

Écoles Normales Supérieures, Physique MPI

Plasmons dans les métaux

Concours 2007

I. Oscillations électroniques dans les métaux

I-1. Modèle microscopique du mouvement des électrons

1.) La moyenne de la durée séparant deux chocs est $\bar{t} = \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx$ où une intégration par parties fournit $\int_0^\infty x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ donc $\bar{t} = \tau$: la durée moyenne entre deux chocs est bien égale à τ .

De même, $\overline{t^2} = \int_0^\infty \frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau^2 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$ où on obtient encore une fois par intégration par parties $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx = 2$ donc $\overline{t^2} = 2\tau^2$. On peut interpréter ce résultat en termes d'écart quadratique t_c pour la répartition des durées entre deux chocs, avec $t_c^2 = \overline{(t - \tau)^2} = \overline{t^2} + \tau^2 - 2\tau\bar{t}$ donc $t_c = \tau$; la durée τ est donc à la fois la moyenne et l'écart quadratique moyen des répartitions des durées entre deux chocs.

2.) Après chaque choc, la direction de la vitesse \vec{v} est complètement aléatoire donc $\overline{\vec{v}} = \vec{0}$.

3.) Par définition, $E = \frac{1}{2} m v_c^2$ donc $v_c = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,32 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette vitesse est très élevée, en particulier si on la compare aux vitesses macroscopiques du métal lui-même, et surtout aux vitesses quadratiques moyennes des molécules d'un gaz (de l'ordre de $1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ au maximum). Par contre, cette vitesse reste heureusement inférieure à la vitesse c de la lumière ($v_c/c \sim 4 \times 10^{-3}$), permettant de continuer la description mécanique des électrons dans un cadre non relativiste.

4.) L'énergie thermique $E_t = \frac{3}{2} k_B T = 3,8 \times 10^{-2} \text{ eV}$, avec une vitesse thermique associée $v_t = \sqrt{\frac{2E_t}{m}}$ ou $v_t = 1,2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on a $E \gg E_t$ et $v_c/v_t \simeq 11$ donc l'énergie des électrons n'est pas d'origine thermique.

5.) Entre deux chocs, les électrons ne sont soumis qu'à la force électrique donc $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0$ qui s'intègre en $\vec{v} = \vec{v}_q - \frac{e}{m} \vec{E}_0 (t - t_q)$ ce qui mène immédiatement à $\vec{v}_{q+1} - \vec{v}_q = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 (t_{q+1} - t_q)$.

6.) $\vec{v}_d = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \overline{t_{q+1} - t_q}$ avec $\overline{t_{q+1} - t_q} = \tau$ donc $\vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$.

7.) Dans ce modèle, $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0 - \zeta \vec{v}$; en régime permanent (absence de chocs), atteint au bout d'une durée dont on verra qu'elle est de l'ordre de τ , c'est-à-dire très brève, on obtient $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{v}_d = -\frac{e}{\zeta} \vec{E}_0$, identique à l'expression précédente sous réserve que $\zeta = \frac{m}{\tau}$.

8.) $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$ donc la densité volumique de courants $\vec{j} = -Ne\vec{v}$ vérifie $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}_0$ avec $\gamma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m}$. Pour

l'or, $N = N_A \frac{d}{M} = 5,90 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ce qui donne $\tau = \frac{\gamma_0 m}{Ne^2} = 2,71 \times 10^{-14} \text{ s}$. Cette courte durée justifie l'étude du seul régime permanent ci-dessus.

9.) $v_d = \frac{e\tau}{m} E_0$ avec $E_0 = 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ fournit $v_d = 4,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. $v_d \ll v_c$, ce qui justifie le terme de dérive pour désigner ce mouvement moyen très lent, en comparaison de l'agitation macroscopique électronique à la vitesse quadratique moyenne v_c .

10.) On ne résout que dans le domaine $0 \leq x \leq L_x$ puisqu'en dehors de cet intervalle, le modèle impose $U(x) \rightarrow \infty$ donc $f(x) = 0$. L'équation de Schrödinger prend alors la forme $\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{2mE_x}{\hbar^2} f(x) = -\alpha f(x)$, où on notera que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Selon le signe de α , ce type d'équation a des solutions :

- exponentielles réelles, si $\alpha < 0$; la double condition $f(0) = f(L_x) = 0$ impose alors $f(x) = 0$ partout et amène à rejeter cette solution ;
- affines, si $\alpha = 0$; ici encore, la double condition $f(0) = f(L_x) = 0$ impose alors $f(x) = 0$ partout et amène à rejeter cette solution ;
- sinusoidales si $\alpha > 0$; c'est le seul cas compatible avec la double condition aux limites.

Finalement, la seule solution acceptable est ici du type $f(x) = f_0 \sin(K_x x) + f_1 \cos(K_x x)$ mais $f(0) = 0$ impose $f_1 = 0$ et on aura bien $f(x) = f_0 \sin(K_x x)$.

11.) De façon évidente, K_x est l'inverse d'une longueur ; on a vu que $K_x^2 = \alpha = \frac{2mE_x}{\hbar^2}$ soit $E_x = \frac{\hbar^2 K_x^2}{2m}$.

12.) Il reste à exploiter la dernière condition aux limites $f(L_x) = 0$ pour cette solution (dont on notera l'analogie avec une onde stationnaire dans une cavité de longueur L_x), qui mène à $\sin(K_x L_x) = 0$ donc $K_x = \frac{p\pi}{L_x}$, où p est un entier. On a vu que $p = 0$, correspondant à $K_x = 0$, doit être rejetée ; de plus, les solutions correspondant à deux entiers p et $-p$ sont identiques (au changement de signe de f_0 près) et on peut se restreindre sans perte de généralité à $p > 0$, donc enfin $p \in \mathbb{N}^*$.

13.) Les résultats sont évidemment analogues pour les axes (Oy) et (Oz) , menant à $g(y) = g_0 \sin(K_y y)$ et $h(z) = h_0 \sin(K_z z)$; posant $\psi_0 = f_0 g_0 h_0$, il vient $\psi(x, y, z) = \psi_0 \sin(K_x x) \sin(K_y y) \sin(K_z z)$ avec pour

expressions énergétiques $E_y = \frac{\hbar^2 K_y^2}{2m}$, $E_z = \frac{\hbar^2 K_z^2}{2m}$ et pour conditions de quantification $K_y = \frac{q\pi}{L_y}$, $K_z = \frac{r\pi}{L_y}$

où $(q, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

14.) On déduit directement de ce qui précède $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{p^2}{L_x^2} + \frac{q^2}{L_y^2} + \frac{r^2}{L_z^2} \right)$.

15.) Si on trace les vecteurs \vec{K} depuis une origine commune à l'origine des coordonnées, leurs extrémités sont disposées aux nœuds d'un réseau tridimensionnel dont l'extrémité numérotée (p, q, r) est au point de coordonnées $(p\Delta K_x, q\Delta K_y, r\Delta K_z)$, avec $\Delta K_x = \frac{\pi}{L_x}$, $\Delta K_y = \frac{\pi}{L_y}$, $\Delta K_z = \frac{\pi}{L_z}$. Un tel réseau est formé de parallélépipèdes de volume $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z$ contenant chacun exactement un nœud du réseau ; on peut donc bien affirmer que le volume occupé par un état électronique est $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z}$, puisqu'un état électronique est entièrement défini par le vecteur \vec{K} .

16.) L'ensemble des états d'énergie $\epsilon \leq E$ donc de vecteur d'onde $\vec{\kappa}$ vérifiant $\|\vec{\kappa}\| \leq K$ correspond à la partie de la sphère de rayon $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ avec $\kappa_x > 0$, $\kappa_y > 0$ et $\kappa_z > 0$. Il s'agit donc d'un huitième de sphère de rayon K , et de volume $\frac{1}{8} \frac{4\pi K^3}{3}$.

Pour ce qui concerne les états d'énergie E à dE près, le volume concerné s'écrit $\frac{1}{8} 4\pi K^2 dK$. Le volume occupé

par un état étant $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z$, le nombre d'états décrit ici est $dn = \frac{2 \times \frac{1}{8} 4\pi K^2 dK}{\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z}$ soit $dn = \frac{K^2 dK}{\pi^2} L_x L_y L_z$. On remarque qu'on a remplacé un décompte exact des états par une approximation continue, ce qui est justifié par l'hypothèse $\Delta K \ll dK$ proposée par l'énoncé.

17.) L'intégration du résultat précédent fournit $n(K) = \frac{K^3}{3\pi^2} L_x L_y L_z$ ou, avec le changement de variable $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $n(E) = \frac{(2mE)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^2} L_x L_y L_z$.

18.) Le dernier niveau occupé correspond à la valeur de E telle que $n(E) = N L_x L_y L_z$ (nombre total

d'électrons dans le métal); on a donc $N = \frac{(2mE)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^2}$ donc $E_F = (3\pi^2N)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}$ ou $E_F = 5,54 \text{ eV}$; ce modèle permet donc de rendre compte de l'énergie cinétique des électrons, qui n'est pas liée à l'agitation thermique mais bien à la localisation des électrons dans un volume restreint de l'espace, du fait de leur interaction avec le réseau périodique des ions du métal.

I-2. Plasmons dans le métal

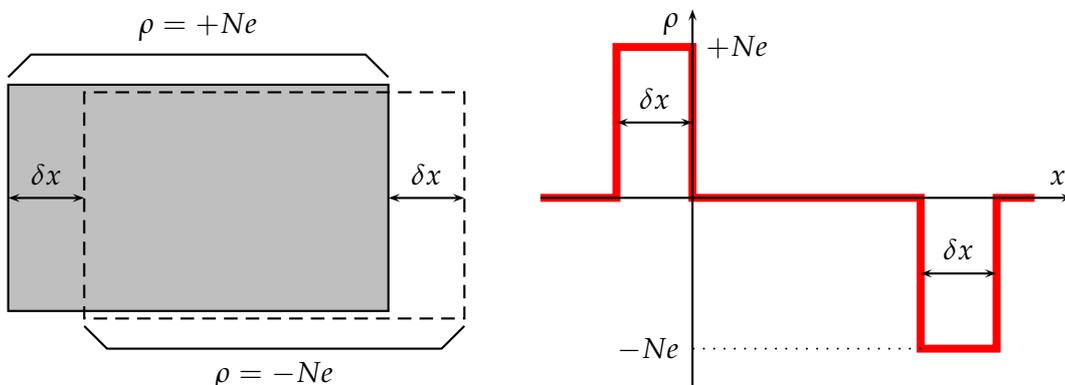
19.) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (équation de Maxwell-Ampère) et $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (conservation de la charge électrique) mènent, compte tenu de $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ (sous réserve qu'on puisse négliger le régime transitoire de durée $\sim \tau$) à $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\epsilon_0} \rho = 0$ ou $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0)e^{-t/\tau}$ avec pour constante de temps de relaxation des charges $\tau_r = \frac{\epsilon_0}{\gamma_0} = 1,94 \times 10^{-19} \text{ s}$. Cette durée très courte justifie le modèle de conducteur partout localement neutre qu'on emploie dans la suite. Toutefois, le modèle développé ici n'est pas complètement justifiée puisque $\tau_r \ll \tau$, ce qui ne valide pas l'emploi de l'équation de régime permanent $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}_0$.

20.) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ fournit, en régime harmonique forcé de pulsation ω , $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \frac{\vec{E}}{1+i\omega\tau}$ donc $\vec{j} = -Ne\vec{v}$ prend bien la forme $\vec{j} = \gamma(\omega)\vec{E}$ avec $\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}$.

21.) L'équation de conservation de la charge $\text{div}(\gamma(\omega)\vec{E}) = -i\omega\rho$ s'écrit, compte tenu de l'expression de $\gamma(\omega)$ et que $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, sous la forme $\frac{\gamma_0}{\epsilon_0}\rho = -i\omega\rho + \omega^2\tau\rho$ ou, en revenant aux notations différentielles $i\omega = \frac{d}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\rho}{dt} + \omega_p^2\rho = 0$. Le discriminant de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire est $\Delta = -4\omega_p^2 + \frac{1}{\tau^2}$, que l'on peut aussi écrire $\Delta = \frac{1-4\tau/\tau_r}{\tau^2}$. Comme on a vu que $\tau \gg \tau_r$, Δ est franchement négatif, les solutions de l'équation sont complexes conjuguées et le régime est pseudopériodique amorti avec des solutions du type $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/2\tau} \cos(\sqrt{\omega_p^2 - 1/4\tau^2}t + \varphi)$; le temps de décroissance associé est $\tau_d = 2\tau$ et la pseudopulsation des oscillations est $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - 1/4\tau^2} \simeq \omega_p$.

22.) On a vu que $\omega_p \gg \frac{1}{\tau_d}$ (ou encore $2\pi/\omega_p \ll \tau_d$): la décroissance de l'amplitude des oscillations est donc très lente et le régime très faiblement amorti; il y a beaucoup d'oscillations avant amortissement.

23.) Les ions sont considérés comme fixes car leur masse m_i vérifie $m_i \gg m$ (avec au moins un rapport de l'ordre de 2000 pour les ions les plus légers, H^+). On peut alors représenter un déplacement en bloc d'un groupe d'électrons (densité volumique $\rho = -Ne$) sur un fond d'ions fixes ($\rho = +Ne$) menant la densité volumique de charges représentée ci-dessous.



Par raisons de symétrie, $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$ et $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ donc $\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; cette équation s'intègre (avec $E = 0$ à l'extérieur du milieu chargé) pour donner $\vec{E} = \frac{Ne}{\epsilon_0} \delta x \vec{e}_x$ à l'intérieur du milieu chargé.

24.) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ donc, en projection sur \vec{e}_x , $m\delta\ddot{x} = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0}\delta x$, équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$, avec $\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = \frac{Ne^2\tau}{m} \frac{1}{\tau\epsilon_0} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0\tau}$: la pulsation des oscillations est ω_p déterminée plus haut.

II. Couplage champ-plasma

II-1. Propagation dans un métal

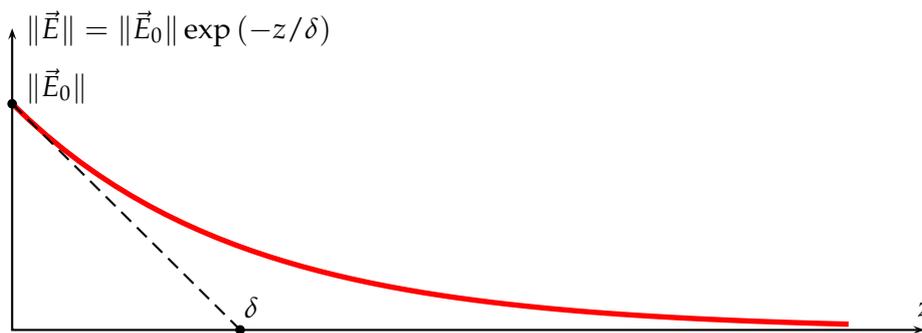
25.) Le milieu reste neutre ($\rho = 0$) et on adopte un modèle ohmique à conductivité complexe qui suppose implicitement une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$ et une dépendance spatiale en $\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r})$ donc les équations de Maxwell s'écrivent $\text{div } \vec{E} = 0$ ou $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$ ou $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ou $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ou $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E} \left[1 - i \frac{\gamma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \right]$. On en déduit sans difficulté pour $\vec{E} \neq \vec{0}$ que $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\gamma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \right)$.

26.) On peut écrire $\gamma(\omega) \simeq \gamma_0$ pour $\omega\tau \ll 1$ donc aussi pour les grandes longueurs d'onde puisque $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \ll \frac{1}{\tau}$ correspond aussi à $\lambda \gg 2\pi c\tau$ soit $\lambda \gg 51 \times 10^{-6} \text{ m}$: cette approximation s'applique pour l'infrarouge lointain, les ondes centimétriques (hyperfréquences), les ondes radio.

27.) $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\gamma_0}{\omega \epsilon_0} \right)$ où on remarque que $\frac{\gamma_0}{\omega \epsilon_0} = \frac{1}{\omega\tau} \gg \frac{1}{\omega\tau}$; la condition $\omega\tau \gg 1$ permet *a fortiori* de considérer que $\frac{\gamma_0}{\omega \epsilon_0} \gg 1$ donc de négliger le terme réel dans l'équation de dispersion (ou, ce qui revient au même, le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction \vec{j} dans l'équation de Maxwell-Ampère). On obtient alors $k^2 = -i \frac{\gamma_0 \omega}{\epsilon_0 c^2}$ dont les solutions complexes $k = \pm \frac{1-i}{\delta}$ traduisent une absorption

sur une longueur caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 c^2}{\gamma_0 \omega}}$ ou $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ (appelé usuellement épaisseur de peau du

conducteur) puisque $\exp(-ikz) = \exp(-iz/\pm\delta) \exp(-z/\pm\delta)$; on a exclu ici la solution correspondant au signe $-$ puisque la propagation dans un milieu illimité vers les $z > 0$ conduirait à une onde dont l'amplitude croît indéfiniment, ce qui n'est pas physique en l'absence d'apport énergétique. Finalement, on peut proposer le tracé ci-dessous :



avec numériquement $\delta = 1,06 \text{ cm}$ pour $f = 50 \text{ Hz}$ et $\delta = 7,46 \mu\text{m}$ pour $f = 100 \text{ MHz}$.

28.) Si $\omega\tau \gg 1$ alors $\gamma(\omega) \simeq \frac{\gamma_0}{i\omega\tau}$ et l'équation de dispersion devient $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ en fonction de ω_p déjà défini plus haut (identique au cas des plasmas gazeux). La condition de propagation (transparence du milieu) est alors $k \in \mathbb{R}^*$ donc $k^2 > 0$ soit $\omega > \omega_p$.

29.) Si $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ donc $k = \pm \frac{i}{\delta_p}$ où $\delta_p = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ désigne ici encore la distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le milieu. En choisissant $\lambda = 500 \text{ nm}$ (comme plus bas dans l'énoncé, couleur

bleu-vert), $\omega = 3,77 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_p = 1,37 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ fournissent $\delta_p = 2,25 \times 10^{-8} \text{ m}$. L'onde est évanescence et s'atténue sur une épaisseur équivalente à quelques centaines d'épaisseurs atomiques seulement : un métal est parfaitement opaque dans le domaine visible.

II-2. Plasmons de surface sur un métal

30.) Dans l'air, et en adoptant toujours la notation $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ pour une onde harmonique, on obtient $\text{div } \vec{\mathcal{E}}_1 = 0$, $\text{div } \vec{\mathcal{B}}_1 = 0$, $\text{rot } \vec{\mathcal{E}}_1 = -i\omega \vec{\mathcal{B}}_1$ et $\text{rot } \vec{\mathcal{B}}_1 = i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{E}}_1$. Dans le métal, qui reste partout localement neutre ($\rho = 0$) mais conducteur avec la conductivité complexe $\gamma(\omega)$, il vient $\text{div } \vec{\mathcal{E}}_2 = 0$, $\text{div } \vec{\mathcal{B}}_2 = 0$, $\text{rot } \vec{\mathcal{E}}_2 = -i\omega \vec{\mathcal{B}}_2$ et $\text{rot } \vec{\mathcal{B}}_2 = i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathcal{E}}_2 + \epsilon_0 \gamma(\omega) \vec{\mathcal{E}}_2$.

31.) On peut ici écrire $\text{rot } \vec{\mathcal{E}}_\ell = \begin{vmatrix} -ik_x & \mathcal{E}_{lx} \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \mathcal{E}_{lz} \end{vmatrix} \wedge$ donc $\vec{\mathcal{B}}_\ell = \frac{i \frac{\partial \mathcal{E}_{lz}}{\partial z} - k_x \mathcal{E}_{lx}}{\omega} \vec{e}_y$: le champ magnétique est bien colinéaire à (Oy) . Pour appliquer de même l'équation de Maxwell-Ampère, on peut remarquer que $i\omega \epsilon_0 \mu_0 + \epsilon_0 \gamma(\omega) = i\omega \epsilon_\ell \mu_0$ et on peut donc adopter l'écriture $\text{rot } \vec{\mathcal{B}}_\ell = i\omega \epsilon_\ell \mu_0 \vec{\mathcal{E}}_\ell$, indépendante du milieu étudié. La projection sur \vec{e}_z de cette équation s'écrit $k_x \mathcal{B}_{ly} = -\omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{lz}$, ce qui permet d'écrire le système

$$\begin{cases} \omega \mathcal{B}_{ly} + k_x \mathcal{E}_{lz} & = -i \frac{\partial \mathcal{E}_{lx}}{\partial z} \\ k_x \mathcal{B}_{ly} + \omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{lz} & = 0 \end{cases}; \text{ la solution de ce système linéaire exprime les composantes } \mathcal{B}_{ly} \text{ et } \mathcal{E}_{lz}$$

en fonction seulement de E_{lx} : la résolution du problème se ramène bien à la **détermination de $E_{lx}(z)$** .

32.) On a établi $\omega \mathcal{B}_{ly} + k_x \mathcal{E}_{lz} = -i \frac{dE_{lx}}{dz}$ ou, après dérivation, $\omega \frac{d\mathcal{B}_{ly}}{dz} + k_x \frac{dE_{lz}}{dz} = -i \frac{d^2 E_{lx}}{dz^2}$. Écrivant alors l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{\mathcal{E}}_\ell = 0$, on obtient $-ik_x \mathcal{E}_{lx} + \frac{\partial \mathcal{E}_{lz}}{\partial z} = 0$ donc $\frac{dE_{lz}}{dz} = ik_x E_{lx}$, tandis que la projection sur \vec{e}_x de l'équation de Maxwell-Ampère fournit $-\frac{\partial \mathcal{B}_{ly}}{\partial z} = i\omega \epsilon_\ell \mu_0 \mathcal{E}_{lx}$ donc $\frac{d\mathcal{B}_{ly}}{dz} = -i\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{lx}$. Reportant enfin ces deux termes dans la relation établie ci-dessus par dérivation, il vient comme demandé $\frac{d^2 E_{lx}}{dz^2} - (k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_\ell) E_{lx} = 0$. Enfin, si $\omega \tau \gg 1$, $\epsilon_2 \simeq \epsilon_0 - \frac{i \gamma_0}{\omega}$ s'écrit $\epsilon_2 = \epsilon_0 - \frac{\gamma_0}{\omega^2 \tau}$ ou encore

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \in \mathbb{R}.$$

33.) Les formes $\exp(\pm z/\delta_\ell)$ proposées par l'énoncé sont solutions de l'équation établie ci-dessus sous réserve que $\delta_\ell^2 = \frac{1}{k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_\ell}$; on remarquera que cette équation ne préjuge pas du signe de δ_ℓ^2 et la grandeur δ_ℓ est soit réelle, soit imaginaire pure.

34.) Des ondes de surface confinées au voisinage du plan $z = 0$ imposent δ_ℓ réel, en ne conservant que les solutions qui vérifient $|E_{1x}| \rightarrow 0$ si $z \rightarrow -\infty$ et $|E_{2x}| \rightarrow 0$ si $z \rightarrow +\infty$; on aura donc $E_{1x}(z) = \alpha_1 e^{z/\delta_1}$ et $E_{2x}(z) = \beta_2 e^{-z/\delta_2}$. On verra plus bas que $\alpha_1 = \beta_2$ du fait des relations de passage du champ.

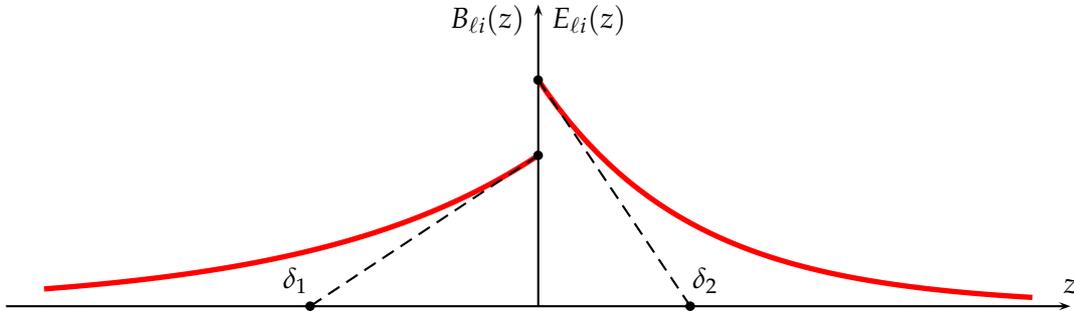
35.) On a vu que $\frac{d\mathcal{B}_{ly}}{dz} = -i\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{lx}$ d'où $\frac{d\mathcal{B}_{ly}}{dz} = -i\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{1x}$ et, par intégration et en l'absence de terme constant (puisque tous les champs sont proportionnels entre eux), $\mathcal{B}_{1y} = -i\omega \epsilon_1 \mu_0 \delta_1 \alpha_1 e^{z/\delta_1}$; on obtient de la même façon $\mathcal{B}_{2y} = i\omega \epsilon_2 \mu_0 \delta_2 \beta_2 e^{-z/\delta_2}$. On a aussi vu que $-\omega \epsilon_\ell \mu_0 E_{lz} = k_x \mathcal{B}_{ly}$ donc $E_{1z} = ik_x \delta_1 \alpha_1 e^{z/\delta_1}$

et $E_{2z} = -ik_x \delta_2 \beta_2 e^{-z/\delta_2}$. On peut encore écrire $\vec{\mathcal{E}}_1 = \alpha_1 e^{z/\delta_1} e^{i(\omega t - k_x x)} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ ik_x \delta_1 \end{vmatrix}$; avec $\frac{1}{\delta_1} < k_x$, on reconnaît

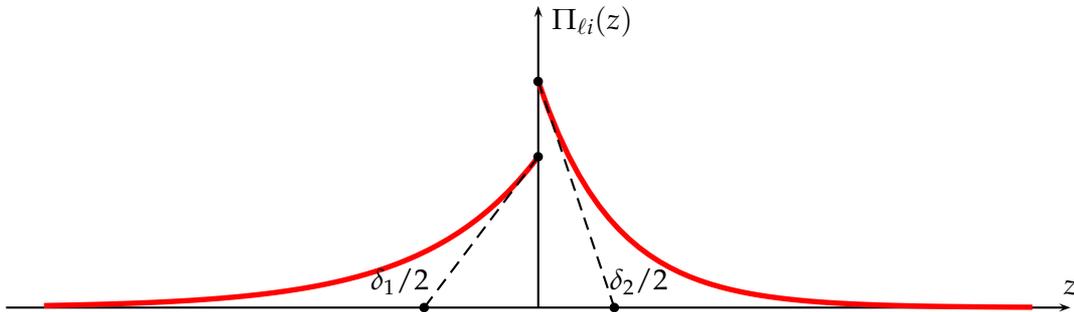
une polarisation **elliptique** de grand axe (Oz) et de petit axe (Ox) . Il n'est pas possible ici de lui attribuer un sens (droite ou gauche) car le plan (xOz) n'est pas orienté par la polarisation de l'onde. Le champ tourne de l'axe (Oz) vers l'axe (Ox) puisque $\text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_1) = \alpha_1 e^{z/\delta_1} [\cos(\omega t - k_x x) \vec{e}_z - k_x \delta_1 \sin(\omega t - k_x x) \vec{e}_x]$. De même,

dans le métal, $\vec{\mathcal{E}}_2 = \beta_2 e^{-z/\delta_2} e^{i(\omega t - k_x x)} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -ik_x \delta_2 \end{vmatrix}$ et on reconnaît aussi une polarisation avec les mêmes axes mais un sens de rotation inversé.

36.) Pour chacune des composantes du champ, la représentation est la même : une décroissance exponentielle conforme à la figure ci-dessous, avec $\epsilon_2 < \epsilon_1$ donc $\delta_2 < \delta_1$. Le tracé ne tient pas compte de l'éventuelle continuité de certaines composantes du champ.



Par ailleurs, $\langle \vec{\Pi}_\ell \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\ell) \wedge \text{Re}(\vec{\mathcal{B}}_\ell) \rangle$ ou encore $\langle \vec{\Pi}_\ell \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_\ell \wedge \vec{\mathcal{B}}_\ell^*)$ qui s'écrit aussi, par exemple dans l'air, $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \frac{\alpha_1^2}{2\mu_0} e^{2z/\delta_1} \text{Re} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i\omega\epsilon_1\mu_0\delta_1 \\ ik_x\delta_1 & 0 \end{vmatrix}$ ou enfin $\langle \vec{\Pi}_1 \rangle = \frac{\alpha_1^2\epsilon_1\omega k_x \delta_1^2}{2} \vec{e}_x$; de même, on obtient $\langle \vec{\Pi}_2 \rangle = \frac{\beta_2^2\epsilon_2\omega k_x \delta_2^2}{2} \vec{e}_x$. Ces deux grandeurs sont **indépendantes de x** (l'onde de surface se propage sans atténuation le long de l'interface) et leur dépendance en z est analogue de celle des champs, avec toutefois une atténuation deux fois plus rapide (l'onde est localisée au voisinage de l'interface) :



37.) La composante tangentielle du champ électrique \mathcal{E}_x est continue à la traversée de la surface de séparation, donc $\alpha_1 = \beta_2$. La composante tangentielle du champ magnétique \mathcal{B}_y est continue en l'absence de courants surfaciques, donc $\epsilon_1\alpha_1\delta_1 = -\epsilon_2\beta_2\delta_2$. On en déduit **$\epsilon_1\delta_1 + \epsilon_2\delta_2 = 0$** . Comme $\epsilon_1 = \epsilon_0 > 0$ et les distances δ_ℓ étant par hypothèse positives, on a **$\epsilon_2 < 0$** .

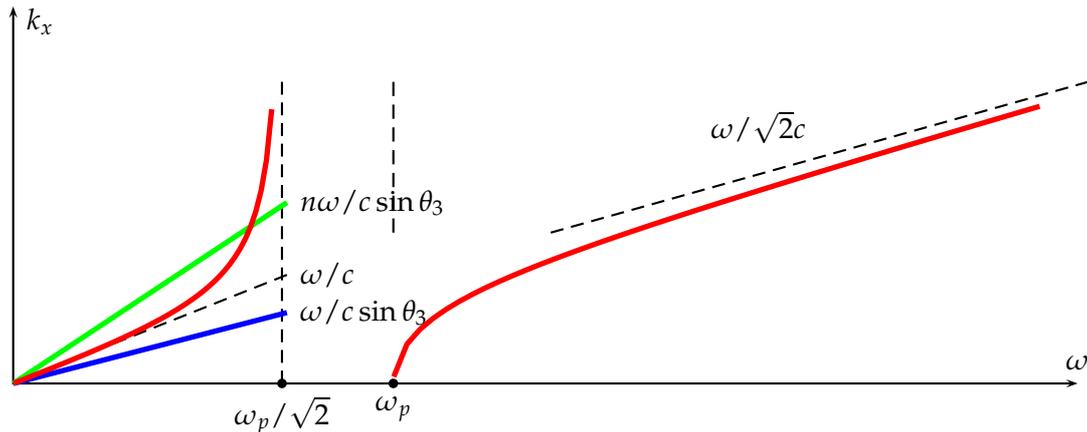
38.) Les relations $\frac{1}{\delta_\ell^2} = k_x^2 - \omega^2\mu_0\epsilon_\ell$ permettent d'écrire $\frac{1}{\epsilon_\ell^2\delta_\ell^2} = \frac{k_x^2}{\epsilon_\ell^2} - \frac{\omega^2\mu_0}{\epsilon_\ell}$; ces deux termes (pour $\ell = 1, 2$) sont égaux au vu de la question précédente, donc $k_x^2 \left(\frac{1}{\epsilon_1^2} - \frac{1}{\epsilon_2^2} \right) = \omega^2\mu_0 \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)$ ou, après une dernière simplification, **$k_x^2 = \omega^2\mu_0 \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$** .

39.) Remplaçant $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \left(1 - \omega_p^2/\omega^2 \right)$ et $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$, il vient ici **$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}$** . La propagation n'est possible que si $k_x^2 > 0$; l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ montre que $f(x) > 0$ pour $0 < x < 1$ et $2 < x$; finalement, les deux domaines de fréquence compatibles avec la propagation sont **$0 < \omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$ et $\omega > \omega_p$** . On s'intéresse dans ce qui suit au premier domaine (basses fréquences) pour lequel le métal est opaque aux ondes se propageant en volume.

En particulier, pour $\lambda = 500 \text{ nm}$, on a vu que $3,77 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \omega < \omega_p = 1,37 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, et même $\omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$. On peut aisément revenir aux expressions précédentes de δ_1 et δ_2 qui fournissent

$$\delta_1 = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 2} = 266 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \frac{\delta_1}{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = 21,8 \text{ nm}.$$

40.) Le tracé de $k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$ ci-dessous fait apparaître les comportements limites $k_x \simeq \frac{\omega}{c}$ si $\omega \ll \omega_p$ (à très basse fréquence, le milieu se comporte comme le vide) et $k_x \simeq \frac{\omega}{\sqrt{2}c}$ si $\omega \gg \omega_p$: la vitesse de phase de l'onde est alors $v_\phi \simeq \sqrt{2}c > c$.



41.) Si $\omega \rightarrow \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$, $k_x \rightarrow \infty$; comme par ailleurs $\frac{1}{\delta_\ell^2} = k_x^2 - \omega\mu_0\epsilon_\ell$ où $\omega\mu_0\epsilon_\ell$ reste fini, on en déduit que $\delta_\ell \rightarrow 0$, avec plus précisément $\delta_\ell^2 k_x^2 = 1 + \omega\mu_0\epsilon_\ell \delta_\ell^2 \rightarrow 1$. On en déduit que $\frac{E_{1x}}{E_{1z}} = +i$ et $\frac{E_{2x}}{E_{2z}} = -i$; dans les deux cas, la polarisation elliptique devient **circulaire**.

II-3. Excitation des plasmons de surface

II-3.1. Couplage par réflexion

42.) La continuité d'une composante des champs à l'interface s'écrit $E_{3i}e^{-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}} + E'_{3i}e^{-i\vec{k}'_3 \cdot \vec{r}} - E_{2i}e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} = 0$ pour tout $\vec{r} \in (xOy)$. Cette combinaison linéaire de trois fonctions de $\vec{r} = (x, y, 0)$ ne peut être constamment nulle avec E_{3i} , E'_{3i} et E_{2i} non tous nuls que si les fonctions exponentielles sont proportionnelles. Comme ces trois fonctions ont même valeur en $(x = 0, y = 0)$, elles sont aussi forcément égales ce qui impose $k'_{3y} = k_{2y} = k_{3y} = 0$ puisque l'onde incidente se propage dans le plan (xOz) . Ainsi, les vecteurs \vec{k}_3 , \vec{k}'_3 et \vec{k}_2 sont **coplanaires dans le plan d'incidence**; pour la même raison, ces vecteurs d'onde vérifient la continuité de leurs composantes tangentielles, $k_{3x} = k'_{3x} = k_{2x}$.

43.) Dans l'air, $\|\vec{k}_3\| = \frac{\omega}{c}$ donc $k_{3x} = \frac{\omega}{c} \sin \theta_3 < \frac{\omega}{c}$; comme par ailleurs $k_{2x} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$ a été tracé sur la figure ci-dessus, on constate sans difficulté qu'il n'y a **aucune intersection** entre une courbe entièrement située au-dessus de la droite $k_x = \omega/c$ (en pointillés ci-dessus) et une autre droite (en traits plein bleu ci-dessus) située en dessous de celle-ci. L'onde propagative du milieu 3 ne peut donc pas exciter l'onde de surface.

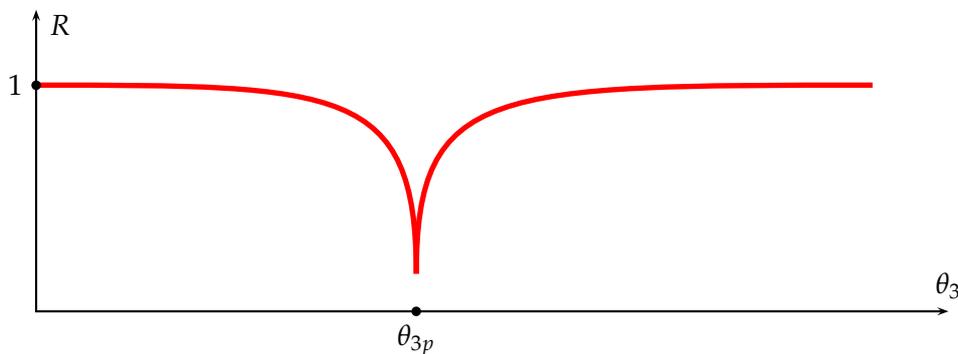
44.) Si on a maintenant $k_{3x} = n_3 \frac{\omega}{c} \sin \theta_3$, on constate (cf. figure ci-dessus, droite en trait plein vert) qu'il est possible d'exciter l'onde de surface si $\sin \theta_3 > \frac{1}{n_3}$, c'est-à-dire pour une incidence supérieure à l'angle d'incidence limite de la réflexion « classique ».

45.) Égalant les deux expressions de k_x , il vient $\sin \theta_{3p} = \frac{1}{n_3} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}}$ ou, ici, $\theta_{3p} = 42^\circ 38'$. Si l'onde

de surface est excitée, le coefficient de réflexion est **fortement diminué** pour $\theta_3 = \theta_{3p}$: c'est l'onde incidente qui fournit l'énergie ainsi absorbée, énergie qui n'est plus disponible pour la réflexion.

Il faut pour assurer le confinement que l'épaisseur du métal soit nettement supérieure à la distance caractéristique δ_2 évaluée plus haut ; sinon, une partie de l'onde de surface pourrait être retransmise de l'autre côté de la surface métallique. On doit donc imposer $e \gg \delta_2 \sim 20 \text{ nm}$.

46.) Pour toute autre incidence, il n'y a **pas d'excitation d'onde de surface** ; de plus, $\omega < \omega_p/\sqrt{2} < \omega_p$ donc le métal est un milieu opaque et il n'y a **pas transmission d'onde propagative** non plus. Finalement, toute l'énergie de l'onde incidente doit se retrouver dans l'onde réfléchie et il y a **réflexion totale** pour $\theta_3 \neq \theta_{3p}$. Puisque $k'_{3x} = k_{3x}$ et $\|\vec{k}'_3\| = \|\vec{k}_3\|$, la seule solution possible est $k'_{3z} = -k_{3z}$: le vecteur \vec{k}'_3 est symétrique du vecteur \vec{k}_3 par rapport au plan du miroir, conformément aux **lois de Descartes** de la réflexion. On peut s'attendre à une mesure du type de la figure proposée ci-dessous.



47.) Posant $\epsilon_1 = n^2 \epsilon_0$, il vient $k_x^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - (n^2 + 1)\omega^2}$ et la continuité de la composante tangentielle du vecteur d'onde impose encore $\sin \theta_{3p} = \frac{n}{n_3} \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - (n^2 + 1)\omega^2}}$.

48.) $\left| \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \right| = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \gg n^2$ permet de négliger le terme en n^2 sous le radical de l'expression précédente, donc $\sin \theta_{3p} \simeq \frac{n}{n_3}$ et $\frac{d\theta_{3p}}{dn} = \frac{1}{n_3 \cos \theta_{3p}} = \frac{1}{n_3 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{3p}}}$ donc après simplification $\frac{d\theta_{3p}}{dn} = \frac{1}{\sqrt{n_3^2 - n^2}}$. Assimilant les

variations minimales à des différentielles, on obtient $dn_{\min} = \sqrt{n_3^2 - n^2} d\theta_{3p} \sim 1,4 \times 10^{-5}$.

49.) Dans un interféromètre de Michelson, la présence d'une lame d'épaisseur e sur un des bras de l'interféromètre introduit un déphasage $\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}(n-1)e$; une petite variation de ce déphasage s'écrit donc $d\Delta\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} dn$ et la mesure proposée est possible si $e > e_{\min} = \frac{\lambda d\Delta\varphi_{\min}}{4\pi dn_{\min}} = 0,3 \mu\text{m}$; c'est une valeur difficile à réaliser qui justifie le choix de la méthode de mesure proposée par Kreschmann.

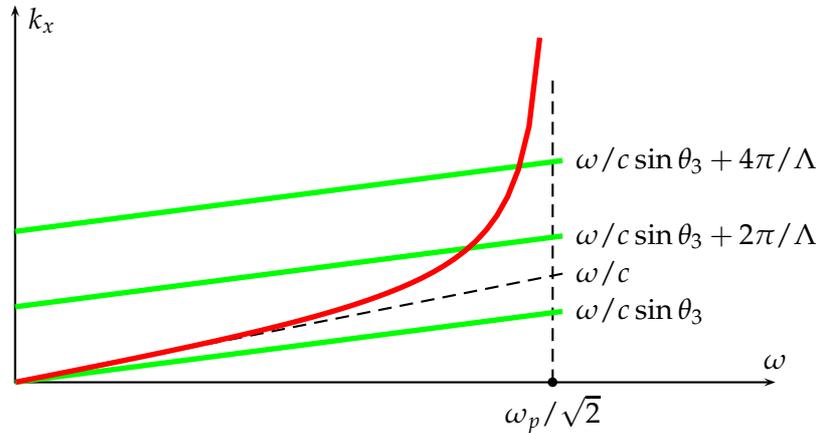
50.) Du fait que $\bar{c} = C/M$, où M est la masse molaire, C la concentration massique et \bar{c} la concentration molaire volumique, on écrit ici $d\bar{c}_{\min} = \frac{dn_{\min}}{M \frac{dC}{dC}} = 2,3 \times 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; on peut ainsi détecter des quantités très faibles de molécules d'ADN par ce procédé.

II-3.2. Couplage par diffraction

51.) Les ordres du réseau sont les **maxima principaux** de la figure de diffraction, réalisés lorsque la différence de marche δ entre les rayons diffractés par deux traits consécutifs du réseau vaut $\delta = q\lambda = q \frac{2\pi c}{\omega}$, q étant un entier. Dans le la diffraction par un réseau plan par réflexion de période Λ , on peut écrire

$\delta = \Lambda(\sin \theta_q - \sin \theta_3)$ et la condition de formation d'un maximum (relation fondamentale des réseaux ou relation de Bragg) peut s'écrire $\Lambda(\sin \theta_q - \sin \theta_3) = q\lambda$ ou encore $\frac{\omega}{c}(\sin \theta_q - \sin \theta_3) = q\frac{2\pi}{\Lambda}$. Reconnaisant enfin $k_{xq} = \frac{\omega}{c} \sin \theta_q$ pour la projection tangentielle du vecteur d'onde dirigeant l'ordre q , on vérifie bien

$k_{xq} = \frac{\omega}{c} \sin \theta_3 + q\frac{2\pi}{\Lambda}$. Reprenant le principe de la résolution graphique déjà développé (cf. ci-dessous), on voit que pour toute valeur de $q > 0$, il existe une **solution unique** au problème du couplage, c'est-à-dire une valeur de ω dans $]0, \omega_p/\sqrt{2}[$ qui assure $k_{xq}(\omega) = k_x(\omega)$.



Avec les valeurs numériques proposées, on trouve $q\frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}} - \sin \theta_3 \right)$ où $q \geq 1$, ce qui impose

encore $\Lambda = q \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}} - \sin \theta_3} \geq \Lambda_{\min}$ avec $\Lambda_{\min} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}} - \sin \theta_3} = 1,48 \mu\text{m}$.

52.) Une raie noire correspond à un minimum de réflexion donc on peut l'interpréter en termes de couplage avec un mode de surface, c'est-à-dire à une longueur d'onde pour laquelle la relation de couplage $k_x(\omega) - \frac{\omega}{c} \sin \theta_3 = q\frac{2\pi}{\Lambda}$ s'applique avec q entier. En remarquant ici que $\omega \ll \omega_p$ (dans le cas qui le moins favorable, pour $\lambda = 750 \text{ nm}$, $\omega_p/\omega \sim 33$) et $\sin \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut écrire $q = \frac{\Lambda}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$; il vient donc $q_{\min} = \frac{\Lambda}{\lambda_{\max}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1,95$ et $q_{\max} = \frac{\Lambda}{\lambda_{\min}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3,90$. Les raies noires observées par Wood correspondent ici à $q = 2$ ou 3 et on peut prévoir dans ce cas **deux raies noires**.

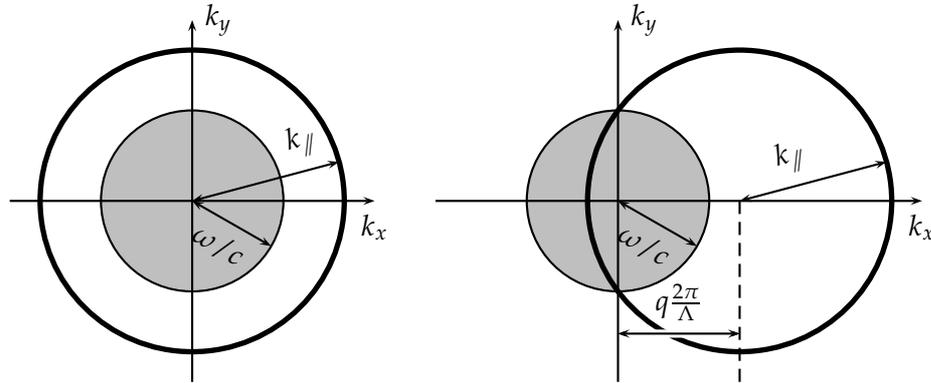
II-4. Extraction de la lumière confinée sous forme d'onde de surface

53.) On a ici $\vec{k} = \vec{k}_{\parallel} + k_z \vec{e}_z$; l'onde étant caractérisée par une décroissance exponentielle $e^{\pm z/\delta}$ le long de l'axe (Oz), $k_z = \pm i/\delta$ est imaginaire pur donc $\vec{k}^2 = k_{\parallel}^2 - 1/\delta^2 < k_{\parallel}^2$. Enfin, l'onde est supposée se propager dans l'air, donc $\vec{k}^2 = \omega^2/c^2$, ce qui permet enfin d'écrire $k_{\parallel} > \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$.

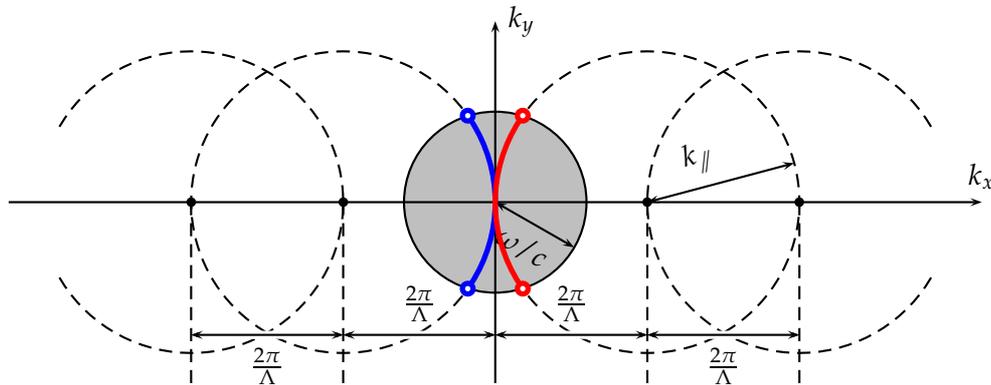
54.) L'onde confinée est décrite par un **cercle de confinement** de rayon $k_{\parallel} > \omega/c$ puisque la propagation isotrope dans le plan (xOy) impose $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$ avec $k_x^2 + k_y^2 = k_{\parallel}^2$. Ce rayon est donné dès lors que δ l'est. Par contre, une onde se propageant librement vérifie $k_z \in \mathbb{R}$ donc $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/c^2 - k_z^2 \leq \omega^2/c^2$: elle est donc représentée par un point intérieur aux **disque de propagation libre**, de rayon ω/c . Sur la figure page suivante, à gauche, on voit qu'il n'y a pas d'intersection entre les deux domaines; l'onde confinée **ne peut pas** se propager dans l'espace libre.

55.) L'effet de diffraction se traduit par l'existence de maxima dans toutes les directions qui vérifient la relation de Bragg; la composante k_x de l'onde incidente se traduit, pour l'onde diffractée, par une composante $k'_x = k_x + q\frac{2\pi}{\Lambda}$, conformément aux résultats ci-dessus. il y a donc **déplacement de $q\frac{2\pi}{\Lambda}$** du cercle de confinement dans la direction k_x .

56.) La figure ci-dessous montre (à droite) comment le disque de propagation libre peut alors couper le cercle de confinement. Il existe donc une possibilité pour l'onde confinée de donner lieu à la formation d'une onde de propagation libre, puisque la condition nécessaire pour cela est la conservation des composantes tangentielles k_x et k_y du vecteur d'onde de part et d'autre de l'interface.



57.) Pour que le cercle de confinement passe par $k_x = k_y = 0$ (propagation libre dans la direction (Oz)), il faut que le cercle de confinement passe par l'origine donc que $\Lambda = \frac{2\pi}{k_{||}}$. Dans un tel cas, toutes les intersections des cercles de confinement avec le disque de propagation libre correspondent à des directions de propagation possibles de l'onde extraite. Sur la figure ci-dessous, les directions de propagation des ondes extraites sont représentées par les valeurs de k_x et k_y correspondant aux arcs colorés en rouge (ordre 1) et en bleu (ordre -1), à compléter par $k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$. On a aussi représenté les cercles de confinement des ordres ± 2 , montrant qu'ils ne contribuent pas à l'extraction de la lumière confinée.



58.) Avec un réseau bidimensionnel, on aura deux translations possibles selon les axes k_x et k_y , ce qui conduit (cf. figure ci-dessous) à extraire d'avantage de directions de propagation libre.

