Banque PT
Maths I-A
Corrigé de DURIN J-P PT Cluny.

1ère Partie.

$\mathrm{P} = \{(x,y); y>0\}$, soit $G : \mathrm{P} \to \mathbf{R}$ définie par $G(x,y) = Arc\tan(\frac{x}{y})$.

1) G est de classe C^∞ sur P car $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$ sont des fractions rationnelles en x et y définies sur P.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$ et donc $\Delta G = 0$ sur P, G <u>est harmonique sur P.</u>

----

2) Recherche des fonctions φ , C^∞ de **R** dans **R**, telles que $F:(x,y) \to \varphi(\frac{x}{y})$ soit harmonique sur P.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}\varphi'(\frac{x}{y}) \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\varphi'(\frac{x}{y}) \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}\varphi'(\frac{x}{y}) + \frac{x^2}{y^4}\varphi''(\frac{x}{y})$$

Dès lors, pour que $\Delta F = 0$ sur P, il faut que (après avoir multiplié par y^2):

$\forall (x,y) \in \mathrm{P}$, $(1+\frac{x^2}{y^2})\varphi''(\frac{x}{y}) + 2\frac{x}{y}\varphi'(\frac{x}{y}) = 0$ c'est à dire que φ doit vérifier:

$\forall t \in \mathbf{R}$, $(1+t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0$ soit $\left[(1+t^2)\varphi'(t)\right]' = 0$ d'où $(1+t^2)\varphi'(t) = K$ soit enfin

$\underline{\varphi(t) = KArc\tan(t) + L}$ où K, L sont des constantes réelles.

----

3) Soit h: $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ définie par $h(t) = Arc\tan(t) + Arc\tan(\frac{1}{t})$, $h'(t) = 0$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ ce qui assure que h est constante sur ces deux intervalles.

$t=1$ donne $h(1) = \frac{\pi}{2}$, $t=-1$ donne $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$

et finalement $Arc\tan(t) + Arc\tan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(t)$

----

4) $Arg(z)$ est un argument de $z \neq 0$, situé dans $]-\pi,\pi]$. Notons tout de suite que pour $(x,y) \in \mathrm{P}$, $\theta = Arg(x+iy) \in]0,\pi[$ et par suite:

pour $x>0$ $\theta = Arc\tan(\frac{y}{x}) = \frac{\pi}{2} - Arc\tan(\frac{x}{y})$

pour $x<0$ $\theta = \pi + Arc\tan(\frac{y}{x}) = \pi - \frac{\pi}{2} - Arc\tan(\frac{x}{y})$ et finalement $(x,y) \in \mathrm{P}$ avec $x \neq 0$,

$Arg(x+iy) = \frac{\pi}{2} - Arc\tan(\frac{x}{y})$, cette formule restant valable pour $x=0$, $(Arg(iy) = \frac{\pi}{2})$

<u>Conclusion:</u> $\forall (x,y) \in P \quad G(x,y) = \dfrac{\pi}{2} - Arg(x+iy)$

----

5) Soit $x \in \mathbf{R}$,

<u>$x=0$</u> $\lim\limits_{y \to 0^+} G(x,y) = \lim\limits_{y \to 0^+} 0 = 0$, <u>$x>0$</u> $\lim\limits_{y \to 0^+} G(x,y) = \dfrac{\pi}{2}$, <u>$x<0$</u> $\lim\limits_{y \to 0^+} G(x,y) = -\dfrac{\pi}{2}$

et finalement: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & pour \quad x>0 \\ 0 & pour \quad x=0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & pour \quad x<0 \end{cases}$

<u>Etude de l'intégrale</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}dt$ pour $(x,y) \in P$.

$$\forall (x,y) \in P,\ t \to \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2} = \begin{cases} \dfrac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2} & pour \quad t>0 \\ 0 & pour \quad t=0 \\ -\dfrac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2} & pour \quad t<0 \end{cases}$$ est continue par morceaux sur **R**, donc localement intégrable sur **R**. Le seul problème d'intégrale généralisée est donc en $+\infty$ et $-\infty$.

$V(t=+\infty) \quad \dfrac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2} \approx \dfrac{\frac{\pi}{2}y}{t^2}$ et Riemann assure la convergence.

$V(t=-\infty) \quad -\dfrac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2} \approx -\dfrac{\frac{\pi}{2}y}{t^2}$ et là encore Riemann donne la convergence.

<u>Calcul de</u> $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}dt$.

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} -\frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2}dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2}dt$ Posons $t=-u$ dans la première intégrale.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} -\frac{\frac{\pi}{2}y}{(x-t)^2+y^2}dt = \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{\pi}{2}y}{(x+u)^2+y^2}du$, par suite $I = \dfrac{\pi}{2}y\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-t)^2+y^2} - \frac{1}{(x+t)^2+y^2}\right)dt$

soit $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x-t}{y})^2+1} - \frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x+t}{y})^2+1}\right)dt = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2Arc\tan(\frac{x}{y})\right) = \pi G(x,y)$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}dt = \pi G(x,y)$$

2ème Partie.

1) Soit la famille de coniques suivantes: F : $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}=1$. Cette expression nécessite que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, On verra plus loin ce que l'on peut dire pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

$\underline{\alpha < 0}$ $\left\{(x,y);\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}=1\right\}=\varnothing$

$\underline{0<\alpha<1}$ $\dfrac{x^2}{\alpha}-\dfrac{y^2}{1-\alpha}=1$ est l'équation d'une hyperbole centrée en O, d'axe focal Ox, de sommets les points $(\sqrt{\alpha},0)$ et $(-\sqrt{\alpha},0)$, de foyers les points $(-1,0)$ et $(1,0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $y=(+,-)\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}x$.

$\underline{\alpha > 1}$ $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}=1$ est l'équation d'une ellipse centrée en O, d'axe focal Ox, de sommets les points $(\sqrt{\alpha},0)$, $(-\sqrt{\alpha},0)$, $(0,\sqrt{\alpha-1})$, $(0,-\sqrt{\alpha-1})$ et de foyers les points $(-1,0)$ et $(1,0)$.

$\underline{\alpha = 0}$ et $\underline{\alpha = 1}$ Ecrivons alors la relation sous la forme: $(\alpha-1)x^2+\alpha y^2=\alpha(\alpha-1)$

Alors $\alpha = 0$ fournit $x^2=0$, soit l'axe Oy compté 2 fois (hyperbole du type précédent dégénérée en deux droites lorsque $\alpha \to 0$).

Et $\alpha = 1$ fournit $y^2=0$, soit l'axe Ox compté 2 fois (réunion de l'ellipse dégénérée en le segment $[-1,1]$ de l'axe Ox ($\alpha \to 1^+$) et de l'hyperbole dégénérée en les 2 demi-droites $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$ de l'axe Ox ($\alpha \to 1^-$))

----

2) Soit M_0 $(x_0,y_0)\in \mathsf{P}$, avec $x_0 \neq 0$, étude de $\Psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $\Psi(\alpha)=\dfrac{x_0^2}{\alpha}+\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}-1$.

Le domaine de définition de Ψ est $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$, $\Psi'(\alpha)=-\dfrac{x_0^2}{\alpha^2}-\dfrac{y_0^2}{(\alpha-1)^2}<0$.

Ψ décroit de $+\infty$ à $-\infty$ sur $]0,1[$ et de $+\infty$ à -1 sur $]1,+\infty[$.

Dès lors, soit $(x_0,y_0)\in \mathsf{P}$, avec $x_0 \neq 0$. Trouver une conique de la famille F passant par (x_0,y_0), c'est rechercher $\alpha \in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ tel que $\dfrac{x_0^2}{\alpha}+\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}=1$ autrement dit tel que $\Psi(\alpha)=0$. D'après l'étude précédente et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe 2 valeurs de α possibles répondant à la question: $\alpha_1 \in\,]0,1[\, \to$ hyperbole et $\alpha_2 \in\,]1,+\infty[\, \to$ ellipse.

$\alpha_1+\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$ sont la somme et le produit des racines de l'équation du 2ème degré en α : $(\alpha-1)x_0^2+\alpha y_0^2-\alpha(\alpha-1)=0$ soit $\alpha^2-(x_0^2+y_0^2+1)\alpha+x_0^2=0$ et on a donc:

$$\alpha_1+\alpha_2=x_0^2+y_0^2+1 \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2=x_0^2$$

Points de P pour lesquels $x_0=0$.

On cherche alors α tel que $\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}=1$ soit $\alpha = 1+y_0^2$. On ne trouve qu'une seule valeur de α possible, plus grande que 1. Seule une ellipse de la famille F passe par le point $(0, y_0) \in \mathsf{P}$.

Rq: On pourrait à la rigueur dire qu'il passe aussi par ce point l'hyperbole dégénérée en l'axe Oy compté 2 fois dont j'ai parlé précédemment.

----

3) Soit M_0 $(x_0, y_0) \in \mathsf{P}$ avec $x_0 \neq 0$ et E et H l'ellipse et l'hyperbole de F passant par M_0 .

H: $\dfrac{x^2}{\alpha_1}+\dfrac{y^2}{\alpha_1-1}-1=0 \qquad \alpha_1 \in \left]0,1\right[$

E: $\dfrac{x^2}{\alpha_2}+\dfrac{y^2}{\alpha_2-1}-1=0 \qquad \alpha_2 \in \left]1,+\infty\right[$

La normale en M_0 à H est dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_0}{\alpha_1} \\ \dfrac{2y_0}{\alpha_1-1} \end{pmatrix}$ et celle à E par $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_0}{\alpha_2} \\ \dfrac{2y_0}{\alpha_2-1} \end{pmatrix}$ et on va montrer que le produit scalaire $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$. Or en effet

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 4\left[\frac{x_0^2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{y_0^2}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)}\right] = 4\left[1+\frac{y_0^2}{x_0^2-(x_0^2+y_0^2+1)+1}\right] = 4[1-1]=0$$

----

4) Soit les fonctions suivantes: $(u,v) \to x(u,v) = ch(u)\cos(v)$ et $(u,v) \to y(u,v) = sh(u)\sin(v)$.

Montrons que les deux fonctions x et y sont harmoniques sur $\mathbf{R^2}$. Elles sont bien C^∞ sur $\mathbf{R^2}$. On a:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = shu\cos v \ , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = chu\cos v \ , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -chu\sin v \ , \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -chu\cos v \quad \text{et} \quad \Delta x = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = chu\sin v \ , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = shu\sin v \ , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = shu\cos v \ , \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -shu\sin v \quad \text{et} \quad \Delta y = 0$$

x et y sont harmoniques sur $\mathbf{R^2}$.

Soit $H:(u,v) \to (x(u,v), y(u,v))$. La matrice jacobienne de H est:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} shu\cos v & -chu\sin v \\ chu\sin v & shu\cos v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Jac(H) = sh^2u\cos^2 v + ch^2u\sin^2 v = ch^2u - \cos^2 v$$

$Jac(H) = ch^2u - \cos^2 v$ s'annule en les points $(u,v) = (0, k\pi)$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

----

5) Image par H de la droite $u = u_0$.

C'est la courbe paramétrée par: $\begin{cases} x = chu_0\cos v \\ y = shu_0\sin v \end{cases}$ d'où les deux cas:

$u_0 = 0$ ($x = \cos v$, $y = 0$) correspond au segment $[-1,1]$ de l'axe Ox.

$u_0 \neq 0$ l'équation cartésienne de la courbe est alors: $\dfrac{x^2}{ch^2u_0}+\dfrac{y^2}{sh^2u_0}=1$ soit $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}=1$ avec $\alpha = ch^2u_0 > 1$ ce qui fournit une ellipse de la famille F .

Image par H de la droite $v = v_0$.

C'est la courbe paramétrée par: $\begin{cases} x = \cos v_0 chu \\ y = \sin v_0 shu \end{cases}$ d'où les quatre cas:

$v_0 = 2k\pi$ ($x = chu$, $y = 0$) correspond à la demi-droite $[1,+\infty[$ de l'axe Ox.

$v_0 = (2k+1)\pi$ ($x = -chu$, $y = 0$) correspond à la demi-droite $]-\infty,-1]$ de l'axe Ox.

$v_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($x = 0$, $y = (-1)^k shu$) correspond à l'axe Oy.

$v_0 \neq k\dfrac{\pi}{2}$ l'équation cartésienne de la courbe est alors: $\dfrac{x^2}{\cos^2 v_0} - \dfrac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1$ soit $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ avec $\alpha = \cos^2 v_0 \in]0,1[$ ce qui fournit une moitié d'hyperbole de la famille F, partie de l'hyperbole où x a le signe de $\cos v_0$.

Etude de la réciproque.

Autrement dit: soit une conique de la famille F d'équation $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ avec $\alpha \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, est-elle l'image par H d'une droite $u = u_0$ ou $v = v_0$.

$\alpha \in]0,1[$ il existe une infinité de valeurs v_0 telles que $\alpha = \cos^2 v_0$ et alors $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ s'écrit $\dfrac{x^2}{\cos^2 v_0} - \dfrac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1$ et se paramètre par: $\begin{cases} x = \cos v_0 chu \\ y = \sin v_0 shu \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -\cos v_0 chu \\ y = -\sin v_0 shu \end{cases}$ et l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ est donc en fait l'image par H de la réunion des 2 droites $v = v_0$ et $v = v_0 + \pi$

$\alpha \in]1,+\infty[$ il existe une unique valeur $u_0 > 0$ telle que $\alpha = ch^2 u_0$ et alors $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ s'écrit $\dfrac{x^2}{ch^2 u_0} + \dfrac{y^2}{sh^2 u_0} = 1$ et se paramètre par: $\begin{cases} x = chu_0 \cos v \\ y = shu_0 \sin v \end{cases}$ donc est l'image par H de la droite $u = u_0$

H bijection de $]0,+\infty[\times]0,\pi[$ sur P.

$(u,v) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\Rightarrow shu \sin v > 0$ donc $H(u,v) \in$ P.

Réciproquement, soit $(x_0, y_0) \in$ P :

1er cas: $x_0 = 0$ alors $(0, y_0) = H(u, \dfrac{\pi}{2})$ où u est l'unique valeur telle que $shu = y_0$

$$(0, y_0) = H(\ln(y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}, \frac{\pi}{2})$$

2ème cas: $x_0 \neq 0$ alors (x_0, y_0) est l'intersction d'une ellipse et d'une hyperbole de F :

H: $\dfrac{x^2}{\alpha_1} + \dfrac{y^2}{\alpha_1 - 1} - 1 = 0$ $\alpha_1 \in]0,1[$ et E: $\dfrac{x^2}{\alpha_2} + \dfrac{y^2}{\alpha_2 - 1} - 1 = 0$ $\alpha_2 \in]1,+\infty[$

Soit alors $u \in]0,+\infty[; \alpha_2 = ch^2 u$ u est unique

$v \in]0,\pi[; \alpha_1 = \cos^2 v$ $\cos v$ ayant le signe de x_0, v est alors unique.

$(x_0, y_0) = H(u,v)$ et donc H réalise bien une bijection de $]0,+\infty[\times]0,\pi[$ sur P .

3ème Partie.

Notations: pour $(a,b) \in$ P et $0 \le r < b$ D_r = disque fermé de centre (a,b) et de rayon r donc $D_r \subset$ P

$$m(a,b,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$$

$$M(a,b,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} f(u,v)dudv & si \quad r \neq 0 \\ f(a,b) & si \quad r = 0 \end{cases}$$

1) Soit r tel que $0 < r < b$.

Pour $(u,v) \in D_r$, on peut poser $\begin{cases} u = a + \rho\cos\theta \\ v = b + \rho\sin\theta \end{cases}$ avec $(\rho,\theta) \in [0,r]\times[0,2\pi]$ et le jacobien de ce changement de variable vaut ρ . On en déduit:

$$\iint_{D_r} f(u,v)dudv = \int_0^r\left[\int_0^{2\pi}\rho f(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)d\theta\right]d\rho \quad \text{soit}$$

$$\iint_{D_r} f(u,v)dudv = 2\pi\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho$$

Pour la deuxième formule, utilisons la formule de Green-Riemann rappelée au début.

$$\iint_{D_r}\Delta f(u,v)dudv = \iint_{D_r}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial u}) - \frac{\partial}{\partial v}(-\frac{\partial f}{\partial v})\right]dudv = \int_{\Gamma^+} -\frac{\partial f}{\partial v}du + \frac{\partial f}{\partial u}dv$$

où Γ^+ est paramétrée par $\begin{cases} u = a + r\cos\theta \\ v = b + r\sin\theta \end{cases}$ de sorte que

$$\iint_{D_r}\Delta f(u,v)dudv = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{\partial f}{\partial v}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial u}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)(r\cos\theta)\right]d\theta$$

soit enfin:

$$\iint_{D_r}\Delta f(u,v)dudv = r\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial u}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial v}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\sin\theta\right]d\theta$$

----

2) Montrons que $r \to m(a,b,r)$ est continue sur $[0,b[$

f étant C^∞ sur P , $h(r,\theta) = f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$ est continue sur $[0,b[\times[0,2\pi]$ et par suite le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale simple dépendant d'un paramètre s'applique:

$$r \to m(a,b,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r,\theta)d\theta \quad \text{est continue sur } [0,b[.$$

----

3) <u>Pour</u> $r \in \left]0,b\right[$ on a $M(a,b,r) = \dfrac{1}{\pi r^2} 2\pi \int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho$ et $M(a,b,r)$ apparait comme le produit de 2 fonctions continues sur $\left]0,b\right[$ à savoir $\dfrac{2}{r^2}$ et $\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho$. Ces 2 fonctions sont même dérivables sur $\left]0,b\right[$ car $\rho \to \rho m(a,b,\rho)$ est continue sur $\left[0,b\right[$.

$r \to M(a,b,r) = \dfrac{2}{r^2}\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho$ est continue sur $\left]0,b\right[$.

<u>Continuité à droite en</u> $r = 0$.

On calcule $\dfrac{2}{r^2}\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho - f(a,b)$ qui peut s'écrire $\dfrac{2}{r^2}\int_0^r \rho(m(a,b,\rho) - f(a,b))d\rho$ car $\dfrac{2}{r^2}\int_0^r \rho d\rho = 1$. Puis $m(a,b,\rho) - f(a,b) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta) - f(a,b)]d\theta$ car $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1$. Mais alors la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne

$$f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta) - f(a,b) = \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial u}(a,b) + \rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial v}(a,b) + \rho\varepsilon(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

avec $\varepsilon(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) \to 0$ quand $\rho \to 0$. Et par conséquent on a:

$$M(a,b,r) - f(a,b) = \frac{2}{r^2}\int_0^r \frac{\rho^2}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\varepsilon(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta\right]d\rho \ .$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, $\exists r_0 > 0$ tel que $\rho \le r_0 \Rightarrow \left|\varepsilon(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right| \le \varepsilon$. D'où pour $r \le r_0$ on a $\left|M(a,b,r) - f(a,b)\right| \le \dfrac{2}{r^2}\int_0^r \varepsilon\rho^2 d\rho = \dfrac{2}{3}\varepsilon r$ et donc $\left|M(a,b,r) - f(a,b)\right| \to 0$ quand $r \to 0^+$

$r \to M(a,b,r)$ est continue sur $\left[0,b\right[$.

---

4) <u>Montrons que</u> $r \to m(a,b,r)$ <u>est dérivable sur</u> $\left]0,b\right[$.

$\dfrac{\partial h}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial u}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial v}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ est continue sur $\left[0,b\right[\times\left[0,2\pi\right]$ et le théorème de dérivation sous le signe $\int$ s'applique, et on peut écrire

$\dfrac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial u}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial v}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta))d\theta$ soit

$\dfrac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \dfrac{1}{2\pi r}\iint_{D_r}\Delta f(u,v)dudv$ pour $r \in \left]0,b\right[$ d'après 1).

---

5) J'ai déjà indiqué à la question 3) que $r \to M(a,b,r)$ était le produit de 2 fonctions dérivables sur $\left]0,b\right[$.

On a: $\dfrac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = -\dfrac{4}{r^3}\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho + \dfrac{2}{r^2}rm(a,b,r)$ soit

$$\frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = \frac{2}{r}(m(a,b,r) - M(a,b,r))$$

4ème Partie.

1) Supposons f harmonique sur P .

La formule de la question 4) de la 3ème partie: $\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} \Delta f(u,v)dudv$ assure que $\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = 0$ sur $]0,b[$ puisque $\Delta f(u,v) = 0$ en tout point de D_r , et donc que $m(a,b,r)$ est constant sur $]0,b[$ et par continuité sur $[0,b[$. $m(a,b,r) = m(a,b,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a,b)d\theta = f(a,b)$.

$m(a,b,r) = f(a,b)$ pour tout $(a,b) \in$ P donc f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P .

----

2) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P .

Alors $\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} f(u,v)dudv = \frac{2}{r^2}\int_0^r \rho m(a,b,\rho)d\rho = \frac{2}{r^2}\int_0^r \rho f(a,b)d\rho = f(a,b)$ et donc

$M(a,b,r) = \begin{cases} f(a,b) & si \quad r \neq 0 \\ f(a,b) & si \quad r = 0 \end{cases}$ f vérifie la propriété de moyenne spaciale sur P .

----

3) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne spaciale sur P .

$M(a,b,r) = f(a,b) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial r} = 0$ pour $r \in]0,b[$.

La formule de la question 5) de la 3ème partie: $\frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = \frac{2}{r}(m(a,b,r) - M(a,b,r))$ assure alors que $m(a,b,r) = M(a,b,r) = f(a,b)$ pour tout $(a,b) \in$ P , et pour $r \in]0,b[$.

f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P .

----

4) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne spaciale sur P , alors f vérifie aussi la propriété de moyenne circulaire sur P . On a donc, pour tout $(a,b) \in$ P , et pour $r \in]0,b[$

$f(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$ et le théorème de dérivation sous le signe $\int$ s'applique

$\frac{\partial f}{\partial u}(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial u}(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)d\theta$ ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial u}$ vérifie aussi la propriété de moyenne circulaire sur P et donc aussi celle de moyenne spaciale sur P d'après 2). Même raisonnement pour $\frac{\partial f}{\partial v}$. En appliquant le résultat 2 fois on a que $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ vérifient la propriété de moyenne spaciale sur P et donc par linéarité Δf aussi.

----

5) Supposons que f vérifie la propriété de moyenne circulaire sur P , alors $m(a,b,r) = f(a,b)$ et donc $\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = 0$ d'où d'après la question 4) de la 3ème partie $\frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} \Delta f(u,v)dudv = 0$ soit

$$\iint_{D_r} \Delta f(u,v)dudv = 0$$

Mais alors, puisque Δf vérifie la propriété de moyenne spaciale sur P ,

$\Delta f(a,b) = \dfrac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} \Delta f(u,v)dudv = 0$ pour $r \neq 0$ et donc $\Delta f(a,b) = 0$ pour tout $(a,b) \in$ P