DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures

Sujet

Onde thermique

I. Étude de la diffusion thermique

On cherche à étudier le phénomène de diffusion thermique dans une barre cylindrique de cuivre, de diamètre $d=15,0\,mm$ et de conductivité thermique λ. À cet effet, on creuse une cavité à l'extrémité de la barre pour y placer une résistance chauffante $R_{ch}=8,00\,\Omega$. Cette résistance est alimentée par un générateur délivrant une tension continue $U_0=6,00\,V$. Afin de rendre les pertes thermiques par la face latérale du cylindre négligeables, le barreau de cuivre est isolé latéralement par une matière plastique de conductivité thermique suffisamment faible par rapport à celle du cuivre. La mesure de température se fait par l'intermédiaire de petits capteurs logés dans des puits creusés latéralement en divers points du cylindre conducteur. Un dispositif de refroidissement par circulation d'eau est placé à l'autre extrémité de la barre de telle sorte que la température du cuivre y soit égale à $20,0\,°C$.

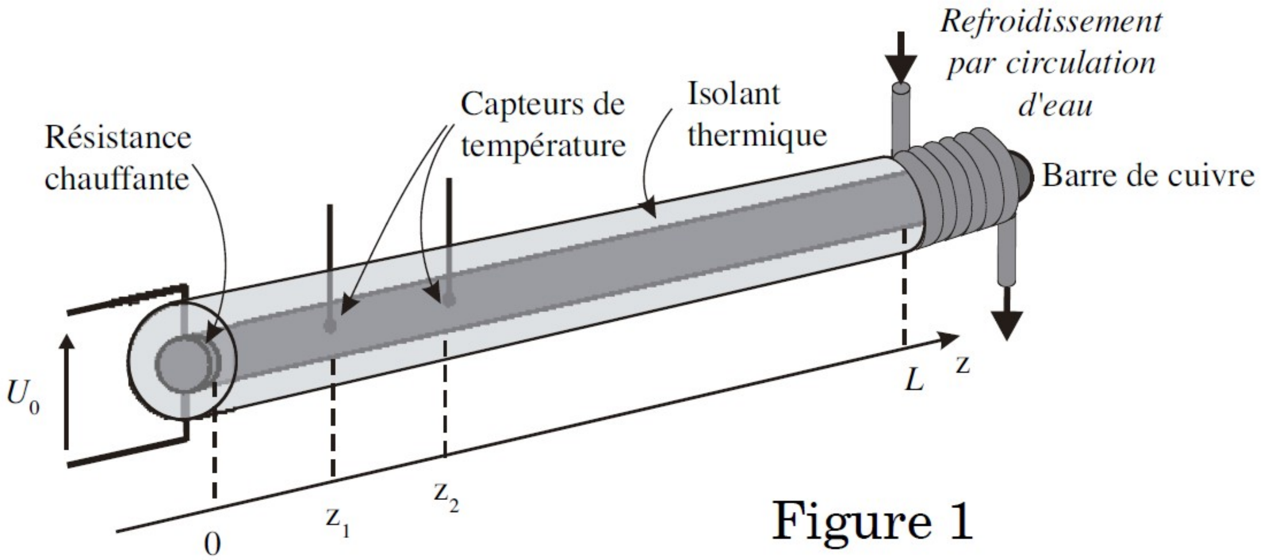


Figure 1

A. Étude du régime stationnaire

1) Expression du vecteur densité de courant thermique

On se place tout d'abord en régime stationnaire et on suppose que la température, considérée uniforme dans une section droite de la barre, ne dépend que de la position z.

1. Quel est a priori la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{grad}\,T$?
2. Rappeler la loi de Fourier donnant l'expression du vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$. Préciser la signification des différents termes ainsi que leur dimension respective.
3. Exprimer la puissance fournie par l'alimentation continue à la résistance chauffante.
4. En supposant que cette puissance est intégralement transférée à la barre située dans la partie $z>0$, exprimer $\vec{j}_Q(z=0)$ en fonction de R_{ch}, U_0 et d.

2) Évolution de la température dans la barre

5. Montrer que $\vec{j}_Q$ est uniforme dans la barre. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(z)$.

6. Exprimer littéralement $T(z)$ en fonction des données ci-dessus et de $T(L)$.

7. Les deux capteurs de température placés en $z_1=8\,cm$ et $z_2=16\,cm$ indiquent $T_{p1}=46,4\,°C$ et $T_{p2}=41,4\,°C$. Donner l'expression de la conductivité thermique du cuivre λ et calculer sa valeur numérique.

8. Le refroidissement à l'extrémité de la barre est assuré par une circulation d'eau de débit volumique d_v (en $m^3 \cdot s^{-1}$). En négligeant les fuites thermiques latérales, exprimer grâce à un raisonnement simple la variation de température de l'eau lors de la traversée du système de refroidissement. On pourra introduire la masse volumique et la capacité thermique massique de l'eau.

B. Équation d'évolution de la température en régime variable

Le générateur délivre maintenant une tension $U(t)$, ce qui entraîne une variation temporelle de la température en chaque point du barreau. Néanmoins, on conserve l'hypothèse d'uniformité de la température dans une section droite de la barre, ce qui permet d'écrire la température en un point sous la forme $T(z,t)$).

1) Analyse qualitative

9. D'une manière générale, le phénomène de diffusion thermique ne peut faire intervenir que les caractéristiques pertinentes du matériau, à savoir la conductivité thermique λ , la capacité thermique massique à pression constante $c_P=380\,J.kg^{-1}.K^{-1}$ et la masse volumique $\rho=8870\,kg\cdot m^{-3}$. Construire grâce à l'analyse dimensionnelle un coefficient de diffusion D exprimé en $m^2.s^{-1}$ à partir de ces trois grandeurs en justifiant la démarche utilisée.

10. Le coefficient de diffusion D peut s'exprimer directement en fonction de la résistance thermique linéique r_{th} (résistance thermique par unité de longueur de la barre) et de la capacité thermique linéique c_{th} . Exprimer r_{th} et c_{th} et donner l'expression de D faisant intervenir ces deux grandeurs. Pour le cuivre, la valeur numérique du coefficient de diffusion D est $D=1,19\cdot 10^{-4} m^2\cdot s^{-1}$.

11. En utilisant les dimensions rappelées plus haut du coefficient de diffusion, trouver l'ordre de grandeur Δt , de la durée nécessaire pour qu'une modification brutale de la température en un point d'abscisse z_1 atteigne un point d'abscisse $z_2=z_1+\Delta z$? La barre de cuivre utilisée a une longueur $L=0,5\,m$. Donner une estimation de la durée du régime transitoire précédant le régime stationnaire étudié précédemment. Quelles conséquences pratiques peut-on en déduire ?

2) Équation de la chaleur

12. Établir l'équation de diffusion thermique, dite « équation de la chaleur », à partir d'un bilan énergétique effectué pour la portion de barre comprise entre z et $z+dz$.

13. Pourquoi, à partir de la forme de cette équation aux dérivées partielles, peut-on dire que le phénomène de diffusion thermique est irréversible ?

C. « Ondes thermiques »

Dans cette partie, la tension délivrée par le générateur est sinusoïdale : $U(t)=U_0\sqrt{2}\cos(\Omega t)$.

Dans ce cas, en régime périodique établi, la réponse de chaque capteur oscille autour d'une valeur moyenne spécifique à chacun d'entre eux : $T(z,t)=T_p(z)+\theta_m(z)\cos(\omega t+\varphi(z))$. On remarquera que $\varphi(z)$ est donc négatif dans le cas d'un retard.

14.Déduire de l'équation de la chaleur, l'équation différentielle vérifiée par $T_p(z)$ et l'équation différentielle vérifiée par $\theta(z,t)=\theta_m(z)\cos(\omega t+\varphi(z))$.

15.Mettre la puissance électrique dissipée dans la résistance chauffante sous la forme $p(t)=P_0+P_0\cos(\omega t)$ en explicitant P_0 en fonction de U_0 et R_{ch} . Relier ω et Ω .

La *figure* 2 représente les graphes des fonctions $T(z_1,t)$ et $T(z_2,t)$ avec $z_1=8\,cm$ et $z_2=16\,cm$.

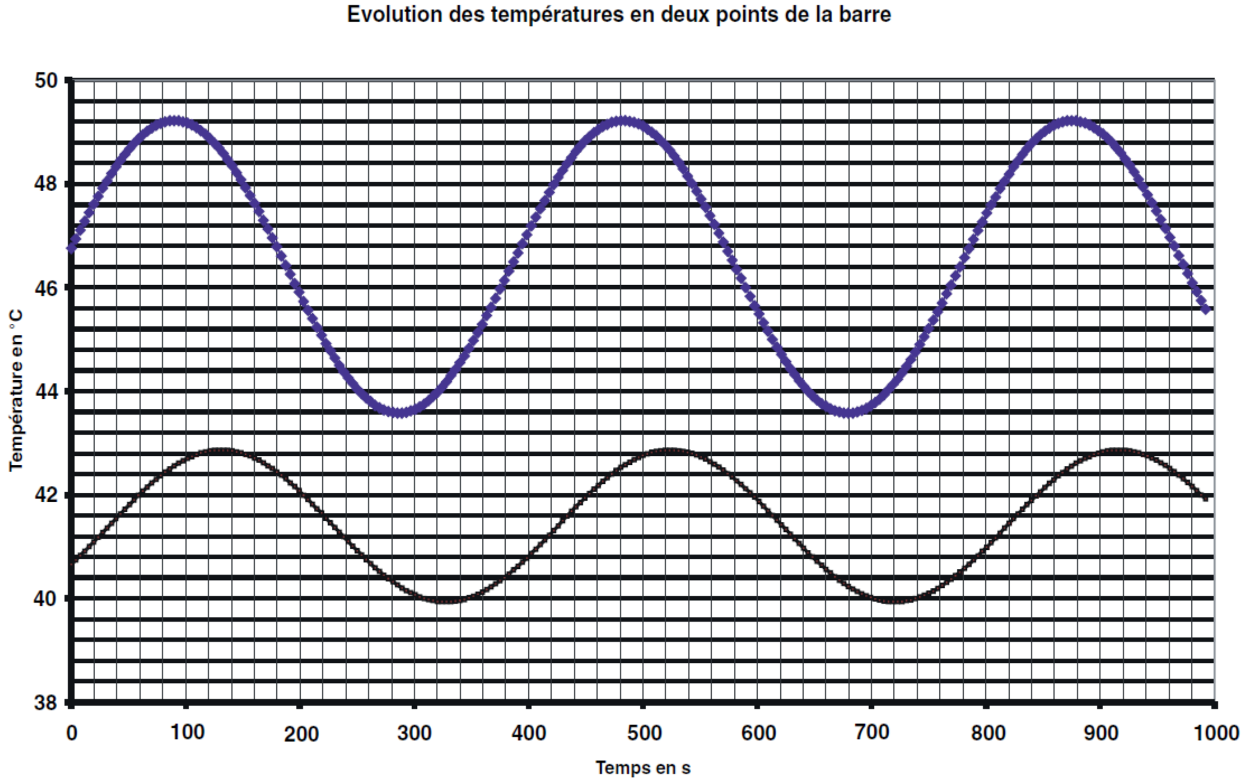


Figure 2 : températures en deux points de la barre

16.Quelle est la fréquence de la tension aux bornes du générateur dans l'expérience dont les résultats sont présentés en *figure* 2 ?

17.Mesurer sur la *figure* 2 les amplitudes $\theta_m(z_1)$ et $\theta_m(z_2)$ ainsi que le déphasage $\varphi(z_2)-\varphi(z_1)$ exprimé en radians et en degrés.

18.Préciser la signification physique de $T_p(z)$ et mesurer sur la *figure* 2 les valeurs de $T_p(z_1)$ et $T_p(z_2)$. Justifier les résultats numériques obtenus dans l'expérience.

19.Afin de déterminer les fonctions $\theta_m(z)$ et $\varphi(z)$, on utilise la représentation complexe pour $\theta(z,t)$ en posant $\underline{\theta}(z,t)=\underline{A}\exp(j(\omega t-\underline{K}z))$.Écrire l'équation vérifiée par le nombre complexe $\underline{K}$ et montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\underline{K}=\varepsilon\dfrac{1-j}{\delta}$ avec $\varepsilon=\pm 1$. Exprimer δ en fonction de λ , ρ , c_P , ω puis de r_{th} , c_{th} , ω .

20.Préciser la valeur de ε sachant que la barre de cuivre peut être considérée comme semi-infinie pour le signal sinusoïdal. Déterminer alors l'expression de $\underline{A}$ et en déduire les expressions de $\theta_m(z)$ et $\varphi(z)$.

21.Déterminer à partir des résultats expérimentaux de la *figure* 2 , la valeur numérique de δ de deux manières différentes.

22. Une longueur de $50\,cm$ vous semble-t-elle suffisante pour que l'approximation de la barre semi-infinie soit valable ? Justifier.

23.On utilise souvent le terme « ondes thermiques » à propos de ce type d'expérience. Quels qualificatifs utiliseriez-vous pour caractériser cette « onde » ?

II. Analogie électrocinétique et discrétisation de l'équation de diffusion

Les ondes thermiques abordées précédemment peuvent être étudiées expérimentalement sur un modèle électrocinétique discret, facilement réalisable.

On considère tout d'abord une chaîne infinie de cellules, associant chacun un conducteur ohmique de résistance R et un condensateur de capacité C . Cette ligne est alimentée par un générateur idéal de tension sinusoïdale de force électromotrice $e(t)=U_0\cos\omega t$. En régime sinusoïdal forcé, la tension aux bornes du $n^{ième}$ condensateur est de la forme $u_n(t)=U_n\cos(\omega t+\varphi_n)$ représentée en notation complexe par $\underline{u}_n$.

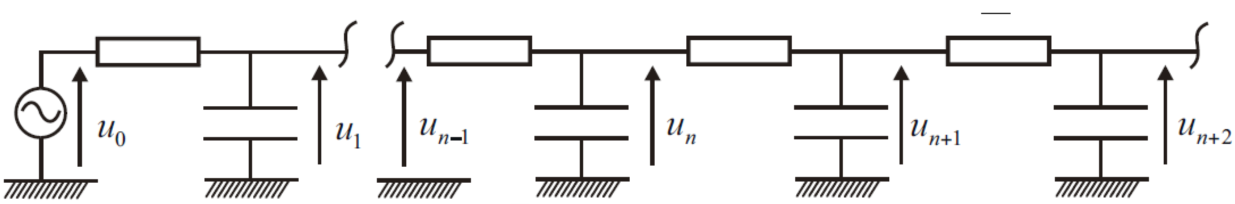


Figure 3

A. Chaîne de cellules RC en régime sinusoïdal forcé

24.Établir la relation de récurrence liant les amplitudes complexes $\underline{u}_n$ des diverses tensions aux bornes des condensateurs. On pourra utiliser la loi des nœuds exprimée à l'aide des tensions.

25.On cherche une solution de la forme $\underline{u}_n=\underline{k}^n\underline{u}_0$. Montrer que de telles solutions existent si $\underline{k}$ vérifie une condition à expliciter.

26.On se place dans l'hypothèse $RC\omega \ll 1$. Montrer que $\underline{k}\approx 1\pm(1+j)\sqrt{RC\omega/2}$ au deuxième ordre près en $\sqrt{RC\omega}$.

27.Interpréter physiquement le caractère complexe de $\underline{k}$. Déterminer $|\underline{k}|$ au même ordre d'approximation que précédemment. Lever alors l'indétermination de signe dans l'expression de $\underline{k}$.

B. Choix du nombre de cellules

28.Comme $RC\omega \ll 1$, $|\underline{k}|$ est proche de l'unité. Montrer que l'amplitude U_n de $u_n(t)$ présente alors une décroissance quasi exponentielle du type $U_n/U_0\approx\exp(-n/n_0)$. Exprimer n_0 .

29.En pratique, on peut se contenter d'un nombre fini de cellules électrocinétiques. Que peut-on prévoir quant au nombre de cellules à utiliser, à R , C et f fixés, pour que le comportement de la chaîne soit proche de celui d'un chaîne infinie.

C. Validation expérimentale

Le tableau ci-dessous consigne des résultats expérimentaux à R et C fixés. On cherche à savoir si ces données sont modélisables sous la forme $n_{0\exp}=A f^S$:

Fréquence f	200	350	500	650
$n_{0\exp}$	4,0	3,0	2,5	2,2

30.À l'aide d'une représentation graphique simple, montrer que le modèle proposé est en accord avec les données expérimentales (on pourra aussi faire une régression linéaire) . Estimer la valeur de S . Comparer aux résultats précédents.

31.Sachant que $R=1{,}0\,k\Omega$, calculer la valeur numérique de la capacité des condensateurs utilisés.

D. Passage du modèle discret au modèle continu

Les condensateurs sont repérés par leur position $x_n=na$ où a est la taille caractéristique d'une cellule. On introduit une fonction $u(x,t)$, des variables x et t , telle que la tension $u_n(t)$ (non nécessairement sinusoïdale) aux bornes du $n_{ième}$ condensateur se note $u_n(t)=u(na,t)=u(x_n,t)$.

32.On suppose que la variation spatiale de la fonction $u(x,t)$ est petite sur une échelle de distance de l'ordre de a . Montrer alors que $u(x,t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{1}{rc}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Préciser l'expression du produit rc en fonction de R , C et a , ainsi que son unité.

Réponses

1) On suppose que $T = T(z)$

— Les surfaces isothermes sont donc d'équation $z = cste$.
Le gradient de T est perpendiculaire aux surfaces isothermes donc dans la direction de l'axe Oz

— Le sens est vers les T croissants or on chauffe en $z=0$ et on refroidit en $z=L$
donc sens : sens négatif

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,T \text{ est selon } -\overrightarrow{u_z}}$$

---

2) Loi de Fourier :

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\ \overrightarrow{grad}\,T}$$

$\overrightarrow{j_Q}$: densité volumique de courant thermique
en $\boxed{W\,m^{-2}}$

λ : conductivité thermique
en $\boxed{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$

$\overrightarrow{grad}\,T$: en $\boxed{K\,m^{-1}}$

---

3)

$$P_J = R_{ch}\, I^2$$

$$\boxed{P = \frac{U_0^2}{R_{ch}}}$$

---

4)

$$P = j_Q(z=0)\, S$$

avec S section de la barre égale à $\frac{\pi d^2}{4}$

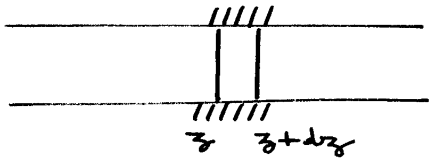
$$\overrightarrow{j_Q}_{(z=0)} = \frac{P}{S}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$= \frac{4P}{\pi d^2}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q}_{(z=0)} = \frac{4\,U_0^2}{\pi d^2 R_{ch}}\,\overrightarrow{u_z}}$$

---

5) On fait un bilan thermique pendant dt pour une tranche dz.



à P cote

$$\underbrace{d^2H}_{\text{nul (régime permanent)}} = \delta^2 Q_{reçu} + \underbrace{\delta^2 Q_{produit}}_{\text{nul (pas de sources)}}$$

donc

$$\boxed{\delta^2 Q_{reçu} = 0}$$

La puissance thermique qui entre en z à l'instant t ne pouvant ressortir par la surface latérale calorifugée doit donc ressortir en $z+dz$.

Donc le flux :

$$P = cste$$

$$j_Q S = cste$$

$$\boxed{\vec{j_Q} \text{ est uniforme } = \vec{j_Q}(z=0)}$$

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dz} + \frac{4 U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{ch}} = 0}$$

---

6) $$T = -\frac{4 U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{ch}} z + B$$

On écrit la condition aux limites en $z = L$

$\rightarrow$ en $z=L$ $$T(L) = -\frac{4 U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{ch}} L + B$$

En faisant la différence, on élimine B

donc :

$$T - T(L) = -\frac{4 U_0^2}{\pi d^2 R_{ch} \lambda} (z - L)$$

$$\boxed{T = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 \lambda R_{ch}}(L-z)}$$

---

7)
$$T_{P_1} = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 \lambda R_{ch}}(L-z_1)$$
$$T_{P_2} = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 \lambda R_{ch}}(L-z_2)$$

En faisant la différence :

$$T_{P_1} - T_{P_2} = \frac{4U_0^2}{\pi d^2 \lambda R_{ch}}(z_2 - z_1)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R_{ch}} \frac{(z_2-z_1)}{(T_{P_1}-T_{P_2})}}$$

A.N.
$$= \frac{4\,(6)^2\,(16-8)\,10^{-2}}{\pi\,(15\,10^{-3})^2\,8\,(46{,}4-41{,}4)}$$

$$\boxed{\lambda = 407{,}4 \ \mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-1}}}$$

---

8) La variation d'enthalpie élémentaire de l'eau pendant dt est causée par la "chaleur" reçue

$$dH_{eau} = P\,dt$$

- P est la puissance joule en $z=0$, intégralement transmise en $z=L$
- $$dH_{eau} = dm\, c_{eau} \underbrace{\Delta T}_{\text{variation de température de l'eau}}$$

$$= \underbrace{d_v\, \mu_{eau}}_{\text{débit massique}}\, dt\;\; c_{eau}\, \Delta T$$

μ_{eau} : masse volumique de l'eau

finalement :

$$\boxed{\Delta T_{eau} = \frac{U_0^2/R_{ch}}{\mu_{eau}\, c_{eau}\, d_v}}$$

---

9) équations aux dimensions :

$[\lambda] = [P]\ L^{-1}\ \theta^{-1}$

$[c_p] = [P]\ T\ M^{-1}\ \theta^{-1}$

$[\rho] = M\ L^{-3}$

L : longueur
M : masse
T : temps
θ : température

on doit fabriquer une grandeur D de dimension $L^2\,T^{-1}$ (indépendante de θ, M, [P])

On remarque que $\frac{\lambda}{c_p}$ est indépendant de [P] et θ

$$\left[\frac{\lambda}{c_p}\right] = L^{-1}\ M\ T^{-1}$$

On remarque qu'en divisant par ρ, le résultat est en plus indépendant de M

$$\left[\frac{\lambda}{\rho\, c_p}\right] = L^2\ T^{-1}$$

On posera donc $\boxed{D = \frac{\lambda}{\rho\, c_p}}$

---

10) On sait que

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$$

$$\frac{R_{th}}{L} = \frac{1}{\lambda S}$$

$$r_{th} = \frac{1}{\lambda S}$$

$$\boxed{r_{th} = \frac{4}{\lambda \pi d^2}}$$

On sait que

$$C_{th} = \rho\, V\, c_p$$

$$= \rho\, S\, L\, c_p$$

$$\frac{C_{th}}{L} = \rho\, S\, c_p$$

$$\boxed{c_{th} = \rho\, c_p \frac{\pi d^2}{4}}$$

On constate

$$r_{th}\, c_{th} = \frac{\rho\, c_p}{\lambda}$$

$$\boxed{D = \frac{1}{r_{th}\, c_{th}}}$$

---

remarque $D = \frac{\lambda}{\rho\, c_p} = \frac{407{,}4}{8870 \times 380} = 1{,}21\ 10^{-4}\ m^2 s^{-1}$

Le texte nous propose la valeur $D = 1{,}19\ 10^{-4}\ m^2 s^{-1}$

11)

$$\left([D] = L^2\, T^{-1} \right)$$

On aura $\quad D \simeq \Delta z^2\, \Delta t^{-1}$ ($\simeq$: de l'ordre de grandeur de)

$$\boxed{\Delta t \simeq \frac{\Delta z^2}{D}}$$

(si Δz double, Δt quadruple
...etc
Il s'agit bien de "<u>diffusion</u>")

A.N. pour qu'une modification brutale arrive au bout de la tige et que l'on se retrouve alors en régime stationnaire, il faut prévoir une durée de l'ordre de

$$\tau \simeq \frac{L^2}{D}$$

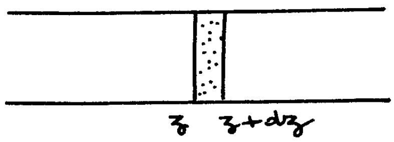
$$\simeq \frac{(0,5)^2}{1,19\ 10^{-4}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tau &\simeq 2,1\ 10^3\ s \\ &\simeq 35\ mn \end{aligned}}$$

Une expérience de thermique risque donc de prendre du temps...

---

12)



Bilan pour la tranche dz pendant dt :

$$d^2H = \delta^2 Q_{reçu} + \cancel{\delta^2 Q_{produit}}$$

$$\rho\, c\, S\, dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = j_{(z)}\, S\, dt - j_{(z+dz)}\, S\, dt$$

$$\rho\, c\, S\, dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial j}{\partial z}\, dz\, S\, dt$$

$$\rho\, c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial z} \qquad \text{avec } j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

---

13) Cette équation n'est pas invariante par renversement du temps. Elle n'est pas conservée si on fait :

$$t \rightarrow -t$$

La diffusion est un phénomène irréversible.

---

14) On reporte la solution proposée dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(T_P(z) + \theta(z,t)\right) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\left(T_P(z) + \theta(z,t)\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{d^2 T_P(z)}{dz^2}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t}\right)} = 0$$

$T_P(z)$ et $\theta(z,t)$ sont deux solutions indépendantes de l'équa diff

Il faudra donc :

$$\boxed{\frac{d^2 T_P(z)}{dz^2} = 0}$$

$T_P(z)$ est la solution en régime permanent.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = 0}$$

$\theta(z,t)$ est la solution correspondant au régime variable. $\theta(z,t)$ vérifie bien l'équation de la chaleur.

---

15)

$$p(t) = \frac{U(t)^2}{R_{ch}}$$

$$= \frac{2U_0^2}{R_{ch}}\cos^2(\Omega t)$$

$$\boxed{p(t) = \frac{U_0^2}{R_{ch}}\left(1 + \cos 2\Omega t\right)}$$

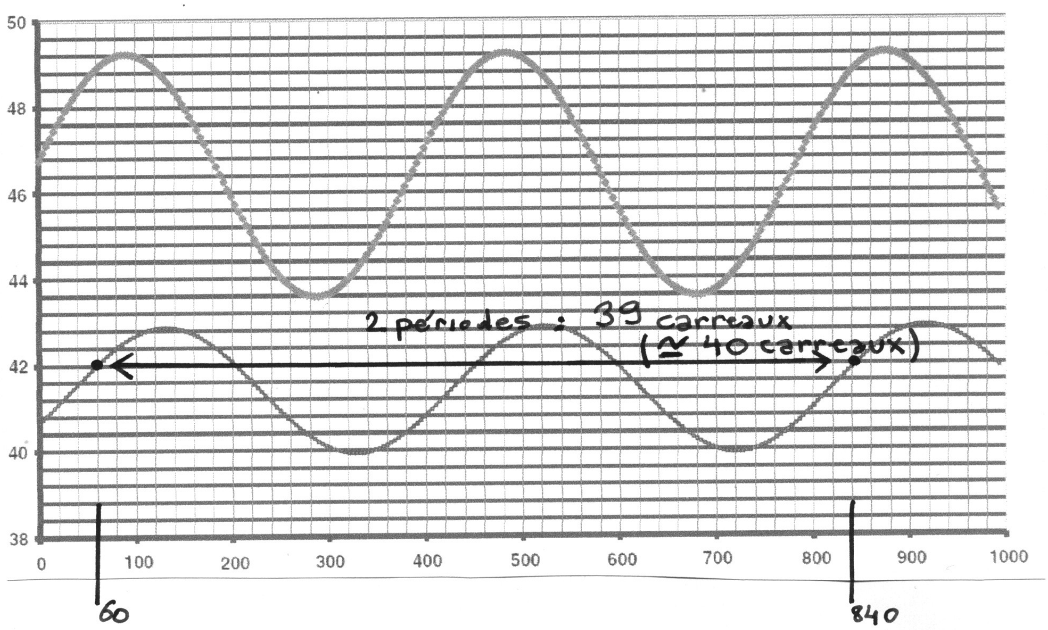
$$\boxed{p(t) = P_0\left(1 + \cos \omega t\right)}$$

avec $\boxed{P_0 = \frac{U_0^2}{R_{ch}}}$ (idem que question 3)

$\boxed{\omega = 2\Omega}$ (la fréquence est double de la fréquence du générateur)

---

15)



deux périodes $= 840 - 60 \simeq 800$

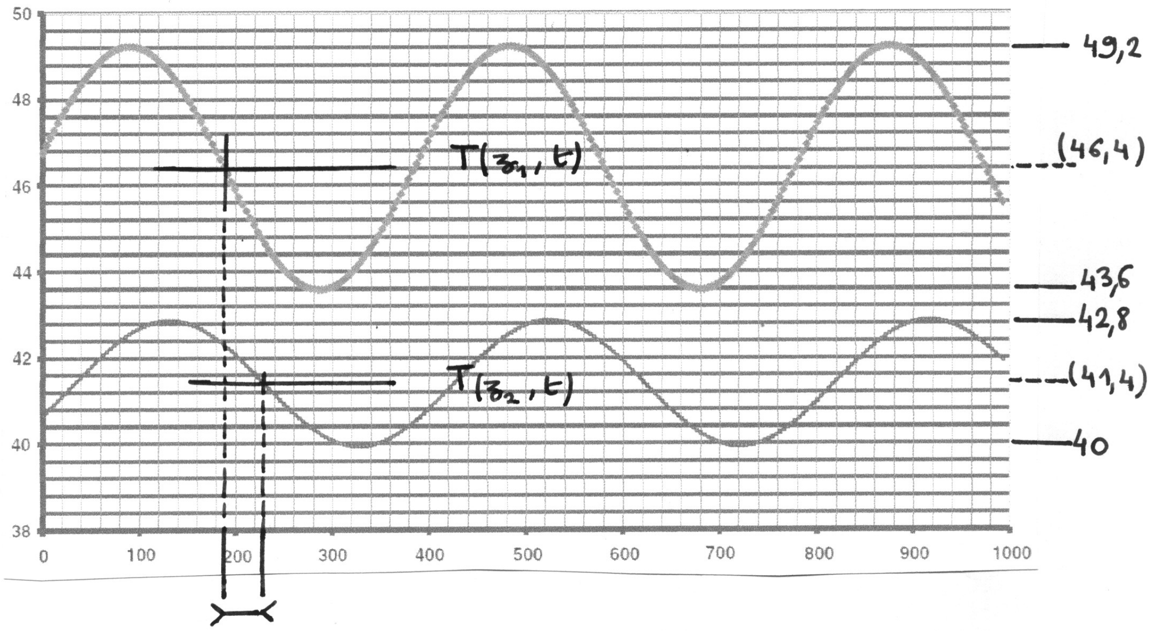
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \simeq 400$ s

$f = 2,5\ 10^{-3}$ Hz

$\boxed{f_{\text{générateur}} = 1,25\ 10^{-3}\ \text{Hz}}$

---

17)



Le z_1 la température moyenne doit être plus grande qu'en z_2 puisque l'on est plus proche de la source de "chaleur".

$T(z_1, t)$ est la courbe du haut
$T(z_2, t)$ " du bas.

$$\theta_m(z_1) = \frac{49,2 - 43,6}{2}$$

$$\boxed{\theta_m(z_1) = 2,8 \ °C}$$

$$\theta_m(z_2) = \frac{42,8 - 40}{2}$$

$$\boxed{\theta_m(z_2) = 1,4 \ °C}$$

Pour déterminer les déphasages, on regarde la coupure des courbes avec la valeur moyenne (coupure plus franche)
La température 2 est en retard de 2 carreaux
La période correspond environ à 20 carreaux

$$\varphi_{2/1} = -\frac{2}{20} \times 2\pi \quad \text{(retard ici avec signe}-\text{)}$$

$$= -\frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = -\frac{\pi}{5} \quad (36°)}$$

18) $T_P(z)$ est une solution en régime permanent correspondant à la partie constante de la puissance émise en $z=0$ soit P_0 (même valeur que dans la première partie du sujet).
On doit donc retrouver :

$$\boxed{\begin{array}{l} T_P(z_1) = T_{P_1} = 46{,}4\ °C \\ T_P(z_2) = T_{P_2} = 41{,}4\ °C \end{array}}$$

---

19)

$$\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} = 0$$

avec
$$\left| \begin{array}{ll} \underline{\theta} & = \underline{A} \exp j(\omega t - \underline{K} z) \\ \frac{\partial}{\partial t} & = j\omega \\ \frac{\partial}{\partial z} & = -j\underline{K} \end{array} \right.$$

$$(-j\underline{K})^2 \underline{\theta} - \frac{1}{D} j\omega \underline{\theta} = 0$$

$$-\underline{K}^2 - \frac{1}{D} j\omega = 0$$

$$\boxed{\underline{K}^2 = -j\frac{\omega}{D}}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{D}$$

$$\underline{K} = \pm \exp(-j\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$= \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$= \pm (1 - j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

on pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$\boxed{\underline{K} = \varepsilon (1-j) \frac{1}{\delta}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \delta & = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c_p \omega}} \\ & = \sqrt{\dfrac{2}{r_{th} C_{th} \omega}} \end{array}}$$

---

20) La barre est considérée comme tendant vers l'infini vers les $z>0$
On devra éliminer l'une des deux solutions obtenues pour $\underline{K}$
(celle qui fait tendre θ vers l'infini quand $z \to \infty$)

Essayons $\boxed{\varepsilon = +1}$ $\boxed{\underline{K} = (1-j)\frac{1}{\delta} = \exp(-j\frac{\pi}{4})\,\frac{\sqrt{2}}{\delta}}$

$$\underline{\theta} = \underline{A}_+ \exp j(\omega t - (1-j)\frac{1}{\delta} z)$$

$$= \underline{A}_+ \exp -\frac{z}{\delta} \quad \exp j(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

Essayons $\varepsilon = -1$

$$\underline{\theta} = \underline{A}_- \underbrace{\exp +\frac{z}{\delta}}_{\to \infty \text{ si } z \to \infty} \quad \exp j(\omega t + \frac{z}{\delta})$$

Donc :

$$\boxed{\underline{\theta} = \underline{A} \exp -\frac{z}{\delta} \quad \exp j(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

$$\overrightarrow{\underline{j}} = -\lambda \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial z} \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{j}} = j\lambda \underline{K} \ \underline{\theta}\ \overrightarrow{u_z}}$$

avec

$$\underline{j}_{(z=0)} = \frac{\underline{P}}{S} = \frac{P_0}{S}\exp(j\omega t)$$

En reportant :

$$\underline{j}_{(z=0)} = j\lambda \underline{K}\ \underline{\theta}_{(z=0)}$$

$$= j\lambda \underline{K}\ \underline{A} \ \exp(j\omega t)$$

on obtient $\underline{A}$

$$\underline{A} = \frac{-j\, P_0/S}{\lambda \underline{K}} \quad \left(\text{avec } \underline{K} = \exp(-j\frac{\pi}{4})\ \frac{\sqrt{2}}{\delta}\right)$$

$$\boxed{\underline{A} = \exp -j\frac{\pi}{4} \quad \frac{P_0\,\delta}{S\lambda\sqrt{2}}}$$

Pour terminer :

$$\boxed{\underline{\theta} = \underbrace{\frac{P_0\,\delta}{\lambda S\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)}_{\theta_m(z)} \exp j(\omega t \underbrace{- \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}}_{\varphi(z)})}$$

$$\boxed{\theta_m(z) = \frac{4\,U_0^2}{\pi d^2 R_{ch}\, \lambda\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\delta} \quad \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)}$$

$$\boxed{\varphi(z) = -\left(\frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

21) On peut obtenir δ par la comparaison des amplitudes :

$$\frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)} = \exp - \frac{(z_1 - z_2)}{\delta}$$

$$\boxed{\delta = \frac{(z_2 - z_1)}{\ln \frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)}}}$$

A.N. $$= \frac{(16 - 8)\,10^{-2}}{\ln(2)}$$

$$\boxed{\delta = 0{,}115 \text{ m}}$$

On peut obtenir δ par la comparaison des phases :

$$\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = -\frac{(z_2 - z_1)}{\delta}$$

$$\boxed{\delta = \frac{-(z_2 - z_1)}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}}$$

A.N. $$= \frac{-(16-8)\,10^{-2}}{-\pi/5}$$

$$\boxed{\delta = 0{,}127 \text{ m}}$$

(les deux δ sont différents, quoique du même ordre de grandeur. Il y a ici une grosse imprécision dans les lectures. φ est basé sur l'appréciation de 2 carreaux seulement par exemple)

$$\boxed{\delta \simeq 0{,}12 \text{ m}}$$

---

remarque

Valeur théorique de δ

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{D}{\Omega}}$$

avec $\Omega = 2\pi f_{\text{générateur}}$
$= 7{,}85\ 10^{-3}$ rad s^{-1}
$D = 1{,}19\ 10^{-4}$ $m^2 s^{-1}$

$\delta_{théorie} = 0{,}123 \text{ m}$

---

22) L'approximation de la barre infinie est valable si

$$L \gg \delta$$

En fait $\frac{L}{\delta}$ intervient dans le terme

$$\boxed{\exp - \frac{L}{\delta} \overset{?}{\ll} 1}$$

A.N. $L/\delta = 4{,}2$

$$\boxed{\exp - \frac{L}{\delta} = 0{,}016}$$

"Très grossièrement", on commet ici des erreurs de l'ordre de 2% . Vu la précision des lectures précédentes, ceci "semble" acceptable.

---

23) L'onde étudiée est plane (plans z = cote)
progressive (selon z : cf $\exp j(\omega t - \frac{1}{\delta} z)$)
monochromatique (à la pulsation ω)

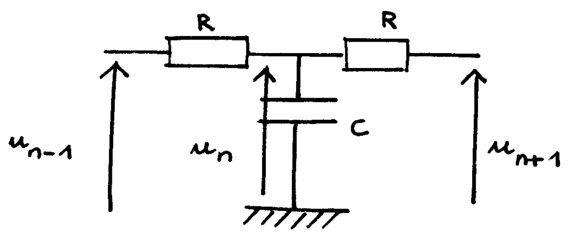
Son amplitude diminue au cours de sa propagation dans le milieu. C'est une onde amortie.

remarque

L'"onde" thermique n'obéit pas à l'équation de propagation de Le Rond d'Alembert. Un signal thermique au cours de sa propagation se déforme obligatoirement. D'où les guillemets : "onde".

---

24)



La loi des noeuds donne :

$$\boxed{\left(\frac{u_{n-1}-u_n}{R}\right) + C\frac{d}{dt}(0-u_n) + \left(\frac{u_{n+1}-u_n}{R}\right) = 0}$$

Ici, on travaille en sinusoïdal (donc en complexes)

$$\frac{\underline{u}_{n-1}-\underline{u}_n}{R} + jC\omega\,(0-\underline{u}_n) + \frac{\underline{u}_{n+1}-\underline{u}_n}{R} = 0$$

$$\boxed{\underline{u}_n = \frac{\underline{u}_{n+1}+\underline{u}_{n-1}}{2+jRC\omega}}$$

25)

$$\underline{k}^n = \frac{\underline{k}^{n+1}+\underline{k}^{n-1}}{2+jRC\omega}$$

$$\underline{k} = \frac{\underline{k}^2+1}{2+jRC\omega}$$

Relation vérifiée par $\underline{k}$

$$\boxed{\underline{k}^2 - (2+jRC\omega)\,\underline{k} + 1 = 0}$$

26)

$$\underline{k} = 1+\frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{\left(1+\frac{jRC\omega}{2}\right)^2-1}$$

$$= 1+\frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{jRC\omega - \frac{R^2C^2\omega^2}{4}}$$

$$= 1+\frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{jRC\omega}\left(\sqrt{1+\frac{jRC\omega}{4}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$1+\frac{jRC\omega}{8}+\dots$$

2e ordre en $\sqrt{\ }$ — 1er ordre en $\sqrt{\ }$ — 3e ordre en $\sqrt{\ }$ …

On travaille au 1er ordre :

$$\boxed{\underline{k} \simeq 1 \pm \sqrt{jRC\omega}}$$

avec

$$j = \exp j\pi/2$$

$$\sqrt{j} = \exp j\pi/4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{\underline{k} = 1 \pm (1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}}$$

---

27) Le fait que $\underline{k}$ soit complexe traduit l'existence d'un
→ <u>déphasage</u> de la tension de sortie d'une cellule par rapport à la tension d'entrée.

→
$$\underline{k} = 1 \pm (1+j)\,\varepsilon$$
$$= (1 \pm \varepsilon) \pm j\varepsilon$$
$$|\underline{k}|^2 = (1 \pm \varepsilon)^2 + (\pm j\varepsilon)^2$$
$$= (1 + \varepsilon^2 \pm 2\varepsilon) - \varepsilon^2$$
$$= (1 \pm 2\varepsilon)$$
$$|\underline{k}| \simeq 1 \pm \varepsilon \qquad \left(\text{avec } \varepsilon = \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)$$

Le module de $\underline{k}$ doit être inferieur à 1 sinon la tension tendrait vers l'infini avec n.
Il faut <u>choisir le signe −</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{k} &= 1 - (1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \\ |\underline{k}| &= 1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \end{aligned}}$$

---

28)
$$U_n = |\underline{k}|^n \; U_0$$
$$= \left(1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)^n U_0$$
$$\simeq \left(1 - n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right) U_0$$

avec $\exp(-\alpha) = 1 - \alpha$
si on travaille au 1er ordre en α

$$\simeq \exp\left(-\frac{n}{\sqrt{\frac{2}{RC\omega}}}\right) U_0$$

on pose $\boxed{n_0 = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}}}$

$$\boxed{\frac{U_n}{U_0} = \exp\left(-\frac{n}{n_0}\right)}$$

---

29) Tout dépend de la précision recherchée mais avec <u>n de l'ordre de 4 ou 5</u>, l'exponentielle est de l'ordre de 1% et donc on est proche du comportement d'une ligne infinie.

(on a vu en 22) $\exp(-4,2) = 0,016$)

---

30)

$$n_{0_{exp}} = A\ f^S$$

$$\boxed{\ln n_{0_{exp}} = \ln A + S \ln f}$$

On trace $(\ln n_{0_{exp}})$ en fonction de $(\ln f)$.

L'ordonnée à l'origine donne $\ln A$, la pente donne S.

La regression linéaire donne :

$S = -0,508$

$\ln A = 4,079$

corr $= -0,999949$ (les points sont "bien" alignés)

La théorie donne

$$n_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi R C f}}$$

$$\boxed{\ln n_0 = \ln \frac{1}{\sqrt{\pi R C}} - \frac{1}{2} \ln f}$$

On a bien vérifié : $\boxed{S = -\frac{1}{2}}$

On peut déterminer C :

$$C = \frac{1}{\pi R [\exp(\ln A)]^2}$$

$$\boxed{C = 91,3\ nF}$$

---

32) On a (cf 24)

$$(u_{n-1} - u_n) - RC \frac{du_n}{dt} + (u_{n+1} - u_n) = 0$$

devient :

$$u((n-1)a,t) - u(na,t) - RC \frac{\partial}{\partial t} u(x=na,t) + u((n+1)a,t) - u(na,t) = 0$$

avec

$$u(x=(n-1)a\,,t) = u(x=na,t) + \frac{(n-1)a - na}{1!} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=na,t} + \frac{((n-1)a - na)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=na,t} + \text{termes ordre } 3$$

$$= u(x=na,t) - a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dots$$

et

$$u(x=(n+1)a,t) = u(x=na,t) + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dots$$

d'où

$$(u_{n-1} - u_n) + (u_{n+1} - u_n) = 0 \quad \text{(au premier ordre en } a)$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{(au deuxième ordre en } a)$$

Au deuxième ordre en a :

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{a^2}{RC} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

$$\text{donc} \quad r\,c = \frac{RC}{a^2} = \frac{1}{D} \quad \text{en } s\,m^{-2}$$