X-ENS PSI 2006 Physique

Auteurs : Jean-Baptiste Paire
Jean-Marc Vince

Autour des ondes de gravité

I. Ondes de gravité dans un fluide

I.1. Un écoulement parfait est l'écoulement d'un fluide de viscosité nulle.
Pour un fluide visqueux, on a continuité de la vitesse de l'écoulement aux limites et la définition des contraintes appliquées sur le support grâce aux variations du champ des vitesses.
Pour avoir un modèle convenable, il faut travailler dans des zones où les actions de viscosité pourront être négligées devant les autres actions, donc dans des zones où le champ des vitesses varie peu spatialement.
I.2. L'écoulement est supposé incompressible : la masse volumique est supposée constante le long d'une ligne de courant : $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$
Avec la conservation de la masse : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho.\vec{\mathrm{v}}) = 0$ et $\rho =$ constante, on en tire $div(\vec{\mathrm{v}}) = 0$, le champ des vitesses est donc à flux conservatif.
en électromagnétisme : le champ magnétique, et le champ électrique (hors zone chargée)
le vecteur densité de courant (régime stationnaire)
en thermodynamique : le vecteur densité de courant de chaleur (régime stationnaire, hors sources)
I.3. Le rotationnel d'un gradient est toujours nul, donc $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,\phi) = \overrightarrow{rot}(\vec{\mathrm{v}}) = \vec{0}$, le champ des vitesses est donc irrotationnel.
On peut ajouter à ϕ une fonction de gradient nul, donc une fonction de dépendant que du temps pour conserver le même champ des vitesses.
I.4. On a : $div(\vec{\mathrm{v}}) = div(\overrightarrow{grad}\,\phi) = \Delta\phi = 0$ c'est une équation de Laplace.
en électrostatique : $\Delta V = 0$ hors zone chargée
en magnétostatique : $\Delta \vec{A} = \vec{0}$ hors distribution de courant.
en thermodynamique : $\Delta T = 0$ (en régime stationnaire, hors sources).
I.5. La forme proposée représente une onde monochromatique se propageant dans le sens des x croissants, elle n'est pas plane car dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, la grandeur se propageant n'est pas uniforme.
k est la norme du vecteur d'onde, ω est la pulsation. k caractérise la variation spatiale de ϕ, par définition λ est la période spatiale du phénomène, donc : $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$.

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -k^2.\sin(kx-\omega t)f(z) + \sin(kx-\omega t).\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = 0$$

cette équation doit être vérifiée pour tout t et tout x donc : $\dfrac{d^2 f}{dz^2} - k^2.f = 0$
f(z) se présente donc sous la forme : $f(z) = A_1.e^{kz} + A_2.e^{-kz} = \phi_0.[e^{kz} + A.e^{-kz}]$

k représente une grandeur caractéristique de l'évolution spatiale dans les deux cas

sur x : k est lié à la période spatiale du phénomène

sur z : k est lié à une longueur caractéristique de l'évolution spatiale.

I.6. Le fluide est visqueux, on a donc continuité de la vitesse au niveau du fond ($z = -h$), en particulier, $v_z(-h) = 0$, soit $\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z = -h, t) = k.\phi_0.[e^{-kh} - A.e^{+kh}].\sin(kz - \omega t) = 0$

d'où : $\boxed{A = e^{-2kh}}$

I.7. $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ la dérivée temporelle caractérise l'évolution du champ de vitesses en un point donné au cours du temps.

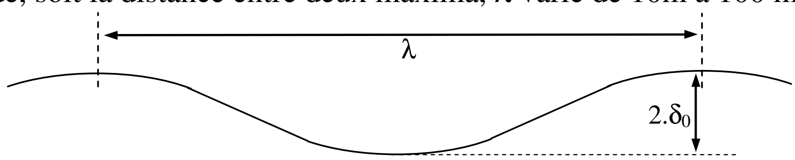
$(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}$ la dérivée convective caractérise l'évolution spatiale du champ des vitesses à date fixée.

Pour un écoulement stationnaire, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est nul en tout point.

Pour un écoulement uniforme non permanent, $(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}$ est nul en tout point.

I.8. δ_0 est l'amplitude des vagues à la surface, soit δ_0 varie de 0,1 m à 1 m

λ la longueur d'onde, soit la distance entre deux maxima, λ varie de 10m à 100 m.



on a bien $\delta_0 << \lambda$

I.9. Les particules fluides effectuent un mouvement sur une longueur de $2\delta_0$ pendant une période soit $v \approx \delta_0.\omega \approx \frac{2\pi\delta_0}{T}$

La variation de la vitesse s'effectue spatialement sur une longueur caractéristique λ, donc $\|(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}\| \approx \frac{v^2}{\lambda}$ et $\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|$ est de l'ordre de $v.\omega \approx v.\frac{v}{\delta_0} = \frac{v^2}{\delta_0}$

or, $\lambda >> \delta_0$ soit $\frac{v^2}{\lambda} << \frac{v^2}{\delta_0}$ soit $\|(\vec{v}.\overrightarrow{grad}).\vec{v}\| << \|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|$

Dans cette approximation, l'équation d'Euler devient : $\boxed{\rho.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho.\vec{g} - \overrightarrow{grad}\, p}$

I.10. L'eau est incompressible, donc ρ = constante (pour une température fixée). On peut diviser membre à membre par ρ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} - \overrightarrow{grad}\frac{p}{\rho}$ soit $\frac{\partial\, \overrightarrow{grad}\, \phi}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(-gz) - \overrightarrow{grad}\frac{p}{\rho}$

donc : $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{0}$ on en tire donc : $\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} = C(t)}$

Cette relation est une conservation de l'énergie massique.

On a montré que la fonction potentiel des vitesses ϕ(t) peut être choisie à une fonction du temps près, on peut donc par choix de cette fonction annuler la fonction $C(t)$ dans l'équation précédente. On travaillera donc avec

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{t}}+gz+\frac{p}{\rho}=0}$$

I.11. on a : $\mathrm{v}_z(z,t)=\frac{D\delta}{Dt}(z,t)=\frac{\partial\delta}{\partial t}(z,t)+(\mathrm{v}_x.\frac{\partial\delta}{\partial x}+\mathrm{v}_z.\frac{\partial\delta}{\partial z})\approx\frac{\partial\delta}{\partial t}(z,t)$ à l'ordre le plus bas.

ordre 1 ordre 2

Or, $\mathrm{v}_z(z,t)\approx \mathrm{v}_z(0,t)+\delta.\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}(0,t)$ par DL à l'ordre un au voisinage de $z=0$.

de plus $\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\approx k.\ \mathrm{v}_z(0,t)=\frac{2\pi}{\lambda}.\ \mathrm{v}_z(0,t)$, dans le DL : $\mathrm{v}_z(z,t)\approx \mathrm{v}_z(0,t)+\frac{\delta}{\lambda}.\ \mathrm{v}_z(0,t)$ avec $\delta << \lambda$ on peut donc raisonnablement affirmer $\mathrm{v}_z(z,t)\approx \mathrm{v}_z(0,t)\approx\frac{\partial\delta}{\partial t}(0,t)$ dans les approximations fixées par l'étude.

I.12. Pour un point M de la surface, on a $p=p_0=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{t}}-\rho gz=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{t}}-\rho g\delta$ par définition de δ.

Par dérivation par rapport au temps : $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\delta}{\partial t}\approx\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g.\mathrm{v}_z(0,t)=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$

avec $\phi(x,z,t)=\phi_0.[e^{kz}+e^{-2kh}.e^{-kz}].\sin(kx-\omega t)$

on en tire $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(x,0,t)=-\phi_0.[1+e^{-2kh}].\omega^2.\sin(kx-\omega t)$

et $\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,0,t)=k.\phi_0.[1-e^{-2kh}].\sin(kx-\omega t)$

soit : $-\phi_0.[1+e^{-2kh}].\omega^2.\sin(kx-\omega t)+g.k.\phi_0.[1-e^{-2kh}].\sin(kx-\omega t)=0$ valable pour tout t et tout x.

donc : $[1+e^{-2kh}].\omega^2=g.k.[1-e^{-2kh}]$ et $\boxed{\omega^2=g.k.th(k.h)}$

I.13. En eau peu profonde, on a $k.h << 1$, la hauteur d'eau est petite devant la longueur d'onde : soit th(kh) $\approx k.h$ l'équation de dispersion devient $\omega^2\approx g.k^2.h$ soit $\omega\approx k.\sqrt{g.h}$.

Au premier ordre, la vitesse de phase $\boxed{\mathrm{v}_\varphi=\frac{\omega}{k}=\sqrt{g.h}}$ et la vitesse de groupe $\boxed{\mathrm{v}_g=\frac{d\omega}{dk}=\sqrt{g.h}}$

I.14. La dispersion d'une onde provient du fait que les différentes composantes d'un "paquet" d'onde (onde réelle, non monochromatique) ne se propagent pas à la même vitesse, le paquet a donc tendance à "s'étaler" dans le temps et dans l'espace au cours de la propagation.

Dans le cas général, la vitesse de phase est une fonction de k donc de λ, le milieu est donc dispersif.

En eau peu profonde, la vitesse de phase ne dépend plus de k, les différentes fréquences vont se propager à la même vitesse, le milieu n'est plus dispersif.

Ordre de grandeur $\lambda\approx 10$ m, on doit avoir $h << \lambda$, on choisit $h\approx 1$ m, soit $\mathrm{v}_\varphi\approx 3\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

I.15. Dans l'hypothèse de $h=h(x)$, le nouveau potentiel des vitesses se met sous la forme : $\phi(x,z,t)=\phi_0.[e^{kz}+e^{-2kh(x)}.e^{-kz}].\sin(kx-\omega t)$, pour que l'étude précédente reste valable, il faut négliger l'influence de x dans le terme entre crochets, devant le terme sinusoïdal :

On dérive donc par rapport à x pour juger du rapport d'importance de ces deux termes :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,z,t)=k.\phi_0.[e^{kz}+e^{-2kh(x)}.e^{-kz}].\cos(kx-\omega t)+\phi_0[-2k.\frac{dh(x)}{dx}.e^{-2.k.h(x)}.e^{-k.z}].\sin(k.x-\omega t)$$

il faut que le second terme soit négligeable devant le premier soit : $\left|e^{kz}+e^{-2kh(x)}.e^{-kz}\right| >> \left|2.\frac{dh(x)}{dx}.e^{-2.k.h(x)}.e^{-k.z}\right|$

soit $\left|e^{2kz}+e^{-2kh(x)}\right| >> \left|2.\frac{dh(x)}{dx}.e^{-2.k.h(x)}\right|$, soit au pire $\left|e^{-2kh(x)}\right| >> \left|2.\frac{dh(x)}{dx}.e^{-2.k.h(x)}\right|$ donc $1 >> \left|\frac{dh(x)}{dx}\right|$, la distance caractéristique de variation de la profondeur est *d* la condition recherchée est donc $\boxed{h >> d}$

(ce qui était prévisible du fait que si *h* est très grand, sa contribution dans le potentiel des vitesses disparaît, en cas de grandes profondeur, la planéïté de celle-ci n'est pas importante).

I.16. Lorsque l'onde est proche du rivage, l'étude précédente est fausse : on a augmentation de l'amplitude de la vague (par conservation du débit). De plus, la variation de hauteur (par rapport au sol) entre le haut de la vague et le bas de la vague est significatif, la variation de vitesse de propagation aussi, (la vitesse de groupe ou de phase est en $\sqrt{h}$) le haut de la vague se déplace plus vite que le bas de la vague, et on a déferlement.

I.17. Les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen (relativité galiléenne). Ici dans le référentiel R' en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse : $\frac{1}{2}.(U_1+U_2).\vec{u}_x$ par rapport à R_T, on aura les vitesse des fluides :

$$\vec{v}'_{1,\infty} = U_1.\vec{u}_x - \tfrac{1}{2}(U_1+U_2).\vec{u}_x = \tfrac{1}{2}(U_1-U_2).\vec{u}_x$$

$$\vec{v}'_{2,\infty} = U_2.\vec{u}_x - \tfrac{1}{2}(U_1+U_2).\vec{u}_x = -\tfrac{1}{2}(U_1-U_2).\vec{u}_x$$

I.18. σ est homogène à l'inverse d'un temps. On a $\sigma = \sigma_R + i.\sigma_C$

On a donc σ_C présent dans une exponentielle complexe, assimilable à une pulsation, σ_R présent dans une exponentielle réelle, assimilable à un $1/\tau$, τ représentant une durée caractéristique d'un régime transitoire.

I.19. à $t=0$, l'onde est périodique de période spatiale λ, soit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Avec l'expression donnée dans le texte, on obtient $\sigma^2 = k^2.U^2 =$ soit $\boxed{\sigma = \pm\frac{2\pi}{\lambda}.U}$, avec $U > 0$

donc $\underline{\delta}(x,t)$ = A.exp[$-i.kx + \frac{2\pi}{\lambda}.U.t$] + B. exp[$-i.kx - \frac{2\pi}{\lambda}.U.t$], dans le cas où A est non nul, on aura divergence de l'amplitude de la perturbation avec le temps.

Plus la longueur d'onde est courte plus l'évolution temporelle est rapide.

I.20. On parle d'instabilité lorsque $\delta = 0$ est une position d'équilibre, mais la moindre perturbation sera amplifiée jusqu'à la divergence (dans le modèle d'équations choisi).

On peut avoir ce phénomène en électronique (contre réaction positive : effet "Larsen" en HiFi par exemple).

I.21. le terme en $\frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{\rho_1\rho_2}$ est sans dimensions. $\frac{g}{k}$ est en $L.T^{-2}$ x L soit en $L^2.T^{-2}$ c'est bien le carré d'une vitesse.

Si $\rho_2 > \rho_1$ alors il existe une vitesse seuil en dessous de la quelle il n'y a pas d'instabilité.

Si $\rho_1 \geq \rho_2$ alors il y a instabilité quelque soit la vitesse.

Dans le cas de l'air sur l'eau, on a $\rho_2 \approx 10^3$ kg.m^{-3} et $\rho_1 \approx 1$ kg.m^{-3} soit $\dfrac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1\rho_2} \approx 10^3$.

On a instabilité pour $U^2 > \dfrac{10^4}{k} \approx 10^3.\lambda$ soit $\lambda < 0{,}8$ m. Les vagues seront donc caractérisées par des petites longueurs d'onde.

II. Ressaut hydraulique

II.22. Le problème est monodimensionnel. On travaille pour une largeur ℓ. Le système est le fluide compris entre les abscisses x et $x + dx$. on effectue un bilan de matière entre t et $t+dt$.

$M(t+dt) - M(t) = \rho.\ \ell.h(x).\mathrm{v}(x).dt - \rho.\ \ell.h(x+dx).\mathrm{v}(x+dx).dt = 0$ car le régime permanent est établi.

Soit $\ell.h(x).\mathrm{v}(x).dt = \ell.h(x+dx).\mathrm{v}(x+dx) = D(x)$ le débit volumique.

On en tire donc que le débit volumique est indépendant du temps et de l'espace.

II.23. Avec l'équation d'Euler : $\rho.\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \rho.(\vec{\mathrm{v}}.\overrightarrow{grad}).\vec{\mathrm{v}} = \rho.\vec{g} - \overrightarrow{grad}\ p$

avec le formulaire fourni : $\rho.\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \rho.\ \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{\mathrm{v}^2}{2}\right) + \rho.\ \overrightarrow{rot}\ \vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{\mathrm{v}} = \rho.\vec{g} - \overrightarrow{grad}\ p$

or, ici, le régime permanent est établi : $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} = \vec{0}$, et $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}(x)\vec{u}_x$ soit $\overrightarrow{rot}\ \vec{\mathrm{v}} = \vec{0}$

Si le fluide est incompressible, alors $\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{\mathrm{v}^2}{2}\right) = \vec{g} - \overrightarrow{grad}\dfrac{p}{\rho} = -\overrightarrow{grad}\left(gz + \dfrac{p}{\rho}\right)$

Soit la relation de Bernoulli : $\boxed{\dfrac{\mathrm{v}^2}{2} + gz + \dfrac{p}{\rho} = Cste}$

Pour le fluide à la surface : $\boxed{\dfrac{\mathrm{v}(x)^2}{2} + gz_{surface}(x) + \dfrac{p_0}{\rho} = Cste}$

II.24. au niveau de l'obstacle $z_{surface}(x) = h(x) + e_0(x)$, loin de l'obstacle : $z_{surface}(x) = h$.

On en tire : $\dfrac{\mathrm{v}(x)^2}{2} + g(h(x) + e_0(x)) + \dfrac{p_0}{\rho} = \dfrac{\mathrm{v}^2}{2} + g.h + \dfrac{p_0}{\rho}$ soit $\dfrac{\mathrm{v}(x)^2}{2} + g(h(x) + e_0(x)) = \dfrac{\mathrm{v}^2}{2} + g.h$

On dérive membre à membre par rapport à x:

$\mathrm{v}(x).\dfrac{d\mathrm{v}(x)}{dx} + g.\left(\dfrac{dh(x)}{dx} + \dfrac{de_0(x)}{dx}\right) = 0$

de plus avec le débit : $\dfrac{d(h(x).\mathrm{v}(x))}{dx} = \dfrac{dh(x)}{dx}.\mathrm{v}(x) + h(x).\dfrac{d\mathrm{v}(x)}{dx} = 0$

Soit : $\mathrm{v}(x).\dfrac{d\mathrm{v}(x)}{dx} + g.\left(-\dfrac{h(x)}{\mathrm{v}(x)}\dfrac{d\mathrm{v}(x)}{dx} + \dfrac{de_0(x)}{dx}\right) = 0$

en réarrangeant et en "primant" les dérivées : $\dfrac{\mathrm{v}'(x)}{\mathrm{v}(x)}(\mathrm{v}^2(x) - g.h(x)) + g.e'_0(x) = 0$

II.25. les dimensions sont les suivantes : $(h) = \mathrm{L}$; $(\mathrm{v}) = \mathrm{L.T^{-1}}$; $(g) = \mathrm{L.T^{-2}}$; $(\rho) = \mathrm{M.L^{-3}}$

La grandeur $h.g.\mathrm{v}^{-2}$ est sans dimension, donc $\left(\dfrac{h.g}{\mathrm{v}^2}\right)^{\alpha}$ est sans dimension.

II.26. En x_0 l'obstacle est de hauteur maximale, donc $e'_0(x_0) = 0$, la vitesse de l'écoulement y est non nulle (conservation du débit), on obtient en ce point : $\mathrm{v}'(x_0).(\mathrm{v}^2(x_0) - g.h(x_0)) = 0$

donc il n'y a que deux possibilités : $\dfrac{d\mathrm{v}}{dx}(x_0) = 0$

$\mathrm{v}^2(x_0) = g.h(x_0)$

II.27. Cas *(i)* : $\dfrac{d\mathrm{v}}{dx}(x_0) = 0$: avec la conservation du débit : $\dfrac{dh}{dx}(x_0).\mathrm{v}(x_0) = -h(x_0).\dfrac{d\mathrm{v}}{dx}(x_0) = 0$

donc $\dfrac{dh}{dx}(x_0) = 0$ la hauteur de l'écoulement est extrémale.

<u>Le cas est le cas *(a)* avec $h(x_0)$ minimal, et donc $\mathrm{v}(x_0)$ maximale</u> (débit constant).

$Fr(x) = \dfrac{h.\mathrm{v}/h(x)}{\sqrt{g.h(x)}} = \dfrac{h.\mathrm{v}}{\sqrt{g}h(x)^{3/2}}$ le nombre de Froude est une fonction décroissante de $h(x)$. Comme $h(x_0)$ est minimum, le nombre de Froude est maximum en x_0.

II.28. Cas *(ii)* : $\mathrm{v}^2(x_0) - g.h(x_0) = 0$: le nombre de Froude vaut donc 1 en x_0

Le texte précise que dans le cas *(b)* la hauteur du fluide baisse très nettement et est minimale juste après l'obstacle.

avec la conservation du débit, on a $\mathrm{v}(x)$ qui augmente pour $x > x_0$ et $h(x)$ qui diminue,

soit $\mathrm{v}^2(x) - g.h(x)$ qui augmente pour $x > x_0$. $\mathrm{Fr}(x>x_0)$ est donc croissant donc <u>$\mathrm{Fr}(x>x_0) > 1$</u>

pour $x < x_0$, $h(x)$ décroît, $\mathrm{v}^2(x)$ augmente, $\mathrm{Fr}(x<x_0)$ est également croissant <u>: $\mathrm{Fr}(x<x_0) < 1$</u>

<u>conclusion :</u> $x < x_0$: $\mathrm{v}'(x) > 0$ (car $h'(x) < 0$); $-g.h(x) + \mathrm{v}^2(x) < 0$; $e'_0(x) > 0$

$x > x_0$: $\mathrm{v}'(x) > 0$ (car $h'(x) > 0$); $-g.h(x) + \mathrm{v}^2(x) > 0$; $e'_0(x) < 0$

II.29. Cas *(b)* Fr > 1 après l'obstacle, on un régime turbulent.

Cas *(a)* : $x < x_0$ on a $\mathrm{v}'(x) > 0$, $e'_0(x) > 0$ donc $-g.h(x) + \mathrm{v}^2(x) < 0$ soit Fr < 1

$x > x_0$ on a $\mathrm{v}'(x) < 0$, $e'_0(x) < 0$ donc $-g.h(x) + \mathrm{v}^2(x) < 0$ soit Fr < 1

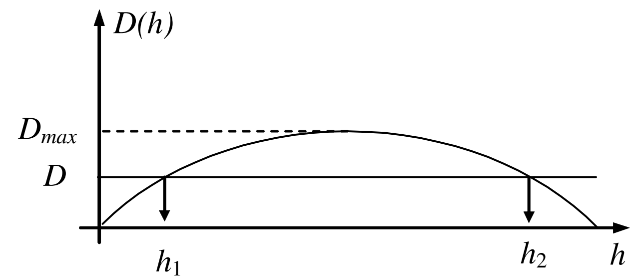
pour le cas *(a)* Fr < 1 et le régime reste laminaire

Le nombre de Froude donne donc un critère de séparation entre les régimes laminaires et turbulents.

II.30. $B = \dfrac{\mathrm{v}^2}{2} + g.h$ est l'énergie mécanique massique d'une particule fluide située à la surface du fluide. On a deux équations : $D = \mathrm{v}(x).h(x)$ et $B = \dfrac{\mathrm{v}^2}{2} + g.h$ soit $\mathrm{v}(x) = \sqrt{2(B - g.h(x))}$ car la vitesse est toujours positive dans l'écoulement, on injecte dans $D = h(x).\sqrt{2(B - g.h(x))}$

On cherche le maximum de la fonction $h(x).\sqrt{2(B - g.h(x))}$ que l'on obtient pour $h_{\max} = \dfrac{2B}{3g}$ et la valeur du maximum $D_{\max} = \dfrac{2}{3}.\sqrt{\dfrac{2}{3}}.B^{3/2}$.

Si $D < D_{max}$ on a bien deux solutions pour h :



II.31. On a : $\mathrm{Fr}_1 = \dfrac{v_1^2}{g.h_1}$, $\mathrm{Fr}_2 = \dfrac{v_2^2}{g.h_2}$, et les relations $D = v_1.h_1 = v_2.h_2$ et $B = \dfrac{v_1^2}{2} + g.h_1 = \dfrac{v_2^2}{2} + g.h_2$

avec B : $\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2} + g.(h_1 - h_2) = 0$ et avec D : $h_1 - h_2 = \left(\dfrac{v_2}{v_1} - 1\right).h_2$ donc : $\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2} = g.\dfrac{h_2}{v_1}(v_1 - v_2)$

après simplification par $v_2 - v_1$ ($\neq 0$) : $v_2 + v_1 = 2.g.\dfrac{h_2}{v_1}$ soit $v_1.(v_2 + v_1) = 2.\dfrac{v_2^2}{\mathrm{Fr}_2^2}$

soit : $\dfrac{v_1^2}{v_2^2} + \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{2}{\mathrm{Fr}_2^2}$ or avec le débit : $\mathrm{Fr}^2 = \dfrac{v^3}{g.D}$ donc $\dfrac{v_1^2}{v_2^2} = \dfrac{\mathrm{Fr}_1^{4/3}}{\mathrm{Fr}_2^{4/3}}$ et $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\mathrm{Fr}_1^{2/3}}{\mathrm{Fr}_2^{2/3}}$

on en tire l'expression cherchée : $\dfrac{\mathrm{Fr}_1^{4/3}}{\mathrm{Fr}_2^{4/3}} + \dfrac{\mathrm{Fr}_1^{2/3}}{\mathrm{Fr}_2^{2/3}} = \dfrac{2}{\mathrm{Fr}_2^2}$ soit : $\mathrm{Fr}_1^{4/3}.\mathrm{Fr}_2^{2/3} + \mathrm{Fr}_1^{2/3}.\mathrm{Fr}_2^{4/3} = 2$

et après mise en facteur : $\mathrm{Fr}_1^{2/3}.\mathrm{Fr}_2^{2/3}.(\mathrm{Fr}_1^{2/3} + \mathrm{Fr}_2^{2/3}) = 2$

II.2. Tuyère convergente divergente .

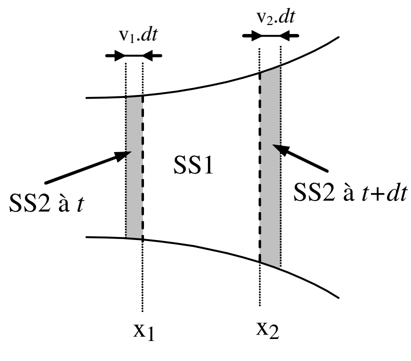
II.32. Un écoulement parfait se fait sans viscosité, donc sans phénomènes dissipatifs, il est donc isentropique. On peut de plus supposer que celui-ci est suffisamment rapide pour négliger tout échange de chaleur, on peut donc raisonnablement supposer que le gaz subit des transformations adiabatiques réversibles.

L'écoulement est réversible, on peut appliquer l'identité thermodynamique pour une transformation élémentaire dans l'écoulement soit dU = T.dS − p.dV = − p.dV car dS = 0 du fait de la transformation adiabatique réversible (pas d'échange, pas de création).

Le gaz est parfait : $\mathrm{dU} = \dfrac{n.}{\gamma - 1}\mathrm{RdT} = \dfrac{p.dV + V.dp}{\gamma - 1} = -p.dV$ *soit* $\gamma.p.dV + V.dp = 0$

Le système des n moles étudiées est fermé donc de masse m constante : $\rho = \dfrac{m}{V}$. Après différentielle logarithmique, on obtient : $\dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{dV}{V}$ donc $\boxed{-\gamma.\dfrac{d\rho}{\rho} + \dfrac{dp}{p} = 0}$

II.33. Système : Le gaz présent entre les sections d'abscisses x_1 et x_2 à la date t + le gaz qui y entre entre t et $t + dt$ (= qui sort entre t et $t + dt$ car le régime est permanent).



On applique le premier principe dans le référentiel de la tuyère supposé galiléen entre les dates t et $t + dt$:

$U(t+dt) - U(t) + K(t+dt) - K(t) = \delta W + \delta Q$.

<u>Calcul de δQ</u> : δQ = 0 car on a supposé qu'il n'y avait pas d'échanges thermiques.

<u>Calcul de δW</u> : le système est en contact avec le gaz placé en amont, le gaz placé en aval et les parois.

L'action des parois sur le gaz ne travaille pas car l'écoulement est supposé parfait, donc sans viscosité. L'action des parois est donc perpendiculaire à la vitesse du fluide, le travail est donc nul.

L'action du gaz amont : celui-ci exerce une force $\vec{F}_1 = p_1.S_1.\vec{u}_x$ sur le système. La section se déplace de $v_1.dt.\vec{u}_x$ entre t et $t+dt$, le système reçoit donc un travail $\delta W_1 = p_1.S_1.v_1.dt$.

L'action du gaz aval : celui-ci exerce une force $\vec{F}_2 = -p_2.S_2.\vec{u}_x$ sur le système. la section se déplace de $v_2.dt.\vec{u}_x$ entre t et $t+dt$, le système reçoit un travail $\delta W_2 = -p_2.S_2.v_2.dt$

On sépare le système en deux sous-systèmes :

Le SS1 représenté par le gaz présent à la date t ou à la date $t+dt$ entre les sections d'abscisses x_1 et x_2. Comme le régime permanent est établi, il n'y a pas de modification macroscopique de son état, on aura donc $U_{SS1}(t) = U_{SS1}(t+dt)$ et $K_{SS1}(t) = K_{SS1}(t+dt)$

Le SS2 est le complémentaire du SS1 dans le système complet : c'est donc le gaz présent dans le volume $d\tau_1 = S_1.v_1.dt$ à la date t (le gaz qui traverse la section S_1 entre t et $t+dt$), c'est aussi le gaz présent dans le volume $d\tau_2 = S_2.v_2.dt$ (le gaz qui traverse la section S_2 entre t et $t+dt$).

dans le premier principe, il reste donc : $U_{SS2}(t+dt) - U_{SS2}(t) + K_{SS2}(t+dt) - K_{SS2}(t) = \delta W_1 + \delta W_2$

soit $U_{SS2}(t+dt) - U_{SS2}(t) + K_{SS2}(t+dt) - K_{SS2}(t) = p_1.S_1.v_1.dt - p_2.S_2.v_2.dt = p_1.d\tau_1 - p_2.d\tau_2$

$$= (pV)_{SS2}(t) - (pV)_{SS2}(t+dt)$$

ramené au SS2 , on aura donc : $[U + pV](t) + K(t) = [U + pV](t+dt) + K(t+dt) = \text{Cste}$

en divisant par la masse du SS2, on en tire : $\boxed{h(x) + ½.v^2(x) = \text{Cste}}$

Le gaz est parfait, on a : $h(x) = \dfrac{R.\gamma}{M(\gamma-1)}T(x)$

En différentiant, on obtient : $\boxed{\dfrac{R.\gamma}{M(\gamma-1)}.dT + v.dv = 0}$

II.34. On effectue une différentielle logarithmique de la loi des gaz parfaits : $\dfrac{dp}{p} + \dfrac{dV}{V} = \dfrac{dT}{T}$ que l'on transforme avec ρ : $\dfrac{dp}{p} - \dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{dT}{T}$ avec **32.** on obtient : $(\gamma-1).\dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{dT}{T}$ et avec **34.** $(\gamma-1).\dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{M.(\gamma-1)}{\gamma.R.T}.v.dv$ et en introduisant la vitesse du son : $c = \sqrt{\dfrac{\gamma.R.T(x)}{M}}$

soit : $\boxed{\dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{v^2}{c^2}.\dfrac{dv}{v}}$

II.35. On effectue un bilan massique pour le volume compris entre les sections d'abscisses x et $x+dx$. Le régime permanent étant atteint, on peut écrire que entre t et $t+dt$, tout ce qui entre = tout ce qui sort, soit $S(x).v(x).\rho(x) = S(x+dx).v(x+dx).\rho(x+dx)$, $S(x).v(x).\rho(x) = \text{Cste}$ et on effectue une dérivée logarithmique soit : $\dfrac{dS}{S} + \dfrac{dv}{v} + \dfrac{d\rho}{\rho} = 0$, on remplace par l'expression obtenue à la question précédente pour obtenir : $\boxed{\dfrac{dS}{S} + \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\dfrac{dv}{v} = 0}$

II.36. Si l'écoulement est incompressible, alors $\rho = \text{Cste}$ et donc $\dfrac{dS}{S} + \dfrac{dv}{v} = 0$.

Pour un écoulement incompressible il faut donc $v(x) << c$.

Pour les écoulements usuels concernant l'eau, les vitesses d'écoulement sont très lentes devant la vitesse du son dans l'eau (≈1500 m.s^{-1}), l'hypothèse v << c est vérifiée, l'écoulement peut être considéré comme incompressible;

II.37. $M(x) = \dfrac{\mathrm{v}(x)}{c} = \dfrac{\mathrm{v}(x)}{\sqrt{\gamma \dfrac{RT}{M}}}$ le nombre de Mach au carré apparaît comme le rapport de l'énergie cinétique massique sur une grandeur proportionnelle à l'énergie thermique massique, comme le nombre de Froude au carré apparaît comme le rapport entre l'énergie cinétique massique et l'énergie potentielle massique d'une particule fluide à la surface du liquide. Dans les deux cas, ce sont bien des rapports entre l'énergie cinétique et une énergie caractéristique de l'écoulement.

On obtient ici des valeurs seuils correspondant aux deux types d'écoulements possibles :

avec le nombre de Froude : Fr > 1 : turbulent, Fr < 1 : laminaire

avec le nombre de Mach : M > 1 : compressible, M < 1 : incompressible

II.38. Au col de la tuyère $\dfrac{dS}{dx} = 0$, donc en ce point $\left(1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\dfrac{d\mathrm{v}}{dx} = 0$, soit deux possibilités :

soit : $\dfrac{d\mathrm{v}}{dx} = 0$ la vitesse est extrémale, *soit :* $\left(1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) = 0$ donc v = c

Si la vitesse reste inférieure à la vitesse du son, le fluide ne pourra pas être accéléré après le col (cas incompressible), si par contre, la vitesse est supersonique le fluide sera accéléré tout au long de la tuyère. On a un seuil sur le nombre de Mach comme dans la partie précédente.

II.39. Si M > 1 : l'écoulement est supersonique (on pourra avoir une onde de choc).

II.40. Comme vu précédemment, on a un seuil entre les deux cas de figure :

si M < 1 dans tout l'écoulement, alors on aura accélération avant le col, puis décélération du fluide, si par contre M > 1, on a accélération dans la partie qui s'évase de la tuyère.

Le critère de seuil est donc sur le nombre de Mach, comme précédemment, on avait un critère de seuil sur le nombre de Froude.

II.3. Ressaut hydraulique dans un évier.

II.41. On applique l'équation d'Euler au fluide sur l'une de ces deux verticales :

$$\rho . \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}} + \rho . (\vec{\mathrm{v}} . \overrightarrow{grad}) . \vec{\mathrm{v}} = \rho . \vec{g} - \overrightarrow{grad}\, p$$

Or, ici, l'écoulement est permanent : $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}} = \vec{0}$ et on suppose $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}.\vec{u}_x$ au niveau de ces verticales, donc $(\vec{\mathrm{v}} . \overrightarrow{grad}) . \vec{\mathrm{v}} = \vec{0}$, il ne reste dans l'équation d'Euler que $\rho . \vec{g} - \overrightarrow{grad}\, p = \vec{0}$ qui est bien la loi de l'hydrostatique.

On obtient par intégration sur [A,B] : $p(z) = -\rho g(z-h_1) + p_0$, sur [A',B'] : $p(z) = -\rho g(z-h_2) + p_0$

II.42. On prend comme système ce qu'il y a dans la surface de contrôle (ABCB'A') sur une profondeur ℓ sur Oy, et on fait un bilan de la quantité de mouvement entre t et $t+dt$:

D$\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)$ + ce qui entre (entre t et t+dt) – ce qui sort (entre t et $t+dt$)

$= \vec{0}$ (régime permanent) + flux de $\vec{P}$ sur [A,B] x dt – flux de $\vec{P}$ sur [A',B'] x dt

Or flux de $\vec{P}$ sur [A,B] x dt = volume entrant pendant dt x quantité de mouvement volumique dans ce volume = $v_1.\ dt\ .\ell.h_1.\ \rho.v_1.\vec{u}_x$

On en tire donc $D\vec{P} = \ell.h_1.\ \rho.v_1^2.dt.\ \vec{u}_x - \ell.h_2.\ \rho.v_2^2.dt.\vec{u}_x$

On applique le Théorème de le résultante cinétique au système que l'on projette sur $\vec{u}_x$:

$$\ell.h_1.\ \rho.v_1^2 - \ell.h_2.\ \rho.v_2^2 = \ell.\left[\int_0^{h_1}\rho g(h_1 - z).dz - \int_0^{h_2}\rho g(h_2 - z).dz\right] \text{ car } \oiint_{\textit{surface fermée}} p_0.d\vec{S} = \vec{0}$$

Après calculs et simplification par ρ et ℓ :

$$\boxed{v_1^2.h_1 - v_2^2.h_2 = \frac{1}{2}.g.\left(h_2^2 - h_1^2\right)}$$

II.43. L'écoulement est supposé incompressible, on a donc conservation du débit : on écrit que le débit traversant [A,B] = débit traversant [A',B'] (toujours pour une largeur ℓ sur Oy) :

$$\ell.h_1.v_1 = \ell.h_2.v_2 \text{ donc } \boxed{h_1.v_1 = h_2.v_2}$$

Avec les deux équations encadrées, on obtient

$$\boxed{v_1^2 = \frac{1}{2}.g.\frac{h_2}{h_1}.\left(h_2 + h_1\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{v_2^2 = \frac{1}{2}.g.\frac{h_1}{h_2}.\left(h_2 + h_1\right)}$$

II.44. Avec la conservation du débit : $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{h_2}{h_1}$, si $h_1 < h_2$ alors $v_1 > v_2$.

On calcule les nombres de Froude en fonction des hauteurs h_1 et h_2 :

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g.h_1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}.g.\frac{h_2}{h_1}.\left(h_2 + h_1\right)}}{\sqrt{g.h_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}.\frac{h_1 + h_2}{2.h_1}} \text{ et de même : } Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{g.h_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}.\frac{h_1 + h_2}{2.h_2}}$$

Or, $h_2 > h_1$ donc $2.h_2 > h_1 + h_2 > 2.h_1$ soit $\dfrac{h_2}{h_1} > 1$ et $\dfrac{h_1 + h_2}{2.h_1} > 1$

Dans les expressions ci-dessus on en tire : <u>$Fr_1 > 1$ et $Fr_2 < 1$</u>

II.45. Dans un évier, on a $v_1 \approx 1\ m.s^{-1}$; $h_1 \approx 1$ mm ; $g \approx 10\ m.s^{-2}$ soit $Fr_1 \approx 10$ ce qui donne bien une valeur supérieure à 1.

II.46. on se trouve dans le cas d'un nombre de Froude supérieur à 1, l'écoulement présente le même aspect que sur la figure **6** dans le cas *(b)* juste après l'obstacle.

II.47. avec la question **44.** on a $Fr_1 = \sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}.\dfrac{h_1 + h_2}{2.h_1}} = \sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}.\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{h_2}{h_1} + 1\right)}$ on pose $x = \dfrac{h_2}{h_1}$ et on obtient l'équation : $x^2 + x - 2.Fr_1^2 = 0$ soit $x = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8.Fr_1^2}}{2} \approx Fr_1 \approx \dfrac{h_2}{h_1}$ donc $\dfrac{h_2}{h_1} \approx 10$.

II.48. Le ressaut hydraulique dans un évier est un problème approximativement à symétrie cylindrique, si le fond de l'évier est plat, et les bords situés "à grande distance". On peut se ramener à un problème unidimensionnel si le rayon r est grand devant la distance AA'. ce qui est vérifié par l'expérience avec un $r \approx 5$ cm et AA' ≈ 1 cm.