Corrigé de l'épreuve Math 1 de CCP, PSI 2012

Luc Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes.

Partie I Cas d'une matrice à coefficients constants.

Question I. 1. La fonction X définie par $X : t \mapsto e^{\lambda t} V$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V$ (coefficient par coefficient). Ainsi X est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda e^{\lambda t} V = A e^{\lambda t} V = e^{\lambda t} AV$ sur $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à $AV = \lambda V$ donc à $\boxed{V \text{ (non nul) est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \lambda}$.

Question I. 2. 1. Pour la matrice A et $x \in C$, la fonction polynôme caractéristique vaut alors :

$$P_A(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x)\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

en développant selon la deuxième ligne les deux fois, d'où $P_A(x) = (2-x)(1-x)(x^2+1)$

$\boxed{\text{le spectre de } A \text{ dans } \mathbb{C} \text{ est } Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1, 2, i, -i\}}$

A est donc **diagonalisable** dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle admet 4 valeurs propres distinctes, ce qui est une condition suffisante de diagonalisabilité pour une matrice 4×4, de plus les **sous-espaces propres sont des droites**.
Par résolutions des systèmes $AX = \lambda X$, on trouve : **Rappel** *: les calculatrices sont autorisées.*

$$\boxed{\begin{array}{l} E_1 = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}) \text{ où } \overrightarrow{v_1} = (0,0,1,1),\ E_2 = \text{Vect}(\overrightarrow{v_2}) \text{ où } \overrightarrow{v_2} = (0,1,1,0), \\ E_i = \text{Vect}(\overrightarrow{v_3}) \text{ où } \overrightarrow{v_3} = (1,0,0,-i),\ \text{et } E_{-i} = \text{Vect}(\overrightarrow{v_4}) \text{ où } \overrightarrow{v_4} = (1,0,0,i). \end{array}}$$

On a donc une famille de 4 fonctions de $Sol(E_0)$ qui est de dimension 4, constituée des fonctions :

$$X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 : t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, X_4 : t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

La matrice wronskienne de cette famille a pour déterminant $\det(W(t)) = e^{3t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i & i \end{vmatrix}$ qui est non nul,
puisqu'on a une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
Donc la famille $(X_j)_{1 \leqslant j \leqslant 4}$ est libre, et c'est $\boxed{\text{un système fondamental de solutions de } (E_0)}$.
C'est donc une famille génératrice : toute solution est une combinaison linéaire de ces solutions,

$\boxed{\text{la solution générale de } (E_0) \text{ sur } I = \mathbb{R} \text{ est } X : t \mapsto \sum_{1 \leqslant j \leqslant 4} k_j X_j(t)}$ où $(k_j)_{1 \leqslant j \leqslant 4} \in \mathbb{K}^4$.

Question I. 2. 2. $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$ s'écrit $\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + te^t & (1) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t & (2) \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t) & (3) \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - te^t & (4) \end{cases}$

(2) est une EDL1 à coefficient constant et second membre e^t, la solution générale de l'équation homogène associée est $x(t) = ke^{2t}$ et une solution particulière de la forme $p(t)e^t$ fournit $-e^t$.

$\boxed{x_2(t) = k_2 e^{2t} - e^t \text{ sur } \mathbb{R} \text{ solution générale de (2)}}$.

On reporte cette solution dans (3) et on résoud selon les mêmes méthodes, on trouve :

$\boxed{x_3(t) = k_3 e^t + k_2 e^{2t} - te^t \text{ sur } \mathbb{R} \text{ solution générale de (3)}}$

Alors $\begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = -x_4(t) + (k_3+1)e^t \\ x_4'(t) = x_1(t) + (k_3 + 1 - 2t)e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4(t) = -x_1'(t) + (k_3+1)e^t \\ x_1''(t) = -x_1(t) + 2te^t \end{cases}$

En tirant x_4 de la $1^{ère}$ équation et en reportant dans la 2^{de}.
Cette dernière EDL2 à coefficients constants a pour solution générale homogène $x_1(t) = k_1\cos(t) + k_4\sin(t)$ et on trouve une solution particulière en $x(t) = q(t)\,e^t$ avec $q''(t) + 2q'(t) + q(t) = -q(t) + 2t,$ on prend donc $q(t)$ de degré 2 en $t,$ et $q(t) = t - 1$ convient.

D'où $\boxed{\begin{matrix} x_1(t) = k_1\cos(t) + k_4\sin(t) + (t-1)\,e^t \\ x_4(t) = k_1\sin(t) - k_4\cos(t) + (k_3 + 1 - t)\,e^t \end{matrix} \quad \text{solution de } \begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}}$ Ainsi

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1\cos(t) + k_4\sin(t) + (t-1)\,e^t \\ k_2\,e^{2t} - e^t \\ k_3\,e^t + k_2\,e^{2t} - t\,e^t \\ k_1\sin(t) - k_4\cos(t) + (k_3 + 1 - t)\,e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & 0 & \sin(t) \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^t & 0 \\ \sin(t) & 0 & e^t & -\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t-1)\,e^t \\ -e^t \\ -t\,e^t \\ (1-t)\,e^t \end{pmatrix}$$

est la solution générale à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ de $(E),$ avec $(k_j)_{1\leqslant j\leqslant 4} \in \mathbb{R}^4$ quelconque et fixé.

On cherche $(k_j)_{1\leqslant j\leqslant 4}$ pour trouver la solution telle que : $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 - 1 \\ k_2 - 1 \\ k_3 + k_2 \\ -k_4 + k_3 + 1 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = -1 \\ k_4 = 0 \end{cases}$ et $\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)\,e^t \\ -e^t \\ -(1+t)\,e^t \\ -t\,e^t \end{pmatrix}}$

Partie II Matrice résolvante.

Question II. 1. Φ_{t_0} est linéaire et bijective avec le Thm de Cauchy, c'est bien un isomorphisme, et $\Phi_{t_0}^{-1}$ est l'application qui à un vecteur V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associe la solution de (E_0) : X dans S_0 telle que $X(t_0) = V.$

$\boxed{\text{Alors } \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V) = X(t)}$

Question II. 2. 1. Ayant choisi ces bases, la matrice se remplit en colonnes : la *jème* colonne est constituée des composantes de l'image $\Phi_{t_0}(X_j)$ du *jème* vecteur de la base $(X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base de l'espace d'arrivée.
C'est donc la colonne représentant $X_j(t_0)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on retrouve bien :
$W(t_0) = (X_1(t_0) \cdots X_n(t_0)).$

Question II. 2. 2. La matrice $R(t, t_0)$ est la matrice de $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$ muni de sa base canonique. Sa *jème* colonne est $R(t, t_0)\,C_j$ qui est la valeur en t de la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = C_j$ qui est unique, et **indépendante de la famille** $(X_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ qu'on a choisie comme base de $S_0.$

Question II. 3. 1. $R(t, t_0) = W(t)\ W(t_0)^{-1}$ est dérivable comme produit sur $I,$ et $R'(t, t_0) = W'(t)\ W(t_0)^{-1}.$
Mais W se dérive composante par composante, donc colonne par colonne : $W'(t) = (X_1'(t) \cdots X_n'(t))$ sur $I.$
Et pour chaque colonne : $X_j'(t) = A(t)\,X_j(t)$ sur $I,$ donc matriciellement : $W'(t) = A(t)\,(X_1(t) \cdots X_n(t))$ sur $I.$

Ainsi $W'(t) = A(t)\,W(t)$ donc $\boxed{R'(t, t_0) = A(t)\,W(t)\ W(t_0)^{-1} = A(t)\,R(t, t_0) \text{ pour } t, t_0 \text{ dans } I}$

Alors si $X : t \mapsto R(t, t_0)\,V$ on a $X'(t) = R'(t, t_0)\,V = A(t)\,R(t, t_0)\,V = A(t)\,X(t)$ sur $I,$ donc X est une solution de (E_0) sur $I,$ et $X(t_0) = R(t_0, t_0)\,V = V.$ (Car il est clair que $R(t_0, t_0) = W(t_0)\ W(t_0)^{-1} = I_n.$)
C'est donc **la** solution de (E_0) vérifiant cette condition initiale.

Question II. 3. 2. Pour tout $(t_0, t_1, t_2) \in I^3$: $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = \left[W(t_2)\ W(t_1)^{-1}\right] \times \left[W(t_1)\ W(t_0)^{-1}\right].$
Donc $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = W(t_2)\ W(t_0)^{-1}$par associativité, et $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0).$
Appliqué à $t_2 = t_0$ on obtient $R(t_0, t_1)\,R(t_1, t_0) = R(t_0, t_0) = I_n$

$\boxed{\text{donc } R(t_1, t_0) \text{ est inversible et } R(t_1, t_0)^{-1} = R(t_0, t_1)}$

Question II. 4. 1. Si on considére $X : t \mapsto R(t, t_0)\,V(t),$ elle est dérivable sur I par produit.
Et $X'(t) = R'(t, t_0)\,V(t) + R(t, t_0)\,V'(t) = A(t)\,R(t, t_0)\,V(t) + R(t, t_0)\,V'(t) = A(t)\,X(t) + R(t, t_0)\,V'(t)$ sur $I.$

Ainsi : $\boxed{\big(X \text{ de cette forme est une solution de } (E) \text{ sur } I\big) \iff \big(R(t, t_0)\,V'(t) = B(t) \text{ sur } I\big)}$

Question II. 4. 2. Ce qui équivaut encore à $\left(V'(t) = R(t_0,t)\,B(t) \text{ sur } I\right)$ et on a une fonction continue sur I.
Donc une intégrale fonction de la borne supérieure est une fonction V qui convient :

$$\boxed{V : t \mapsto \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,\mathrm{d}u \text{ fournit une solution } Y : t \mapsto R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,\mathrm{d}u \text{ de } (E)}$$

Question II. 4. 3. Pour cette fonction $Y : t \mapsto R(t,t_0)\displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,\mathrm{d}u$, on peut dans le calcul de l'intégrale par rapport à u, rentrer le terme $R(t,t_0)$ dans l'intégrale (on considére t comme fixé pour ce calcul de $Y(t)$), en admettant, par linéarité, que $M\displaystyle\int_{t_0}^{t} H(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} M\,H(u)\,\mathrm{d}u$ pour une matrice carrée M et une colonne H.

$$\boxed{\text{Ainsi } Y : t \mapsto \int_{t_0}^{t} R(t,u)\,B(u)\,\mathrm{d}u \text{ définit une solution particulière de } (E) \text{ sur } I}$$

Remarque : elle est nulle en $t = t_0$. La solution de (E) vérifiant $X(t_0) = V_0$ est associée à la fonction définie sur I par : $X : t \mapsto R(t,t_0)\left[V_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t_0,u)\,B(u)\,\mathrm{d}u\right]$.

Partie III Une application de la résolvante.

Question III. 1. 1. Puisque (e_0) est linéaire sans second membre, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel, donc on peut chercher un polynôme normalisé solution, avec $a_m = 1 : y(t) = t^m + \cdots + a_0$.
Si y est un polynôme, alors $t(t-1)y'' + 3y' - 6y$ est aussi un polynôme. Considérons les termes de plus haut degré : $3y'$ est de degré $m-1$, alors que $t(t-1)y''$ et $-6y$ ont des termes de degré m, donc le terme de plus haut degré du polynôme $t(t-1)y'' + 3y' - 6y$ est $[m(m-1)-6]\,t^m$.
Si ce polynôme est nul, il est nécessaire que $m^2 - m - 6 = 0$ donc que $(m-3)(m+2) = 0$.

$\boxed{\text{Si } y \text{ est un polynôme solution de } (e_0) \text{ alors } y \text{ est de degré } 3}$.

Cherchons $y(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$ solution de (e_0) : alors $y'(t) = 3a\,t^2 + 2b\,t + c$ et $y''(t) = 6a\,t + 2b$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\text{Et alors } t(t-1)y''(t) + 3y'(t) - 6y(t) &= (t^2-t)(6a\,t+2b) + 3(3a\,t^2+2b\,t+c) - 6(a\,t^3+b\,t^2+c\,t+d)\\ &= (3a-4b)t^2 + (4b-6c)t + 3c - 6d \qquad \text{polynôme nul}\end{aligned}$$

si et seulement si $\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ 4b - 6c = 0 \\ 3c - 6d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{3}{4}a \\ c = \dfrac{2}{3}b = \dfrac{a}{2} \\ d = \dfrac{c}{2} = \dfrac{a}{4} \end{cases}$ donc $\boxed{\begin{array}{l} y(t) = k(4t^3+3t^2+2t+1) \\ \text{où } k \in \mathbb{R}, \text{ est la solution générale} \\ \text{polynôme de } (e_0). \end{array}}$

Le polynôme $\boxed{P(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1}$ tel que $P(0) = 1$ dirige cette droite de solutions polynômes sur $\mathbb{R}$.

Question III. 1. 2. La fonction Q est C^∞ sur $]-\infty,1[$ et $Q'(t) = \dfrac{2}{(1-t)^3}$, $Q''(t) = \dfrac{6}{(1-t)^4}$.

Ainsi sur $]-\infty,1[$: $t(t-1)Q''(t) + 3\,Q'(t) - 6\,Q(t) = \dfrac{6t(t-1) + 3\times 2(1-t) - 6(1-t)^2}{(1-t)^4} = 0$

$\boxed{\text{La fonction } Q \text{ est une solution de } (e_0) \text{ sur }]-\infty,1[}$ et sur $]1,\infty[$ aussi d'ailleurs.

Question III. 1. 3. 1. On suppose $R > 0$ et $y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,t^k$ de rayon de convergence R. On peut dériver terme à terme, y est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, et $t(t-1)y''(t) + 3y'(t) - 6y(t)$ égale la somme d'une série entière $E(t)$.

$$\begin{aligned}\text{Sur }]-R,R[,\ E(t) &= t^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\,t^{k-2} - t\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\,t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} 3ka_k\,t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 6a_k\,t^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k\,t^k - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_k\,t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3k\,a_k\,t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 6a_k\,t^k\end{aligned}$$

changement d'indice $\quad p = k \quad\quad p = k-1 \quad\quad p = k-1 \quad\quad p = k$

Ainsi $E(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}[p^2 - p - 6]a_p\,t^p - \sum_{p=0}^{\infty}[(p+1)(p-3)]a_{p+1}\,t^p = \sum_{p=0}^{\infty}[(p-3)(p+2)a_p - (p+1)(p-3)a_{p+1}]\,t^p$

Par le thm d'unicité des coefficients d'une série entière, cette série est constante nulle sur $]-R, R[$ si et seulement si : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad (p-3)(p+2)a_p - (p+1)(p-3)a_{p+1} = 0} \Leftrightarrow \boxed{a_{k+1} = \dfrac{k+2}{k+1} a_p \text{ si } k \neq 3}$

Ce qui équivaut à : $\boxed{\begin{cases} a_1 = 2a_0, \quad a_2 = \dfrac{3}{2} a_1 = 3a_0, \quad a_3 = \dfrac{4}{3} a_1 = 4a_0 \\ \text{et par récurrence, pour } k \geqslant 4, \quad a_k = \dfrac{k+1}{5} a_4 \end{cases}}$

On peut donc choisir a_0 et a_4 dans $\mathbb{R}$, et alors $\boxed{y(t) = a_0(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) + \dfrac{a_4}{5}\left[\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)\, t^k\right]}$

$\boxed{\text{Si } a_4 = 0 \text{ alors } R = \infty}$ car on a une solution polynôme.

$\boxed{\text{Si } a_4 \neq 0}$, alors les a_k sont non nuls pour $k \geqslant 4$ et $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to \ell = 1$ donc $\boxed{R = \dfrac{1}{\ell} = 1}$. En effet si $x > 0$, et si on pose $u_k = |a_k| x^k$ on a $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| x \to x$ et on a donc absolue convergence si $x < 1$ et divergence grossière si $x > 1$, avec le critère de d'Alembert et $R = 1$ est le rayon de convergence.

Question III. 1. 3. 2. On sait que $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{p=0}^{\infty} t^p$ sur $]-1, 1[$ donc $Q(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} p\, t^{p-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, t^k$ par dérivation sur $]-1, 1[$. Ainsi $\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, t^k - (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) = Q(t) - P(t)$.

La solution générale développable en série entière est donc $\boxed{y(t) = \left(a_0 - \dfrac{a_4}{5}\right) P(t) + \dfrac{a_4}{5} Q(t)}$

où a_0 et a_4 sont des réels quelconques et fixés. $\boxed{\text{Si } a_4 = 0, \text{ on a une solution sur } \mathbb{R}, \text{ si } a_4 \neq 0 \text{ sur }]-1, 1[}$.

Question III. 2. 1. $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (y'' = -a y' - b y + \varphi)$ et en posant $z = y'$:

$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left(X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \text{ solution de } \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -a z - b y + \varphi \end{pmatrix} \text{ sur } I. \right)$

donc $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \big((E) : X'(t) = A(t) X(t) + B(t) \text{ sur } I\big)$

avec $\boxed{A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}}$ continues sur I.

Question III. 2. 2. On sait, sous nos hypothèses (forme normalisée, avec des coefficients a et b continus sur I intervalle), que le Thm de Cauchy permet d'assurer que $Sol(\mathcal{E}_0)$ est un plan vectoriel en bijection avec $\mathbb{K}^2$. Si (f, g) forme une base de l'espace des fonctions associées aux solutions $Sol(\mathcal{E}_0)$, c'est une famille libre et $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ est aussi libre, donc système fondamental de (E_0).

Avec les notations : $W(t_0) = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \\ f_0' & g_0' \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{W(t_0)^{-1} = \dfrac{1}{f_0 g_0' - f_0' g_0} \begin{pmatrix} g_0' & -g_0 \\ -f_0' & f_0 \end{pmatrix}}$

avec $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\, {}^t(Com(M))$, avec $f_0 g_0' - f_0' g_0 \neq 0$, car (f, g) base.

$$\boxed{R(t, t_0) = W(t)\, W(t_0)^{-1} = \dfrac{1}{f_0 g_0' - f_0' g_0} \begin{pmatrix} f g_0' - f_0' g & f_0 g - f g_0 \\ f' g_0' - f_0' g' & f_0 g' - f' g_0 \end{pmatrix}}$$

Question III. 3. 1. On a, sur $I =]0, 1[$, l'écriture normalisée de (e) qui est :

$(\mathcal{E}) : y'' + \dfrac{3}{t(t-1)} y' - \dfrac{6}{t(t-1)} y = \dfrac{20t^3}{t-1}$ d'où $\boxed{A(t) = \dfrac{1}{t(t-1)} \begin{pmatrix} 0 & t(t-1) \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \dfrac{20t^3}{(t-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Question III. 3. 2. Ainsi

$$\det(W(u)) = \begin{vmatrix} P(u) & Q(u) \\ P'(u) & Q'(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4u^3+3u^2+2u+1 & \dfrac{1}{(1-u)^2} \\ 12u^2+6u+2 & \dfrac{2}{(1-u)^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-u)^3}\begin{vmatrix} 4u^3+3u^2+2u+1 & 1-u \\ 12u^2+6u+2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\det(W(u)) = \dfrac{20u^3}{(1-u)^3}}$ avec $20u^3 = 2(4u^3+3u^2+2u+1) - (1-u)(12u^2+6u+2)$.

Par ailleurs : $Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \dfrac{(4u^3+3u^2+2u+1)(1-u)^2 - (4t^3+3t^2+2t+1)(1-t)^2}{(1-t)^2(1-u)^2}$

et $(4u^3+3u^2+2u+1)(1-u)^2 = 4u^5 - 5u^4 + 1$ donc :

$$\boxed{Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{4u^5-5u^4-4t^5+5t^4}{(1-t)^2(1-u)^2} \text{ sur } I^2}$$

Question III. 3. 3. On applique **II.4.3.** , avec $Y(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} R(t,u)\,B(u)\,\mathrm{d}u$ dont on ne garde que la première composante car $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, et $R(t,u)B(u) = \dfrac{1}{\det(W(u))}\begin{pmatrix} fg'_u - f'_u g & f_u g - f g_u \\ f' g'_u - f'_u g' & f_u g' - f' g_u \end{pmatrix} \times \dfrac{20u^3}{(u-1)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

en prenant u à la place de t_0. Cette première composante vaut : $\dfrac{1}{\det(W(u))}\dfrac{20t^3}{(t-1)}(Q(t)P(u) - P(t)Q(u))$

c'est à dire : $\dfrac{(1-u)^3}{20u^3}\dfrac{20u^3}{(u-1)}\left(\dfrac{4u^5-5u^4-4t^5+5t^4}{(1-t)^2(1-u)^2}\right) = \dfrac{4t^5-5t^4-4u^5+5u^4}{(1-t)^2}$ (Calculs sur $]0,1[^2$)

$$\boxed{\text{La fonction } y : t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}\int_{t_0}^{t}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\,\mathrm{d}u \text{ définie une solution particulière de } (e) \text{ sur }]0,1[}$$

$\displaystyle\int_0^{t_0}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\,\mathrm{d}u$ est bien définie, et vaut $(4t^5-5t^4)t_0 - \dfrac{2}{3}t_0^6 + {t_0}^5$

Alors $\dfrac{1}{(1-t)^2}\displaystyle\int_0^{t_0}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{(1-t)^2}\left[(4t^5-5t^4)t_0 - \dfrac{2}{3}t_0^6 + t_0^5\right]$

Or $(4t^3+3t^2+2t+1)(1-t)^2 = 4t^5-5t^4+1$ donc $\dfrac{(4t^5-5t^4+1)}{(1-t)^2} = P(t)$ et $\dfrac{4t^5-5t^4}{(1-t)^2} = P(t) - Q(t)$

Ainsi $\dfrac{1}{(1-t)^2}\displaystyle\int_0^{t_0}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\,\mathrm{d}u = t_0[P(t)-Q(t)] + \left[t_0^5 - \dfrac{2}{3}t_0^6\right]Q(t)$ est une combinaison linéaire de P et Q, donc une solution de l'équation homogène (e_0). En l'ajoutant à la solution particulière de (e), on obtient une autre $\boxed{\text{solution particulière définie par } y_0(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2}\displaystyle\int_0^{t}(4t^5-5t^4-4u^5+5u^4)\,\mathrm{d}u \text{ sur }]0,1[}$.

Ce qu'on peut calculer en $y_0(t) = \dfrac{\frac{10}{3}t^6 - 4t^5}{(1-t)^2}$ sur $]0,1[$. Cette fonction est la restriction à $]0,1[$ d'une fraction rationnelle de classe C^∞ sur $]-\infty,1[$, il en est de même pour P et Q.

$$\boxed{\text{Les fonctions } y(t) = y_0(t) + k_1P(t) + k_2Q(t) \text{ décrivent les solutions de } (e) \text{ sur }]0,1[\text{ pour} (k_1,k_2) \in \mathbb{K}^2}$$

Ce sont celles dont on peut assurer l'existence et l'unicité pour des conditions initiales données en $t_0 \in]0,1[$, par le Thm de Cauchy.

Si $([0,1[, y(t))$ est une solution sur $[0,1[$, alors sa restriction à $]0,1[$ est une solution de la forme précédente. Réciproquement une solution sur $]0,1[$ de la forme précédente se prolonge en $t = 0$ de façon C^∞ (fraction rationnelle) avec $\boxed{y(0) = k_1 + k_2 \text{ et } y'(0) = 2k_1 + 2k_2}$ car $y_0'(0) = 0$ (il y a un t^5 en facteur), $P'(0) = 2$ et $Q'(0) = 2$. D'ailleurs elles se prolongent sur $]-\infty,1[$.

Les solutions qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$ sont les fonctions :

$$\boxed{y(t) = y_0(t) + k_1\big[P(t) - Q(t)\big] = \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + k_1\big[P(t) - Q(t)\big]} \text{ où } k_1 \in \mathbb{K} \text{ est quelconque et fixé.}$$

Il y a donc une **droite affine** de solutions vérifiant ces conditions initiales.
