc le premier terme $\frac{\overrightarrow{\text{rot}} \dot{\vec{p}}_1(t-R/c)}{R}$, qui est de l'ordre de grandeur de $\frac{\omega}{c} \frac{|\dot{p}_1|}{R} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{|\dot{p}_1|}{R}$, est nettement prépondérant devant le second terme $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \dot{\vec{p}}_1(t-R/c)$ qui, lui, est de l'ordre de grandeur de $\frac{|\dot{p}_1|}{R^2}$, puisque $[R \gg \lambda]$.

On calculera donc $\overrightarrow{\text{rot}} \dot{\vec{p}}_1(t-R/c)$ en utilisant la notation complexe pour cette onde sphérique mais quasi-plane dans la zone de rayonnement, $\vec{p}_1 = \vec{p}_{01} \exp(-i\omega(t-R/c))$ donc aussi $\dot{\vec{p}}_1 = -i\omega \vec{p}_{01} \exp(-i\omega(t-R/c))$ et encore $\overrightarrow{\text{rot}} \dot{\vec{p}}_1 = ik\vec{n} \wedge -i\omega \vec{p}_{01} \exp(-i\omega(t-R/c))$; compte tenu que $k = \frac{\omega}{c}$, ce résultat peut enfin se mettre sous la forme $\overrightarrow{\text{rot}} \dot{\vec{p}}_1 = \frac{\omega^2}{c} \vec{n} \wedge \vec{p}_1 = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \ddot{\vec{p}}_1$ donc $\vec{B}_1 = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1$ s'écrit $\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi c R} \ddot{\vec{p}}_1(t-R/c) \wedge \vec{n}}$.

36.— Le champ \vec{B}_1 est proportionnelle à $\exp(-i\omega(t-R/c)) = \exp\left[I(\vec{k} \cdot R\vec{n} - \omega t)\right]$ à condition de poser $\boxed{\vec{k}_{\text{diff}} = k\vec{n}}$ pour le vecteur d'onde de l'onde diffusée, qui est donc une onde sphérique considérée comme [quasi-plane] dans la zone de rayonnement.

37.— L'équation de Maxwell-Ampère dans le vide impose $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ donc ici en notation complexe $Ik\vec{n} \wedge \vec{B}_1 = -i\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_1$ donc $\vec{E}_1 = -c\vec{n} \wedge \vec{B}_1$ qu'on écrira $\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi R} \vec{n} \wedge \left(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{p}}_1(t-R/c) \right)}$.

38.— On peut proposer une analyse dimensionnelle sous la forme $[4\pi\epsilon_0 E] = [q/r^2]$ tandis que $[p] = [qr]$ pour montrer que $\boxed{\alpha \text{ est un volume}}$ qui se mesure en mètres cubes. On peut donc ici imaginer que α est de l'ordre de grandeur des volumes atomiques ou moléculaires, soit $\boxed{\alpha \sim 10^{-30} \text{ m}^3}$.

39.— $\vec{B}_{\text{diff}} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \sum_{j=1}^N \frac{\ddot{\vec{p}}_j(\tau_j) \wedge \vec{n}_j}{R_j}$ où on a posé $\vec{R}_j = \vec{R} - \vec{r}_j$, $R_j = \|\vec{R}_j\|$, $\tau_j = t - \frac{R_j}{c}$ et $\vec{n}_j = \frac{\vec{R}_j}{R_j}$. Compte tenu de la proximité des différentes molécules ($\|\vec{r}_j\| \ll R$), on considérera que tous les termes dépendant de j en sont indépendants [sauf] dans la fonction $\ddot{\vec{p}}_j(\tau_j)$ puisque cette fonction varie avec la pulsation spatiale $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ très élevée : le passage d'une molécule à une autre sur une distance de l'ordre de $h = 0,1 \mu\text{m}$ pouvant alors provoquer une variation de $\omega\tau_j$ de l'ordre de $\frac{2\pi}{\lambda} h \sim \frac{2\pi}{5}$, donc une variation très significative de $\ddot{\vec{p}}_j(\tau_j)$.

On écrira donc $\vec{B}_{\text{diff}} = \frac{\mu_0}{4\pi c R} \left(\sum_{j=1}^N \ddot{\vec{p}}_j(\tau_j) \right) \wedge \vec{n}$ avec $\vec{p}_j(\tau_j) = 4\pi\epsilon_0 \alpha E_0 \vec{e} \exp\left[I(\vec{k} \cdot \vec{r}_j - \omega(t-R_j/c))\right]$. À l'ordre le plus bas, $\vec{R}_j = \vec{R} - \vec{r}_j$ impose $R_j^2 \simeq R^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}_j = R^2 \left(1 - 2\frac{\vec{r}_j \cdot \vec{n}}{R}\right)$ donc $R_j \simeq R \left(1 - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{n}}{R}\right)$ qui

permet d'écrire $\vec{B}_{\text{diff}} = -\frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \alpha E_0}{cR} \exp \left[I\omega \left(\frac{R}{c} - t \right) \right] \vec{\epsilon} \wedge \vec{n} \sum_{j=1}^N \exp \left[I \left(\vec{k} \cdot \vec{r}_j - k\vec{n} \cdot \vec{r}_j \right) \right]$ qui prend bien la

forme demandée $\vec{B}_{\text{diff}} = \vec{B}_1 \mathcal{F}(\vec{Q})$ avec $\mathcal{F}(\vec{Q}) = \sum_{j=1}^N \exp \left(-I\vec{Q} \cdot \vec{r}_j \right)$ et $\vec{Q} = k\vec{n} - \vec{k}$ puisqu'on reconnaît, dans le

cas $N = 1$ et $\vec{r}_1 = \vec{0}$ le champ $\vec{B}_1 = -\frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \alpha E_0}{cR} \exp \left[I\omega \left(\frac{R}{c} - t \right) \right] \vec{\epsilon} \wedge \vec{n}$ précédent.

40.— $\vec{Q} = k\vec{n} - \vec{k}$ donc $Q^2 = k^2 + k^2 - 2k^2 \vec{n} \cdot \vec{u}$ où Θ est l'angle (\vec{u}, \vec{n}) donc $Q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$ qui s'écrit

finalement
$$Q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\Theta}{2}.$$

41.— $\mathcal{F}(\vec{Q})$ est un facteur décrivant les **interférences** entre les N ondes diffusées par les différentes molécules prises en compte. Ce terme d'interférences est calculé au point M situé à très grande distance et on retrouve naturellement un terme d'interférences du type du calcul de Fraunhofer (pour une intégrale de diffraction) avec $\vec{Q} \cdot \vec{r}_j = \frac{2\pi}{\lambda} \overrightarrow{OP}_j \cdot (\vec{u}_{\text{diff}} - \vec{u}_{\text{inc}})$.

42.— Observant toujours en M une onde quasi-plane, modulée seulement par le terme d'interférences $\mathcal{F}(\vec{Q})$, on écrira $\vec{E}_{\text{diff}} = \vec{E}_1(M, t) \mathcal{F}(\vec{Q})$.

2.2 Diffusion de la lumière par les molécules d'un gaz parfait

43.— Si on choisit par convention $\lambda \in [400 \text{ nm} ; 750 \text{ nm}]$ pour la lumière visible, avec $\lambda = \frac{c}{f}$ on en déduit l'intervalle de fréquence $f \in [4,0 \times 10^{14} \text{ Hz} ; 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}]$.

44.— La vitesse quadratique moyenne est $v = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ puisque l'énergie cinétique moyenne d'une molécule $\frac{1}{2} \frac{M}{\mathcal{N}_A} v^2$ est égale à $\frac{3}{2} k_B T$ (trois degrés de liberté de translation à raison de $1/2 k_B T$ par degré de liberté) où $k_B = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{N}_A}$ est la constante de Boltzmann et \mathcal{N}_A la constante d'Avogadro. Dans le cas proposé ici, on trouve $v = 510 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut donc estimer le déplacement vT des molécules pendant une période de l'onde incidente à $\frac{v}{f} \simeq 1,3 \times 10^{-12} \text{ m}$ au maximum, soit moins d'un centième du rayon des plus petites molécules. On en conclura que les molécules du gaz sont **immobiles** du point de vue de l'onde incidente.

45.— Ici, $v \times \frac{1}{16} \text{ s} \simeq 32 \text{ m}$ est certainement supérieur au libre parcours moyen des molécules dans le gaz : pendant la durée caractéristique d'analyse de la lumière par l'œil, les molécules du gaz ont un **déplacement important** et formé d'une suite quasi-aléatoire de segments rectilignes.

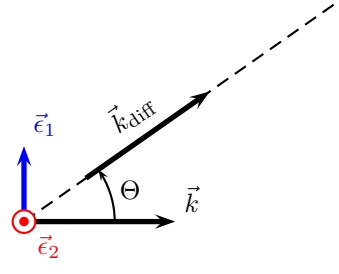
46.— On a vu les expressions du champ magnétique diffusé $\vec{B}_{\text{diff}} = \frac{\omega^2 \alpha E_0}{c^2} \frac{\alpha E_0}{cR} \exp [I(kR - \omega t)] \mathcal{F}(\vec{Q}) [\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}]$ et du champ électrique diffusé $\vec{E}_{\text{diff}} = -\frac{\omega^2 \alpha E_0}{c^2} \frac{\alpha E_0}{R} \exp [I(kR - \omega t)] \mathcal{F}(\vec{Q}) [\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\epsilon})]$. On en déduit le vecteur de Pointing moyen $\langle \vec{\Pi} \rangle = \text{Re} \left(\frac{\vec{E}_{\text{diff}} \wedge \vec{B}_{\text{diff}}^*}{2\mu_0} \right)$ où on remarque que $[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\epsilon})] \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}) = -\vec{n} |\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}|^2$; on peut donc écrire $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\omega^4 |\alpha|^2 E_0^2}{c^4 2\mu_0 c R^2} \|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}\|^2 |\mathcal{F}(\vec{Q})|^2 \vec{n}$ et la puissance diffusée à travers la surface $dS \vec{n}$ s'écrit $dP_{\text{diff}} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{n} dS$, où il reste encore à moyenniser au cours du temps le terme $|\mathcal{F}(\vec{Q})|^2$ qui peut varier du fait des mouvements moléculaires. Notant enfin que le vecteur de Poynting moyen de l'onde incidente est $I_0 = \frac{1}{2\mu_0} E_0 \times \frac{E_0}{c}$, on peut enfin écrire $dP_{\text{diff}} = \frac{dS}{R^2} I_0 |\alpha|^2 \frac{\omega^4}{c^4} \|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}\|^2 \left\langle |\mathcal{F}(\vec{Q})|^2 \right\rangle$.

Remarquons enfin que $|\mathcal{F}(\vec{Q})|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \exp [I\vec{Q} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k)] = \sum_{i < j} 2 \cos [\vec{Q} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k)]$ qu'on peut aussi choisir d'écrire $|\mathcal{F}(\vec{Q})|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \cos [\vec{Q} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k)]$; finalement, on aura pour puissance moyenne diffusée par l'en-

semble des N molécules $\boxed{dP_{\text{diff}} = \underbrace{\frac{dS}{R^2}}_{d\Omega} N I_0 |\alpha|^2 \frac{\omega^4}{c^4} \|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}\|^2 \langle \mathcal{S}(\vec{Q}) \rangle}$ où on reconnaît l'angle solide $d\Omega$ du cône d'émission, de sommet O .

47.— Pour un gaz parfait, si $i \neq j$, $\langle \cos [\vec{Q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \rangle = 0$ à cause des mouvements relatifs aléatoires des molécules du gaz : on a vu que $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ évolue sur des dizaines de mètres au cours de la durée de moyenne. On en déduit donc $\boxed{\mathcal{S}(\vec{Q}) = 1}$ car il ne reste dans la somme que les termes $i = j$. On observe donc $\boxed{dP_{\text{diff}} = NdP_1}$ où dP_1 est la puissance diffusée par une molécule unique. On parle donc de diffusion **incohérente** puisqu'il y a addition des éclaircements, les termes d'interférence entre deux molécules différentes étant annulés par l'opération de moyenne.

48.— Compte tenu du caractère incohérent de la diffusion, le facteur de structure vaut $\langle \mathcal{S}(\vec{Q}) \rangle = 1$ et $d\mathcal{I}_{\text{diff}}(\omega) = \frac{dS}{R^2} N \mathcal{I}_{\text{inc}}(\omega) |\alpha|^2 \frac{\omega^4}{c^4} \overline{\|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}\|^2}$ où on désigne par \bar{f} la moyenne de la grandeur f sur les différents états de polarisation. Sur le schéma ci-contre, on représente le plan défini par le vecteur d'onde \vec{k} de l'onde incidente et le vecteur d'onde $\vec{k}_{\text{diff}} = k\vec{n}$ de l'onde diffusée. Dans l'état de polarisation décrit par $\vec{\epsilon}_1$, on aura donc $\|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}_1\| = \cos \Theta$; par contre, dans l'état de polarisation décrit par $\vec{\epsilon}_2$, on aura donc $\|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}_2\| = 1$. On peut donc écrire $\overline{\|\vec{n} \wedge \vec{\epsilon}\|^2} = \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}$ et

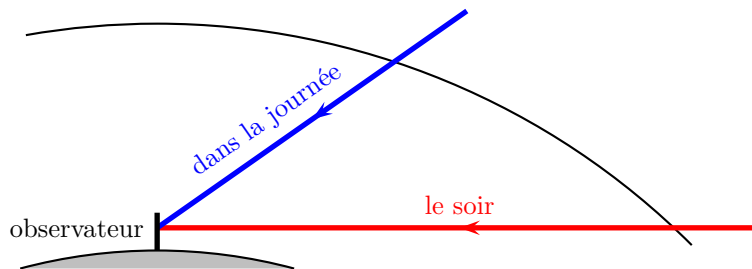


donc $\boxed{d\mathcal{I}_{\text{diff}}(\omega) = \frac{N}{2} \mathcal{I}_{\text{inc}}(\omega) |\alpha|^2 \frac{\omega^4}{c^4} (1 + \cos^2 \Theta) d\Omega}$.

49.— Utilisant les coordonnées sphériques d'axe \vec{k} , on a $d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \sin \Theta d\Theta d\varphi$ et on peut donc sommer sur toutes les directions de diffusion, $\mathcal{I}_{\text{diff}}(\omega) = \int_{\Theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\mathcal{I}_{\text{diff}}(\omega)$; remarquant alors bien sûr $\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi$ ainsi que $\int_{\Theta=0}^{\pi} (1 + \cos^2 \Theta) \sin \Theta d\Theta = \int_{-1}^1 (1 + \chi^2) d\chi = \frac{8}{3}$, on peut écrire $\boxed{\mathcal{I}_{\text{diff}}(\omega) = \frac{8\pi}{3} N \mathcal{I}_{\text{inc}}(\omega) |\alpha|^2 \frac{\omega^4}{c^4}}$.

50.— Adoptant la répartition « blanche » $\mathcal{I}_{\text{inc}}(\omega) = \mathcal{I}_0$ pour toute fréquence du spectre visible du rayonnement incident, on constate que la densité spectrale du rayonnement diffusé vérifie $\mathcal{I}_{\text{diff}} = \kappa \times \omega^4$ où κ est une constante (si on suppose que la polarisabilité α l'est) relativement à la fréquence du rayonnement. La diffusion est donc $\left(\frac{7,5}{4}\right)^4 \simeq 12$ fois plus intense dans le bleu que dans le rouge et le ciel paraît bleu à cause de la diffusion, beaucoup plus efficace en **haute fréquence**. C'est évidemment la présence du terme de dérivée seconde \ddot{p}_1 dans les champs \vec{E}_1 et \vec{B}_1 rayonnés par chaque molécule qui explique ce comportement.

51.— La seule différence avec le cas précédent est l'épaisseur d'atmosphère traversée par les rayons issus du Soleil couchant : lorsque ces rayons rasent l'horizon, ils traversent une épaisseur d'atmosphère plus importante qu'à tout autre moment de la journée (voir figure ci-dessous). Le phénomène de diffusion est donc *a priori* plus important : les rayons provenant du Soleil et parvenant jusqu'à l'observateur sont donc appauvris en bleu, ce qui explique **l'enrichissement relatif en rouge** de la couleur du Soleil lui-même à ce moment ; il est d'ailleurs globalement moins lumineux et peut être observé plus facilement qu'en plein jour.



C'est cette teinte rouge-orangé plus marquée qui se retrouve dans les portions du ciel (et des nuages) situés au voisinage de la direction des rayons lumineux provenant du Soleil couchant qui donnent l'impression de ciel rougeoyant qu'on observe parfois le soir.