CCP 2005. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

PREMIER EXERCICE.

T est le triangle isocèle rectangle qui constitue la "moitié supérieure" du carré C délimité par la seconde bissectrice. T est clairement un compact élémentaire du plan et la fonction $(x,y) \longmapsto x+y$ est continue sur T de sorte que le théorème de Fubini s'applique et fournit :

$$\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{x=-1}^{x=1}\left(\int_{y=-x}^{y=1}(x+y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^{1}\big(\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}x^2\big)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 (1+x^2)\,\mathrm{d}\,x = \frac{4}{3} \quad \square$$

Par raison de symétrie par rapport à la seconde bissectrice à la fois du carré C et de la fonction $(x,y) \longmapsto |x+y|$:

$$\iint_C |x+y|\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 2\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{8}{3} \quad \square$$

SECOND EXERCICE.

1. Sur I ou sur J l'équation se normalise en $y' - \dfrac{n}{x}y = 0$ et les solutions y forment donc un espace vectoriel de dimension 1 clairement dirigé par $x \longmapsto x^n$. $\square$

2. Les fonctions f_1 et f_2 définies respectivement sur I et J par $f_i(x) = \lambda_i x$ admettent un $\mathcal{C}^0$-raccordement en 0 pour tout couple (λ_1,λ_2) mais le $\mathcal{C}^1$-raccordement exige (par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$) $\lambda_1 = \lambda_2$.
Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont les fonctions $x \longmapsto \lambda x$ et forment donc une droite vectorielle. $\square$

3. Par contre pour $n \geqslant 2$, les fonctions g_1 et g_2 définies respectivement sur I et J par $g_i(x) = \lambda_i x^n$ admettent en 0 un $\mathcal{C}^0$-raccordement et un $\mathcal{C}^1$-raccordement pour tout couple (λ_1,λ_2).
Il en découle que la solution générale de (E_n) sur $\mathbb{R}$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \lambda_1 x^n$ pour $x \leqslant 0$ et par $g(x) = \lambda_2 x^n$ pour $x \geqslant 0$.
En notant h_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_1(x) = x^n$ pour $x \leqslant 0$ et $h_1(x) = 0$ pour $x \geqslant 0$ et h_2 celle définie par $h_2(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $h_2(x) = x^n$ si $x \geqslant 0$, il vient que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_n) pour $n \geqslant 2$ forment un plan vectoriel dirigé par h_1 et h_2. $\square$

PROBLÈME.

1. a. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$. Or $\ln(++x)$ tend vers $\ln(2)$ lorsque $x \to 1^-$ et la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge par théorème spécial. Ainsi la suite (a_n) avec $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ vérifie $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. $\square$

1. b. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$. Or $\dfrac{1}{1+x}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $x \to 1^-$ et la série $\sum(-1)^n$ diverge.
Ainsi la suite (a_n) avec $a_n = (-1)^n$ vérifie $\mathcal{P}_2$ mais ne vérifie pas $\mathcal{P}_1$. $\square$

1. c. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Or $\dfrac{1}{1-x}$ n'admet pas de limite finie en 1^- et la série de treme général 1 diverge. La suite constante égale à 1 ne vérifie donc ni $\mathcal{P}_1$ ni $\mathcal{P}_2$. $\square$

1. d. *Première solution* : On sait que si une série de fonctions bornées sur un intervalle I converge uniformément sur I alors la somme de la série est bornée sur I. Dans chacun des trois exemples précedents les fonctions monômes $a_n x^n$ sont bien sûr bornées sur $]-1,1[$ (car continues sur $\mathbb{R}$ et donc bornées sur le compact $[-1,1]$) mais la somme n'est pas bornée sur $]-1,1[$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $]-1,1[$. $\square$

Seconde solution : La série de l'exemple c ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ car, pour $x \in]-1,1[$, $R_n(x) \underset{\text{DEF}}{=} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ et la suite (R_n) ne converge donc pas uniformément vers 0 sur $]-1,1[$ puisque $\operatorname*{Sup}\limits_{x\in]-1,1[} |R_n(x)| = +\infty$. $\square$

2. Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$ et sa somme $S(x)$ est donc une fonction continue sur $[-1,1]$ par théorème de récupération uniforme de la continuité.

Il vient alors $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} S(x) = S(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. $\square$

3. La série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ a pour rayon 1 et la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente. Il en résulte, d'après la question précédente, que $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ en notant $f(x) = \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$.

Or $S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k x^k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\dfrac{(-1)^k x^k}{k-1} - \dfrac{(-1)^k x^k}{k}\right) = x \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$.

Donc $f(x) = x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x$ pour $x \in]-1,1[$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$. □

4. a. Il vient $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$ de sorte que, pour $x \in [0,1]$ (puisque $\sum a_n$ converge) :
$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = R_n(x)$. □

4. b. Or la série $\sum r_n x^n$ converge pour $x \in [0,1[$ car $(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc pour n assez grand on a $|r_n x^n| \leqslant |x|^n$.
On peut donc linéariser dans le résultat précédent et :
$R_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p-1} x^{n+p} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p} = r_n x^{n+1} + \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p+1} - \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{n+p}$ et donc :
$R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$ pour $x \in [0,1[$. □

4. c. La suite (r_n) tend vers 0 d'où l'existence d'un entier n_0 tel que $|r_k| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout entier $k \geqslant n_0$ c'est à dire encore $|r_{n+p}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier p. □

Pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant n_0$ la question précédente montre alors que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + (1-x)\dfrac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \varepsilon$.

C'est encore vrai pour $x = 1$ car alors $R_n(1) = r_n$.
Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ donné quelconque, il existe un entier n_0 tel que $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geqslant n_0$. □

4. d. Cela prouve (par définition) que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et que sa somme $S(x)$ est donc une fonction continue sur $[0,1]$. Il vient alors : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. □

5. Il en découle par contraposée que si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ alors la série $\sum a_n$ ne converge pas. □

6. Par intégration terme à terme de 0 à $x \in]-1,1[$ du développement en série entière de $\dfrac{1}{1+t^2}$ il vient que :
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1,1[$ et comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par théorème spécial, le théorème d'Abel montre que $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. □

7. a. Le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ par elle même a pour terme général $w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}}$.

Or $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ (car $(n-2k)^2 \geqslant 0$) de sorte que $|w_n| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$ ce qui prouve la divergence grossière de la série $\sum w_n$. □

7. b. Posons $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in]-1,1]$ ce qui est licite puisque $\sum u_n$ converge et donc que le rayon de convergence est au moins 1. De même pour $V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes prouve que $W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$ et que $W(x) = U(x)V(x)$ pour $x \in]-1,1|$. Puisque les trois séries de l'énoncé convergent, le théorème d'Abel montre $\lim_{x\to 1^-} U(x) = U(1)$. Idem pour $V(x)$ et $W(x)$. En passant à la limite en 1^- dans $W(x) = U(x)V(x)$ sur $]-1,1[$ il vient $W(1) = U(1)V(1)$. □

8. Cf question 1.b. □

9. Supposons $a_n \geqslant 0$ pour tout n. On a alors pour tout réel $x \in [0,1[$: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant f(x)$.

Si on suppose que f ademt une limite finie ℓ en 1^- il vient alors par principe de prolongement des inégalités : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant \ell$ ce qui prouve que la série à terme positifs $\sum a_n$ converge puisque ses sommes partielles sont bornées. $\square$

10. Il est immédiat que les deux séries proposées convergent absolument sur $]-1,1[$ ce qui prouve que leur rayon est au moins 1. Par ailleurs la première diverge grossièrement en 1 et la seconde ne converge pas absolument en 1. Les deux séries admettent donc 1 pour rayon de convergence. $\square$

On peut aussi remarquer que la première série est la série dérivée de la première ce qui redonne le fait qu'elles admettent le même rayon.

11. D'après le théorème d'Abel et celui de Littlewood évidemment applicable à la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si f admet une limite finie en 1^-. $\square$

Remarquons que d'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière on a bien $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour $x \in]-1,1[$.

12. Comme la suite (ε_n) est périodique de période p, il vient que :

$x^p g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n+p-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_{n+p} x^{n+p-1} = g(x) - \big(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_p x^{p-1}\big)$.

Donc $g(x) = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_p x^{p-1}}{1-x^p}$ pour $x \in]-1,1[$. $\square$

13. En prenant la suite (ε_n) constante égale à 1, en application des deux questions précédentes il vient que $\sum \frac{1}{n}$ converge si et seulement si $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t = -\ln(1-x)$ admet une limite finie en 1^-. On retrouve donc la divergence de la série harmonique. $\square$

En prenant désormais $\varepsilon_n = (-1)^n$, il vient que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge si et seulement si $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1-t^2}\,\mathrm{d}\,t = \ln(1+x)$ admet une limite finie en 1^-. Ce qui est le cas. En outre par le théorème de convergence radiale d'Abel on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \ln 2$. $\square$

14. D'après les questions 12 et 13, la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int^1 g(t)\,\mathrm{d}\,t = \int^1 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 t + \cdots + \varepsilon_p t^{p-1}}{1-t^p}\,\mathrm{d}\,t$ converge. Or $g(t)$ se décompose en éléments simples qui sont tous des fonctions continues en 1 sauf un pôle éventuel $\dfrac{\lambda}{t-1}$ puisque 1 est racine simple du dénominateur. Or ce pôle existe si et seulement si 1 n'est pas racine du numérateur auquel cas l'intégrale diverge. Par contre sinon g se prolonge par continuité en 1 et l'intégrale converge.

Ainsi la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{p} \varepsilon_k = 0$. $\square$

Il en découle évidemment que si p est impair cette série diverge. $\square$

15. On a ici $g(t) = \dfrac{1+t+t^2-t^3-t^4-t^5}{1-t^6}$ et compte tenu de ce qui précède la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ converge et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}\,t$. Or pour $t \in [0,1[$, $g(t) = \dfrac{(1+t+t^2)(1-t^3)}{(1+t^3)(1-t^3)} = \dfrac{1+t+t^2}{1+t^3} = \dfrac{1+t}{1+t^3} + \dfrac{t^2}{1+t^3} = \dfrac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \dfrac{t^2}{1+t^3}$

dont une primitive est $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3}\ln(1+t^3)$.

Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n} = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{\ln 2}{3}$. $\square$

FIN