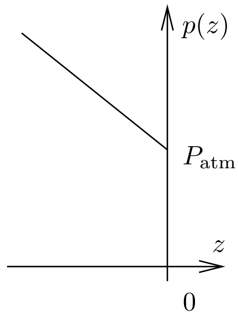
La plongée sous-marine

I Plongée libre (sans bouteille)



1. L'équation de la statique des fluides donne : $\overrightarrow{\text{grad}}\ P = \rho\vec{g}$ d'où $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$. Comme ρ est constant, on a alors $\boxed{p(z) = P_{\text{atm}} - \rho g z = 1{,}013.10^5 - 9{,}81.10^3 z}$. On a donc le graphe ci-contre.
2. L'évolution se faisant à température constante et le gaz étant parfait, on a donc : $p(z)V(z) = P_{\text{atm}}V_M$ d'où $\boxed{V(z) = \frac{P_{\text{atm}}V_M}{P_{\text{atm}} - \rho g z}}$ A.N. $\boxed{V(-10) = 3{,}6.10^{-3}\ \text{m}^3}$.
   Comme le plongeur retient sa respiration au cours de la plongée son poids reste constant.
   Par contre la poussée d'Archimède qui est proportionnelle au volume du plongeur diminue légèrement puisque le volume des poumons diminue. Le poids apparent est donc $\vec{P}_a = \vec{P}_{\text{arch}} + m\vec{g} = g(\rho V^*(z) - m)\vec{e}_z = P_a\vec{e}_z$. Donc P_a diminue avec z.
3. La flottabilité est nulle quand $P_a = 0$ *i.e.* quand $\rho(V_0 + V(z)) = m + m_1$ d'où : $\boxed{m_1 = \rho\left(V_0 + \frac{P_{\text{atm}}V_M}{P_{\text{atm}} - \rho g z}\right) - m}$
   A.N. $\boxed{m_1 = 1{,}7\ \text{kg}}$

II Plongée avec bouteille et détendeur

Remplissage de la bouteille

4. À la fin de l'admission, la pression est P_{atm} et le volume est $V_{\max}$. Dès que le piston change de sens, S est fermé et S' s'ouvre. La transformation étant isotherme et le gaz parfait, on a donc : $P_{\text{atm}}(V_{\max} + V_b) = P_b(V_{\min} + V_b)$ d'où $\boxed{P_b = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\max} + V_b)}{V_{\min} + V_b}}$
   Avant la compression le nombre de mole de gaz était : $n_i = \frac{P_{\text{atm}}V_b}{RT_a}$. À la fin de la compression il est : $n_f = \frac{P_b V_b}{RT_a}$.
   D'où : $\Delta n = \frac{V_b}{RT_a}\left(\frac{P_{\text{atm}}(V_{\max} + V_b)}{V_{\min} + V_b} - P_{\text{atm}}\right) = \frac{V_b}{RT_a}\frac{P_{\text{atm}}(V_{\max} - V_{\min})}{V_{\min} + V_b}$. Avec l'hypothèse $V_{\min} \ll V_b$, on obtient :
   $\boxed{\Delta n = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\max} - V_{\min})}{RT_a}}$ A.N. $\boxed{\Delta n = 8{,}2.10^{-2}\ \text{mol}}$
5. La soupape S' s'ouvre quand la pression dans le compresseur est égale à la pression dans la bouteille. Comme la compression est isotherme et le gaz parfait, on obtient : $\boxed{V' = \frac{P_{\text{atm}}V_{\max}}{p}}$.
   Après l'admission la compression reste isotherme, donc $p'(V_{\min} + V_b) = p(V' + V_b)$ d'où $\boxed{p' = \frac{P_{\text{atm}}V_{\max} + V_b p}{V_b + V_{\min}}}$.
   On a donc $\Delta p = \frac{P_{\text{atm}}V_{\max} + V_b p}{V_b + V_{\min}} - p$ et donc $\boxed{\Delta p = \frac{P_{\text{atm}}V_{\max} - pV_{\min}}{V_b + V_{\min}}}$.
   Le remplissage de la bouteille s'arrête quand $\Delta p = 0$ *i.e.* quand $P_{\text{atm}}V_{\max} = pV_{\min}$ d'où $\boxed{p_{\max} = \frac{P_{\text{atm}}V_{\max}}{V_{\min}}}$, ce qui correspond au cas où le piston arrive en AA' sans que la soupape S' ne s'ouvre ($V' = V_{\min}$).
6. A.N. $\boxed{\Delta p = 0{,}32.10^5\ \text{Pa}}$ et $\boxed{p_{\max} = 1{,}0.10^7\ \text{Pa}}$.
7. On a donc $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \alpha\frac{P_{\text{atm}}V_{\max} - pV_{\min}}{V_b + V_{\min}}$. On peut alors écrire : $\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha V_{\min}}{V_b + V_{\min}}p = \alpha\frac{P_{\text{atm}}V_{\max}}{V_b + V_{\min}}}$
8. Compte tenu de $V_{\min} \ll V_b$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{p}{\tau} = \alpha\frac{P_{\text{atm}}V_{\max}}{V_b}$. Après intégration de l'équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre à coefficients constants, on obtient, avec la condition initiale $p(0) = P_{\text{atm}}$:
   $\boxed{p(t) = (P_{\text{atm}} - p_{\max})\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + p_{\max}}$
   On a donc $T = -\tau\ln\frac{p - p_{\max}}{P_{\text{atm}} - p_{\max}}$ et donc $\boxed{T = 41{,}9\ \text{s}}$.

Utilité du détendeur

9. Le gaz étant parfait, on a donc $\boxed{n_i = \frac{pV_b}{RT_a}}$ et $\boxed{n_s = \frac{p_s V_b}{RT_e}}$. A.N. $\boxed{n_i = 21 \text{ mol}}$ et $\boxed{n_s = 0{,}84 \text{ mol}}$

10. À chaque respiration le plongeur consomme $n(z) = \frac{p(z)\Omega_0}{RT_e}$ mole d'air. Il consomme le gaz en $\frac{n_i - n_s}{n(z)}$ respirations et donc le temps au bout duquel le détendeur se bloque est $\boxed{\Delta t_s(z) = \frac{1}{f}\frac{(n_i - n_s)}{\Omega_0}\frac{RT_e}{P_{\text{atm}} - \rho g z}}$ A.N. $\boxed{\Delta t_s(z) = 396 \text{ s}}$
Remarque : ce temps peut surprendre (6 minutes 36 secondes), mais il est dû au choix des valeurs numériques. Dans la réalité la bouteille a une contenance de 12 l et est gonflée sous une pression de 200 bar.

11. On a donc $\boxed{\frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = \frac{T_e}{T_a}\frac{P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z}}$ A.N. $\boxed{\frac{\Delta t_s(-20)}{\Delta t_s(0)} = 0{,}33}$. La durée d'utilisation d'une bouteille diminue donc rapidement avec la profondeur.

III Un exemple de danger, l'accident de décompression

12. Avec $C(x,t) = K + f(x)g(t)$, l'équation différentielle s'écrit : $f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} - Dg(t)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = 0$ d'où $\frac{f''}{f} = \frac{1}{D}\frac{g'}{g}$. Pour qu'une fonction de x soit égale à une fonction de t, la seule possibilité est que ce soit une constante. D'où $\frac{f''}{f} = \frac{1}{D}\frac{g'}{g} = \pm q^2$, en suivant le texte. On a donc deux équations différentielles : $\boxed{f'' \pm q^2 f = 0}$ et $\boxed{g' \pm Dq^2 g = 0}$.

13. Les solutions de $g' \pm Dq^2 g = 0$ sont de la forme $g(t) = A\exp(\pm Dq^2 t)$. La solution $g(t) = A\exp(+Dq^2 t)$ n'est pas physiquement acceptable car elle diverge quand $t \to \infty$. On a donc $g(t) = A\exp(-Dq^2 t)$.
On a alors $f'' + q^2 f = 0$, dont les solutions sont : $f(x) = a\cos(qx) + b\sin(qx)$.
On a donc $\boxed{C_q(x,t) = K_q + [A_q\cos(qx) + B_q\sin(qx)]\exp(-Dq^2 t)}$

14. Quand $t \to \infty$, $C_q(x,t) \to C_s(z)$ donc $\boxed{K_p = C_s(z)}$. On a alors, compte-tenu des conditions aux limites : $C_q(0,0) = K_q + A_q = C_s(z)$, donc $\boxed{A_q = 0}$. D'autre part $C_q(L,0) = K_q + A_q\cos(qL) + B_q\sin(qL) = C_s(z)$, d'où $B_q\sin(qL) = 0$ d'où $qL = n\pi$, avec n un entier et donc $\boxed{q = \frac{n\pi}{L}}$.
B_q reste ici indéterminé. Il devrait être déterminé par les conditions initiales. On se rend compte alors que la forme de la solution ne peut convenir, d'où la forme de la solution utilisée à la question suivante.

15. D'après ce qui précède la période spatiale de F_q est $\frac{2\pi}{q} = \frac{2L}{n}$, donc pour $C(x,t)$ la période spatiale est $\boxed{2L}$.
Comme précédemment $C(x,t) \to C_s(z)$ quand $t \to \infty$, d'où $K = C_s(z)$. Posons alors $h(x,t) = C(x,t) - C_s(z)$. On a alors

$$\begin{cases} h(x,0) = C_0 - C_s(z) \text{ si } 0 < x < L \\ h(0,0) = 0 \\ h(L,0) = 0 \end{cases}$$

On prolonge alors h sur $]-\infty, +\infty[$, de tel manière que h soit impaire et

$$\begin{cases} h(x,0) = C_0 - C_s(z) \text{ si } 0 < x < L \\ h(x,0) = -C_0 + C_s(z) \text{ si } -L < x < 0 \end{cases}$$

On cherche alors $h(x,0) = \sum_n A_n \cos\frac{n\pi}{L}x + B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$. Comme la fonction h est impaire $A_n = 0$, $\forall n$ et

$$B_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} h(x,0)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_0^L [C_0 - C_s(z)]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{L}[C_0 - C_s(z)]\left[-\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L$$

$= \frac{2[C_0 - C_s(z)]}{n\pi}(1 - (-1)^n)$. On obtient donc $B_{2p+1} = \frac{4[C_0 - C_s(z)]}{(2p+1)\pi}$ et $B_{2p} = 0$, $\forall p$.

On en déduit donc : $$\boxed{C(x,t) = C_s(z) + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{4[C_0 - C_s(z)]}{(2p+1)\pi}\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{L}x\right)\exp\left[-D\left(\frac{(2p+1)\pi}{L}\right)^2 t\right]}$$