Jean-Marie DELORME delorme.jean-marie@wanadoo.fr
François-Xavier COQ francois.coq@ac-orleans-tours.fr
Lycée POTHIER ORLÉANS

Si vous notez des erreurs ou améliorations possibles, merci de nous les signaler.

2007 Mines-Ponts Filère PC

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Dans ce corrigé, nous notons les vecteurs en gras (sans flèche), par exemple **g**, et les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{z}}$.

CORDE PESANTE ET VIBRANTE

A:ÉTUDE CINÉMATIQUE D'UN MOUVEMENT BIDIRECTIONNEL

Première expérience

□ **1 -** $z(G_1) = \frac{1}{m_T}\int_A^B \mu z'(M)dz'$. La contribution de A à C est nulle, il reste $z(G_1) = \frac{1}{m_T}\int_0^z \mu z' dz'$, avec $m_T = \mu L$, donc $\boxed{z(G_1) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L}}$.

□ **2 -** On dérive cette expression par rapport au temps, en utilisant $\dot{z} = v_0$ Il vient $\dot{z}(G_1) = \frac{1}{L} z\ \dot{z} = \frac{v_0}{L} z$, puis $\boxed{\ddot{z}(G_1) = \frac{v_0^{\,2}}{L} = \text{cste}}$.

□ **3 -** De la même façon $z(G_2) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L}$ et cette fois $\dot{z} = - v_0$, ce qui donne $\dot{z}(G_2) = -\frac{v_0}{L} z$, puis $\boxed{\ddot{z}(G_2) = \frac{v_0^{\,2}}{L} = \ddot{z}(G_1)}$.

□ **4 -** Dans le premier cas, G_1 monte avec une vitesse qui augmente, dans le deuxième cas, G_2 descend avec une vitesse qui diminue. Donc $\mathbf{a}(G_1) = \mathbf{a}(G_2)$.
Le point C (c'est le point de l'espace, pas celui de la corde qui est immobile ni celui de la table lui aussi immobile) de la corde se déplace horizontalement à la même vitesse (en norme) que l'extrémité B le fait verticalement, donc à la vitesse v_0 constante. $\boxed{\text{L'accélération de } C \text{ est donc nulle}}$.

Seconde expérience

□ **5 -** La composante selon $\hat{\mathbf{z}}$ de l'accélération de B est $- g =$ cste, donc: $\dot{z}(B) = - g\, t + \dot{z}(B,t{=}0) = - g\, t$, puis $z(B) = - \frac{1}{2} g\, t^2 + z(B,t{=}0) = - \frac{1}{2} g\, t^2 + L$. B atteint la table pour $t = \tau$ et $z(B) = 0$, ce qui donne $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2L}{g}}}$.

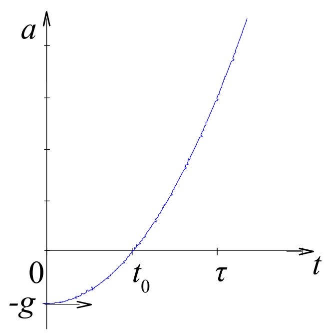
$\tau = \sqrt{\frac{2\text{x}24\text{X}10^{-1}}{10}}$ donc $\boxed{\tau = 0{,}69\ \text{s}}$.

□ **6 -** $z(G) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{L}$ avec $z = z(B) = L - \frac{1}{2} g\, t^2$, $\dot{z} = - g\, t$.

Donc $\mathbf{AG} = \frac{1}{2L}(L - \frac{1}{2} g\, t^2)^2\ \hat{\mathbf{z}}$. En dérivant par rapport au temps, on obtient $\mathbf{v}(G) = - \frac{g}{L}(L\, t - \frac{1}{2} g\, t^3)\ \hat{\mathbf{z}}$, puis

$\mathbf{a}(G) = - g\left(1 - \frac{3\,g}{2\,L}t^2\right)\ \hat{\mathbf{z}}$, ou $\boxed{\mathbf{a}(G) = -g\left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2}\right)\ \hat{\mathbf{z}}}$.

De plus $v(t) = - g\left(t - \frac{t^3}{\tau^2}\right)$.



□ **7 -** On note $a(t) = - g\left(1 - 3\frac{t^2}{\tau^2}\right)$. La vitesse de G présente un minimum lorsque $a(G)$ s'annule, donc pour $t_0 = \tau / \sqrt{3}$.

$t_0 = \sqrt{\frac{2\,L}{3\,g}} = \sqrt{\frac{2\text{x}24\text{x}10^{-1}}{3\text{x}10}}$ d'où: $\boxed{t_0 = 0{,}40\ \text{s}}$.

Immédiatement après $t = 0$, $v \approx 0$; si $t \to \tau$, $v \to 0$, donc puisque $v < 0$ au départ, il existe une valeur minimale de v, pour une date comprise entre 0 et τ.

$v_{min} = v(t = \tau/\sqrt{3}\,)$, donc $v_{min} = \dfrac{-2L}{\tau\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\dfrac{L}{\tau}$.$v_{min} = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\dfrac{24\text{X}10^{-1}}{0{,}69}$, donc $\boxed{v_{min} = -\,2{,}7\ \text{m.s}^{-1}}$.

B:ÉTUDE DYNAMIQUE DE LA CHUTE VERTICALE

□ **8 -** Le principe fondamental de la dynamique (appelé dans la suite PFD) appliqué à la corde donne $m_T\,\mathbf{a}(G) = m_T\,\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{balance}\to\text{corde}}$.
Le PFD appliqué à la balance (on note ressort le système qui maintient l'équilibre de la balance) donne
$\mathbf{0} = \mathbf{F}_{\text{corde}\to\text{balance}} + \mathbf{F}_{\text{ressort}}$, avec $\mathbf{F}_{\text{ressort}} = -\,\mathbf{P}_a$, où $\mathbf{P}_a$ est le poids apparent (indication de la balance).
Dans le cas d'une corde statique $\mathbf{a}(G) = \mathbf{0}$, on en déduit $\mathbf{P}_a = -\,\mathbf{F}_{\text{ressort}} = \mathbf{F}_{\text{corde}\to\text{balance}} = -\,\mathbf{F}_{\text{balance}\to\text{corde}} = m_T\,\mathbf{g}$.
Donc dans le cas d'une corde statique, le poids apparent est le poids réel.

Dans cette expérience $\mathbf{a}(G) = -g\left(1-3\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\hat{\mathbf{z}} = \left(1-3\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\mathbf{g}$.

La masse de la corde sur la balance est $m(t) = \mu\,(L - z(t)) = \mu\,\dfrac{1}{2}\,g\,t^2$, avec $m_T = \mu\,L$, ce qui donne $m(t) = m_T\,\dfrac{t^2}{\tau^2}$.

Le PFD (principe fondamental de la dynamique) appliqué à la corde donne $m_T\,\mathbf{a}(G) = m_T\,\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{balance}\to\text{corde}}$.
En supposant encore l'équilibre de la balance: $\mathbf{0} = \mathbf{F}_{\text{corde}\to\text{balance}} + \mathbf{F}_{\text{ressort}}$, avec $\mathbf{F}_{\text{ressort}} = -\,\mathbf{P}_a$.

Donc $\mathbf{P}_a = m_T\,(\mathbf{g} - \mathbf{a}(G)) = m_T\,\mathbf{g}\left(1-\left(1-3\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\right) = m_T\,\mathbf{g}\ 3\dfrac{t^2}{\tau^2}$, d'où $\boxed{\mathbf{P}_a = 3\,m(t)\,\mathbf{g}}$.

□ **9 -** La balance indique le poids total de la corde lorsque $m(t) = m_T$, donc pour $t_1 = \tau/\sqrt{3} = t_0$.
En effet, pour $t = t_0$, la vitesse de G est minimale, donc l'accélération de G est nulle: c'est comme en statique: $\mathbf{P}_a = m_T\,\mathbf{g}$.

□ **10 -** La partie de corde $[0,z']$ exerce une tension $T(z')\,\hat{\mathbf{z}}$ sur la partie $[z',z]$. Le PFD appliqué au morceau de corde compris entre z' et $z' + \mathrm{d}z'$, de vitesse constante $-\,\mathbf{v}_0$, donne

$\mathbf{0} = \mathrm{d}m\ \mathbf{a} = T(z')\,\hat{\mathbf{z}} - T(z'+\mathrm{d}z')\,\hat{\mathbf{z}} - \mu\,\mathrm{d}z'\,g\,\hat{\mathbf{z}}$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z'} = -\,\mu\,g$ et donc: $T(z') = -\,\mu\,g\,z' + \text{cste}$.

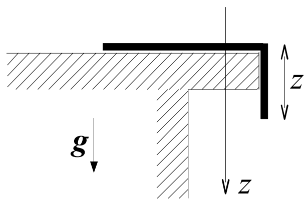
Or en $z' = 0$, $T(z' = 0) = 0$, donc: $T(z') = -\,\mu\,g\,z'$.
De plus en $z' = z = L - v_0\,t$, $-\,T(z')\,\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}$, d'où: $\mathbf{F} = \mu\,g\,z\,\hat{\mathbf{z}}$ et donc: $\boxed{\mathbf{F} = \mu\,(L - v_0 t)\,\mathbf{g}}$.

□ **11 -** Le PFD appliqué à la corde s'écrit $m_T\,\mathbf{a}(G) = \mathbf{F} + m_T\,\mathbf{g} - \mathbf{P}_a$, donc $\mathbf{P}_a = \mathbf{F} + m_T\,\mathbf{g} - m_T\,\mathbf{a}(G)$.

Comme $\mathbf{v}(B) = -\,v_0\,\hat{\mathbf{z}}$, la question 2 donne $\mathbf{a}(G) = \dfrac{v_0^{\,2}}{L}\,\hat{\mathbf{z}}$. De plus $m_T = \mu\,L$, donc

$\mathbf{P}_a = -\,(\mu\,v_0\,t\,g + \mu\,v_0^2\,)\,\hat{\mathbf{z}}$.
Or le poids réel est $\mathbf{P}_{\text{réel}} = m(t)\,\mathbf{g} = -\,\mu\,v_0\,t\,g\ \hat{\mathbf{z}}$. On voit donc que la norme du poids apparent est plus grande que celle du poids réel et la différence vaut $\boxed{P_0 = \mu\,v_0^2}$ qui est bien une constante.

C: CHUTE BIDIRECTIONNELLE DE LA CORDE



□ **12 -** À partir des forces exercées sur la corde, nous n'arrivons pas à établir une équation ayant pour solution l'expression de la question suivante. Nous utilisons une méthode énergétique.
À la date t, tous les points de la corde ont la même norme de vitesse qui vaut $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, donc l'énergie cinétique vaut $E_C = \dfrac{1}{2}\,m_T\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,L\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$.

L'énergie potentielle vaut $E_P = -\,m_V\,g\,z(G_V) = -\,\mu\,z\,g\ \dfrac{1}{2}\,z = \dfrac{1}{2}\,\mu\,g\,z^2$.

Comme la corde est parfaitement flexible et sans frottements, la puissance des actions intérieures est nulles, donc $0 = \dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mu\left(L\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} - g\,z\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$. Cette relation est vraie pour tout $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, donc: $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{g}{L}\,z = 0$.

□ **13 -** En posant $\alpha = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$, la solution générale de l'équation est $z(t) = A\ \text{ch}(\alpha\,t) + B\ \text{sh}(\alpha\,t)$. De plus à $t = 0$,

$z = 0$, donc $A = 0$, et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_0$, donc $B = \dfrac{V_0}{\alpha}$. D'où $z(t) = \dfrac{V_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha\, t)$.

Pour une chute libre, $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_{CL}}{\mathrm{d}t^2} = g$, donc $\dfrac{\mathrm{d}z_{CL}}{\mathrm{d}t} = g\,t +$ $\boxed{V_0 \text{ puis } z_{CL}(t) = \dfrac{1}{2}}$ $g\,t^2 + V_0\,t$.

On peut comparer les deux expressions pour des dates petites telles que $\alpha\,t \ll 1$. dans ce cas,

$z(t) \approx \dfrac{V_0}{\alpha}\left(\alpha\,t + \dfrac{1}{6}(\alpha\,t)^3\right) = V_0\,t + \dfrac{1}{6}\,V_0\,\alpha^2\,t^3$. Donc $z(t) - z_{CL}(t) \approx -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + \ldots$

Les deux courbes ont la même allure au départ (même tangente), puis $z_{CL}(t)$ augmente un peu plus vite que $z(t)$.

□ **14 -** La partie AC est de longueur $L - z$ (et homogène de masse $m_H = \mu\,(L - z)$), donc $\mathbf{AG_H} = \dfrac{1}{2}(L - z)\,\hat{\mathbf{x}}$. De plus $\mathbf{OA} = z\,\hat{\mathbf{x}}$, donc $\mathbf{OG_H} = \dfrac{1}{2}(L - z)\,\hat{\mathbf{x}} + z\,\hat{\mathbf{x}}$, soit $\boxed{\mathbf{OG_H} = \dfrac{1}{2}(L + z)\,\hat{\mathbf{x}}}$.

La partie CB est de longueur z (et homogène de masse $m_V = \mu\,z$), donc $\mathbf{AG_V} = \dfrac{1}{2}\,z\,\hat{\mathbf{z}}$. De plus $\mathbf{OC} = L\,\hat{\mathbf{x}}$, donc

$\boxed{\mathbf{OG_V} = L\,\hat{\mathbf{x}} + \dfrac{1}{2}\,z\,\hat{\mathbf{z}}}$.

□ **15 -** $\mu\,L\,\mathbf{OG} = \mu\,(L - z)\,\mathbf{OG_H} + \mu\,z\,\mathbf{OG_V}$. La projection sur $\hat{\mathbf{x}}$ donne $L\,X = (L - z)\,\dfrac{1}{2}(L + z) + z\,L$, celle sur $\hat{\mathbf{z}}$ donne $L\,Z = z\,\dfrac{1}{2}\,z$, donc $\boxed{X = z + \dfrac{1}{2\mathrm{L}}(L^2 - z^2) \text{ et } Z = \dfrac{z^2}{2\mathrm{L}}}$ .Ce dernier résultat est bien le même que celui de la question 1. Est-ce une parabole ?? NON

Lorsque z tend vers L, on voit qualitativement que G tend vers le milieu de AB, et que l'asymptote est verticale.

□ **16 -** Tous les points ayant la même norme de vitesse $\dot{z}$, l'énergie cinétique est $\boxed{E_T = \dfrac{1}{2}\,m_T\,\dot{z}^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,L\,\dot{z}^2}$.

□ **17 -** $E_c(P) = \dfrac{1}{2}\,m_T\,v(G)^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,L\,\left(\dot{X}^2 + \dot{Z}^2\right)$, avec $\dot{X} = \dot{z}\left(1 - \dfrac{z}{L}\right)$ et $\dot{Z} = \dot{z}\,\dfrac{z}{L}$, d'où

$\boxed{E_c(P) = \dfrac{1}{2}\,\mu\,L\,\dot{z}^2\left(1 + 2\dfrac{z}{L} + 2\dfrac{z^2}{L^2}\right)}$.

□ **18 -** $E_c^{(H)} = \dfrac{1}{2}\,m_H\,v(G_H)^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,\dot{z}^2\,\dfrac{1}{4}(L - z)$ et $E_c^{(V)} = \dfrac{1}{2}\,m_V\,v(G_V)^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,z\,\dot{z}^2\,\dfrac{1}{4}$.

□ **19 -** $E_T - [E_c^{(H)} + E_c^{(V)} + E_c(P)] = \dfrac{1}{2}\,\mu\,\dot{z}^2\left(-\dfrac{L}{4} + 2\,z - 2\dfrac{z^2}{L}\right) \neq 0$.

Cette différence correspond à l'énergie cinétique de rotation de la corde autour de G.

D-VIBRATIONS DE LA CORDE VERTICALE FIXÉE AUX DEUX EXTRÉMITÉS

Position d'équilibre

□ **20 -** La tension en M, $\mathbf{T}(M)$, est la force exercée par la partie $[MA]$ sur la partie $[BM]$ (ou par la partie $[z,L]$ sur la partie $[0,z]$). On pose $\mathbf{T}(M) = T(z)\,\hat{\mathbf{z}}$.

L'équilibre du morceau de corde $[z,z+\mathrm{d}z]$ s'écrit $\mathbf{T}(z+\mathrm{d}z) - \mathbf{T}(z) + \mathrm{d}m\,\mathbf{g} = \mathbf{0}$. La composante selon $\hat{\mathbf{z}}$ s'écrit

$T(z+\mathrm{d}z) - T(z) + \mu\,dz\,g = 0$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\,\mu\,g$ et donc $T(z) = -\,\mu\,g\,z + \text{cste}$.

De plus $T(z{=}L) = T(A)$, donc $\boxed{T(z) = T(A) + \mu\,g\,(L - z) = T(A) + m_T\,g - \mu\,g\,z}$.

Donc $T(z) > T(A) \gg m_T\,g$. On en déduit $\boxed{T(M) \approx T(A)}$.

Vibration

□ **21 -** Le PFD appliqué à l'élément compris au repos entre z et $z + \mathrm{d}z$ s'écrit $\mu\,\mathrm{d}z\,\mathbf{a}(G_z) = \mathbf{T}(z+\mathrm{d}z) - \mathbf{T}(z) + \mathrm{d}m\,\mathbf{g}$. En supposant qu'il n'y a pas de mouvement vertical, la projection sur $\hat{\mathbf{z}}$ redonne le résultat de la question précédente, soit $T(M) \approx T(A)$.

La projection sur $\hat{\mathbf{x}}$ donne $\mu\,\mathrm{d}z\,\dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = T(z+\mathrm{d}z)\,\sin\theta(z+\mathrm{d}z,t) - T(z)\,\sin\theta(z,t)$

$\ldots \approx T(A)\,(\sin\theta(z+\mathrm{d}z,t) - \sin\theta(z,t)) \approx T(A)\,(\theta(z+\mathrm{d}z,t) - \theta(z,t)) = T(A)\,\dfrac{\partial\theta(z,t)}{\partial z}\,\mathrm{d}z$, avec $\theta(z,t) \approx \tan\theta(z,t) = \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z}$, ce qui donne $\boxed{\dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} = \dfrac{\mu}{T(A)} \dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}}$.

C'est bien une équation de propagation (de d'Alembert) avec la célérité $c = \sqrt{\dfrac{T(A)}{\mu}}$.

$c = \sqrt{\dfrac{1}{10^{-3}}}$ donc $\boxed{c = 32 \text{ m.s}^{-1}}$.

□ **22 -** On cherche $x(z,t) = X(z)\, A(t)$. L'équation précédente devient $X''(z)\, A(t) = \dfrac{1}{c^2} X(z)\, A''(t)$, d'où $\dfrac{X''(z)}{X(z)} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{A''(t)}{A(t)}$. Le premier membre est indépendant de t, le second indépendant de z, on en déduit que cette expression est une constante qu'on suppose négative (si on la prend positive, on ne peut pas annuler $X(z)$ en 0 et L). On la note $-k^2$.

Nous obtenons $X''(z) + k^2 X(z) = 0$, donc $X(z) = X_1 \cos(k\,z) + X_2 \sin(k\,z)$. Comme la corde est fixée en A et B pour tout t, $X(0) = 0$, donc $X_1 = 0$, et $X(L) = 0$, donc $X_2 \sin(k\,L) = 0$. Comme la solution $X_2 = 0$ ne nous intéresse pas (elle donne $x(z,t) = 0$, donc la corde immobile), nous obtenons $\sin(k\,L) = 0$, d'où $k\,L = p\,\pi$ où p est un entier.

Donc $k = k_p = p\dfrac{\pi}{L}$.

D'autre part $A''(t) + k^2 c^2 A(t) = 0$ donne, en posant $\omega_p = k_p\, c$, $A(t) = A_{1p} \cos(\omega_p\, t) + A_{2p} \sin(\omega_p\, t)$.

La solution générale est la somme de toutes les solution, donc

$$x(z,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \left[A_{1p} \cos\left(p\pi\frac{c}{L}t\right) + A_{2p} \sin\left(p\pi\frac{c}{L}t\right)\right] \sin\left(p\pi\frac{z}{L}\right).$$

Ici, seul le mode 1 est excité, donc il restera $x(z,t) = \left[A_1 \cos\left(\pi\dfrac{c}{L}t\right) + A_2 \sin\left(\pi\dfrac{c}{L}t\right)\right] \sin\left(\pi\dfrac{z}{L}\right)$.

De plus, $x(z,t{=}0) = a \sin\left(\pi\dfrac{z}{L}\right)$, ce qui donne $A_1 = a$ et $A_2 = 0$, soit $\boxed{x(z,t) = a \cos\left(\pi\dfrac{c}{L}t\right) \sin\left(\pi\dfrac{z}{L}\right)}$.

□ **23 -** $x(z,t{=}0) = a \sin\left(\pi\dfrac{z}{L}\right) + b \sin\left(4\pi\dfrac{z}{L}\right)$. Comme l'équation différentielle est linéaire, on étudie séparément l'effet des deux termes. Le premier (mode 1) donne le résultat de la question précédente, le second (mode 4) donne $b \cos\left(4\pi\dfrac{c}{L}t\right) \sin\left(4\pi\dfrac{z}{L}\right)$. La solution est donc

$$\boxed{x(z,t) = a \cos\left(\pi\frac{c}{L}t\right) \sin\left(\pi\frac{z}{L}\right) + b \cos\left(4\pi\frac{c}{L}t\right) \sin\left(4\pi\frac{z}{L}\right)}.$$

□ **24 -** Sur la courbe proposée, on constate que l'allongement relatif augmente lorsque a / L augmente, donc la masse linéique varie (car $\mu = m_T / L$ et m_T est supposée constante).

On pourra par exemple considérer la masse linéique constante, à moins de 10 % près tant que $\Delta L / L < 0{,}1$, donc pour $a / L < 0{,}05$.

E:VIBRATIONS DE LA CORDE FIXÉE À UNE EXTRÉMITÉ

Position d'équilibre

□ **25 -** En A la tension est nulle donc $T(z{=}L) = 0$. L'équation d'équilibre de la question 20 est toujours valable. Elle donne $\boxed{T(z) = T(A) + \mu\, g\, (L - z) = \mu\, g\, (L - z)}$.

Vibration

□ **26 -** En négligeant le déplacement vertical de la corde, on peut garder la même valeur de $T(z)$ qu'à l'équilibre. Le PFD appliqué à l'élément compris au repos entre z et $z + \mathrm{d}z$, en projection sur $\hat{\mathbf{x}}$, donne

$$\mu\, \mathrm{d}z \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = T(z+\mathrm{d}z) \sin\theta(z+\mathrm{d}z,t) - T(z) \sin\theta(z,t) \approx T(z+\mathrm{d}z)\, \theta(z+\mathrm{d}z,t) - T(z)\, \theta(z,t) = \frac{\partial}{\partial z}(T(z)\, \theta(z,t))\, \mathrm{d}z.$$

Donc $\mu \dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\, g\, (L - z) \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z}\right)$, soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = g\,(L - z) \dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} - g \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z}}$.

□ **27 -** En rajoutant $\mathbf{df} = -\alpha \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial t} \mathrm{d}z\ \hat{\mathbf{x}}$, il vient $\boxed{\dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2} = g\,(L - z) \dfrac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} - g \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z} - \dfrac{\alpha}{\mu} \dfrac{\partial x(z,t)}{\partial t}}$.

□ **28 -** En remplaçant par $\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0 \exp[j(\omega\, t - k\, z)]$, on obtient la relation de dispersion

$$-\,\omega^2 = g\,(L - z)\,(-\,k^2) - g\,(-\,j\,k) - \frac{\alpha}{\mu}\, j\,\omega.$$

Il y a propagation sans atténuation si k est une constante réelle. La partie imaginaire de l'équation précédente donne $g\,k = \dfrac{\alpha}{\mu}\,\omega$, d'où $\alpha = \alpha_0 = g\,\mu\,\dfrac{k}{\omega}$. La partie réelle donne $\omega^2 = g\,(L - z)\,k^2 \approx g\,L\,k^2$ lorsque $z << L$.

On en déduit $\omega = \sqrt{g\,L}\;k$, puis $\boxed{\alpha_0 = \mu\,\sqrt{\dfrac{g}{L}}}$.

□ **29 -** La vitesse de phase est définie par $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$. Donc $\boxed{v_\varphi = \sqrt{g\,L}}$.

La vitesse de groupe est définie (pour k réel) par $v_g = \dfrac{d\omega}{d\,k}$, d'où $\boxed{v_g = \sqrt{g\,L} = v_\varphi}$.

Dans ce cas, la vitesse de groupe et la vitesse de phase sont des constantes (indépendantes de la pulsation), donc le milieu est non dispersif.

□ **30 -** En négligeant le terme de frottement et en supposant $z << L$, la relation de dispersion de la question 28 devient $\omega^2 = g\,L\,\underline{k}^2 - j\,g\,\underline{k}$. En posant $\underline{k} = k_1 + j\,k_2$, il vient $\omega^2 = g\,L\,(k_1^2 - k_2^2 + 2j\,k_1\,k_2) - j\,g\,(k_1 + j\,k_2)$;

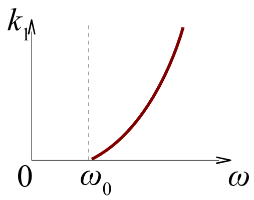
La partie imaginaire donne $2\,g\,L\,k_1\,k_2 = g\,k_1$, donc si $k_1 \neq 0$ (nécessaire pour avoir propagation), $\boxed{k_2 = \dfrac{1}{2\,L}}$.

$\underline{x}(z,t) = \underline{a} \exp[j(\omega\, t - (k_1 + j\,k_2)\,z)] = \underline{a} \exp[k_2\, z] \exp[j(\omega\, t - k_1\, z)]$.

Le terme d'amplitude $a \exp[k_2\, z] = a \exp[z\,/\,(2\,L)]$ augmente bien lorsque z augmente (sens de la propagation). Ceci est dû au signe positif de k_2.

Ce terme d'amplification peut compenser les éventuels frottements, une propagation avec frottements est donc possible, ce qui est cohérent avec la question 28.

□ **31 -** La partie réelle de l'équation donne $\omega^2 = g\,L\,(k_1^2 - k_2^2\,) + g\,k_2$, d'où, en remplacant k_2 par son expression et en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{4\,L}}$, $\omega^2 = g\,L\,k_1^2 + \omega_0^2$, ou encore $\boxed{k_1^2 = \dfrac{1}{g\,L}\,(\omega^2 - \omega_0^2)}$.



Les fréquences basses correspondant à $\omega < \omega_0$ conduisent à $k_1^2 < 0$, donc il n'y a pas de propagation (k_1 serait imaginaire pur) pour les basses fréquences. C'est un filtre passe-haut.

□ **32 -** En différenciant la relation précédente, on obtient $2\,k_1\,dk_1 = \dfrac{1}{g\,L}\,2\,\omega\,d\omega$ et

donc $\dfrac{\omega}{k_1}\dfrac{d\omega}{d\,k_1} = g\,L$ soit $\boxed{v_\varphi\, v_g = g\,L}$.

Considérations énergétiques

□ **33 -** La puissance traversant la corde à la cote z dans le sens des z croissants est $P(z,t) = \mathbf{T}.\dfrac{\partial x(z,t)}{\partial t}\,\hat{\mathbf{x}}$ (produit scalaire entre la force et la vitesse). Donc $P(z,t) = T(z)\,\theta(z,t)\,\dfrac{\partial x(z,t)}{\partial t} = T(z)\,\dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z}\,\dfrac{\partial x(z,t)}{\partial t}$.

$\dfrac{\partial x(z,t)}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial x(z,t)}{\partial t}$ sont tous les deux proportionnels à l'amplitude de $x(z,t)$, donc $P(z,t)$ et sa valeur moyenne sont proportionnels au carré de l'amplitude du mouvement $x(z,t)$ de la corde.

Avec $\underline{x}(z,t) = \underline{a} \exp[j(\omega\, t - \underline{k}\, z)]$, $\dfrac{\partial \underline{x}(z,t)}{\partial z} = -\,j\,\underline{k}\,\underline{a} \exp[j(\omega\, t - \underline{k}\, z)]$ et $\dfrac{\partial \underline{x}(z,t)}{\partial t} = j\,\omega\,\underline{a} \exp[j(\omega\, t - \underline{k}\, z)]$.

$$\langle P(z,t)\rangle = \frac{1}{2}\,Re\left(T(z)\,\frac{\partial \underline{x}(z,t)}{\partial z}\left[\frac{\partial \underline{x}(z,t)}{\partial t}\right]^*\right) = \frac{1}{2}\,Re(T(z)\,j\;\omega\,\underline{a}\,j\,\underline{k}^*\,\underline{a}^*) = -\,\frac{1}{2}\,\omega\,a^2\,T(z)\,Re(\underline{k}^*),$$ donc

$\langle P(z,t)\rangle = -\,\dfrac{1}{2}\,\omega\,a^2\,T(z)\,k_1$. Cette puissance reçue est positive. Puisque $T(z) = \mu\,g\,(L - z)$, $T(z)$ et donc $\langle P(z,t)\rangle$ diminuent lorsque z augmente. La puissance moyenne reçue par l'élément de corde situé entre z et $z + dz$ ($\langle P(z,t)\rangle - \langle P(z+dz,t)\rangle$) est donc positive. On en déduit que son énergie et donc son amplitude augmentent au cours du temps.

On demandait en fonction de z ???