Mines-Ponts 2012. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

A. Équations algébriques réciproques.

1. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ il vient $u_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$ ce qui prouve que u_n est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Elle est clairement linéaire et involutive donc u_n est bien une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$ par rapport à $\mathcal{P} \bigcup \{0\}$ parallèlement à $\mathcal{D} \bigcup \{0\}$. $\square$

2. Il résulte immédiatement de ce qui précède que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ appartient à $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{D}$) si et seulement $a_k = a_{n-k}$ (resp $a_k = -a_{n-k}$) pour tout entier k entre 0 et $\mathrm{Int}(n/2)$. $\square$

3. Soit R réciproque (donc non nul). Si R est constant alors $R = a_0 \neq 0$ et si R est de degré $n \geqslant 1$ alors $a_0 = \pm a_n \neq 0$ donc dans les deux cas 0 n'est pas racine de R. $\square$
Soit désormais R un polynôme réciproque admettant une racine x. Alors R est forcément de degré $n \geqslant 1$ d'après ce qui précède et $R(\frac{1}{x}) = \pm \frac{1}{x^n} R(x) = 0$ donc $\frac{1}{x}$ est également racine de R. $\square$

Soit $R \in \mathcal{D}$ de degré n. Il vient $X^n R(\frac{1}{X}) = -R(X)$ donc $R(1) = -R(1)$. Ainsi 1 est racine de tout élément de $\mathcal{D}$. $\square$
Soit $R \in \mathcal{P}$ de degré $2n+1$. Il vient $X^{2n+1} R(\frac{1}{X}) = R(X)$ donc $-R(-1) = R(-1)$. Ainsi -1 est racine de tout élément de $\mathcal{P}$ de degré impair. $\square$

4 • Supposons P et Q réciproques de degrés respectifs p et q. Il vient $X^p P(\frac{1}{X}) = \varepsilon_1 P(X)$ et $X^q Q(\frac{1}{X}) = \varepsilon_2 Q(X)$ avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ suivant l'espèce de ces deux polynômes. Alors R est de degré $n = p + q$ et :
$X^n R(\frac{1}{X}) = X^{p+q} P(\frac{1}{X}) Q(\frac{1}{X}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 P(X) Q(X) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 R(X)$ donc R est réciproque et son espèce est donnée par $\varepsilon_1 \varepsilon_2$.

• Supposons désormais R et par exemple P réciproques. On note toujours p et q les degrés de P et de Q, l'espèce de R étant donnée par ε. Il vient $X^{p+q} P(\frac{1}{X}) Q(\frac{1}{X}) = \varepsilon P(X) Q(X)$ d'une part et

$X^{p+q} P(\frac{1}{X}) Q(\frac{1}{X}) = X^p P(\frac{1}{X}) X^q Q(\frac{1}{X}) = \varepsilon_1 P(X) X^q Q(\frac{1}{X})$ d'autre part.

Ainsi la fraction rationnelle $X^q Q(\frac{1}{X})$ est-elle égale à $\dfrac{\varepsilon P(X) Q(X)}{\varepsilon_1 P(X)} = \varepsilon \varepsilon_1 Q(X)$ ce qui prouve que Q est réciproque d'espèce donnée par $\varepsilon \varepsilon_1$.

• En conclusion si $R = PQ$ et si deux de ces trois polynômes sont réciproques alors le troisième l'est également et soit ils sont tous trois de première espèce soit deux sont de seconde espèce et le troisième de première espèce. $\square$

5. On note que $X - 1 \in \mathcal{D}$ donc si $P \in \mathcal{P}$ alors $D = (X-1)P \in \mathcal{D}$ par la question précédente.
Réciproquement si D appartient à $\mathcal{D}$ alors 1 est racine (question 3.) donc il existe un unique polynôme P tel que $D = (X-1)P$ et la question précédente implique que $P \in \mathcal{P}$.
En conclusion $D \in \mathcal{D}$ si et seulement si il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $D = (X-1)P$. $\square$

6. Si $P \in \mathcal{P}$ est de degré impair alors 1 est racine et on prouve exactement comme ci-dessus :
Un polynôme P de degré impair est élément de $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe $D \in \mathcal{D}$ tel que $P = (X+1)D$ $\square$

7. L'unicité en cas d'existence est évidente car si P et Q sont deux polynômes convenant ils prennent la même valeur en une infinité de réels.

Pour l'existence on raisonne par récurrence sur p.
Soit le prédicat $\mathcal{E}_p$:« Il existe un polynôme P_p de degré p tel que $X^p + \frac{1}{X^p} = P_p(X + \frac{1}{X})$ »

$\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ sont vrais. Supposons $\mathcal{E}_k$ vrai jusqu'au rang p avec $p \geqslant 1$. Il vient alors :
$X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}} = (X + \frac{1}{X})(X^p + \frac{1}{X^p}) - (X^{p-1} + \frac{1}{X^{p-1}}) = (X + \frac{1}{X}) P_p(X + \frac{1}{X}) - P_{p-1}(X + \frac{1}{X})$ par hypothèse de récurrence ce qui prouve bien que $\mathcal{E}_{p+1}$ est vrai. $\square$

8. Soit R réciproque n'admettant ni 1 ni -1 pour racine. Alors R est réciproque de première espèce et de degré $2n$ pair par la question 3.
Comme R est réciproque de première espèce il existe d'après la question 7 un polynôme P de degré n tel que $\frac{1}{X^n} R(X) = P(X + \frac{1}{X})$. Donc $x \neq 0$ est racine de R si et seulement si $P(x + \frac{1}{x}) = 0$ $\square$

Ce polynôme n'est pas unique ni même son degré car par exemple le polynôme $(X^2+1)P$ convient également. En effet $(X+\dfrac{1}{X})^2+1$ n'admet aucune racine réelle. $\square$

B. Un problème de dénombrement.

9. Si $u \in S_{i,j}$ ou $u \in S'_{i,j}$ on a évidemment $0 \leqslant u_k \leqslant j$ pour tout k de 1 à i. Donc ce sont deux ensembles finis. $\square$

Si $u \in S_{i+1,j}$ on a $\sum\limits_{k=0}^{i+1} u_k = j$ donc $\sum\limits_{k=0}^{i} u_k \leqslant j$ puisque $u_{i+1} \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que l'application proposée, notée φ, est bien définie. Elle est injective car si $\varphi(u)=\varphi(v)$ on a $u_k = v_k$ pour k de 0 à i et comme $\sum\limits_{k=0}^{i+1} u_k = j = \sum\limits_{k=0}^{i+1} v_k$ on a également $u_{i+1} = v_{i+1}$ ce qui prouve que $u = v$. Elle est surjective car si $v \in S'_{i,j}$ en notant $a = j - \sum\limits_{k=0}^{i} v_k$ on a $\varphi(u) = v$ où u est l'élément de $S_{i+1,j}$ défini par $u_k = v_k$ pour k de 0 à i et $u_{i+1} = a$. $\square$

10. $S'_{i,j+1}$ est clairement la réunion disjointe de $S_{i,j+1}$ et de $S'_{i,j}$ de sorte que $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$ $\square$
Donc $s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,j}$ en changeant i en $i+1$. Or $S_{i+1,j+1}$ est équipotent à $S'_{i,j+1}$ par la question 9. De sorte que $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$ $\square$

11. Soit pour $n \geqslant 2$ le prédicat $\mathcal{E}_n$:« $s'_{i,j} = \mathrm{C}_{n-1}^{i}$ dès lors que $i+j=n$ »
• Comme i et j sont des entiers strictement positifs, seul le couple $(i,j)=(1,1)$ est tel que $i+j=2$. L'unique élément de $S'_{1,1}$ est le couple $(1,0)$. Donc $s'_{1,1}=1$. Or on a aussi $\mathrm{C}_{i+j-1}^{i} = \mathrm{C}_1^1 = 1$ ce qui prouve que $\mathcal{E}_2$ est vrai.
• Supposons désormais $\mathcal{E}_k$ vrai jusqu'au rang $n \geqslant 2$ et soit un couple $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $i+j=n+1$.
<u>Premier cas</u> : $i=1$. Alors $S'_{i,j} = S'_{1,n}$ est clairement constitué des suites $(1,u_1)$ avec $0 \leqslant u_1 \leqslant n-1$ donc $s'_{i,j} = n = \mathrm{C}_n^i$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ est bien vrai.
<u>Deuxième cas</u> : $j=1$. alors $S'_{i,j} = S'_{n,1}$ ne comprend qu'un seul élément : $(1,0,0,\ldots,0)$ et $s'_{i,j} = 1 = \mathrm{C}_n^n$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ est encore vrai.
<u>Troisième cas</u> : $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. Alors d'après la question 10 on a $s'_{i,j} = s'_{i-1,j} + s'_{i,j-1}$ et par hypothèse de récurrence $s'_{i,j} = \mathrm{C}_{n-1}^{i-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{i} = \mathrm{C}_n^i$ et là encore $\mathcal{E}_{n+1}$ est vrai.

En conclusion le prédicat est vrai pour tout entier $n \geqslant 2$. $\square$

Par la question 9 on a $s_{i+1,j} = s'_{i,j}$ donc $s_{i,j} = s'_{i-1,j} = \mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1}$ pour $i \geqslant 2$.
Par ailleurs $s_{1,j}$ est clairement égal à 1 et dans ce cas $\mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1} = \mathrm{C}_{j-1}^{0} = 1$ également.
En conclusion $s_{i,j} = \mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. $\square$

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices.

12. Soit A inversible. Il vient $\det(AB-\lambda I_n) = \det\Big(A(BA-\lambda I_n)A^{-1}\Big) = \det(BA-\lambda I_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$
Ainsi $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$ car la différence admet une infinité de racines. $\square$

13. Supposons désormais ni A ni B inversible.
La suite (A_k) avec $A_k = A - \dfrac{1}{k} I_n$ converge vers A et A_k est inversible pour k assez grand car comme 0 est valeur propre de A, $\dfrac{1}{k}$ n'est pas racine de Φ_A pour $k \geqslant K_0$.
On a $\det(A_kB-\lambda I_n) = \det(BA_k - \lambda I_n)$ pour $k \geqslant K_0$ par la question précédente.
Or par continuité du produit matriciel (application bilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie) , la suite $(A_kB-\lambda I_n)$ converge vers $AB-\lambda I_n$ lorsque $k \to +\infty$. La continuité de la fonction déterminant (application multilineaire sur un produit d'espaces de dimension finie) implique alors que $\det(A_kB-\lambda I_n) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(AB-\lambda I_n)$
De même $\det(BA_k-\lambda I_n) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(BA-\lambda I_n)$
Par unicité de la limite on a ainsi $\det(AB-\lambda I_n) = \det(BA-\lambda I_n) \quad \forall\lambda \in \mathbb{C}$ et donc $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$ comme précédemment. $\square$

D. Étude spectrale de certaines matrices.

14. $s_{i,j} = \mathrm{C}_{i+j-2}^{i-1} = \mathrm{C}_{i+j-2}^{j-1} = s_{j,i}$ de sorte que S est symétrique réelle donc ortho-diagonalisable. $\square$

Si $n=0$ alors $S = (s_{1,1}) = (1)$ et $\Phi_S = X-1$.
Si $n=1$ alors $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Phi_S = X^2-3X+1$. S est alors semblable à $\mathrm{diag}(\lambda, \dfrac{1}{\lambda})$ avec $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Si $n = 2$ alors $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $\Phi_S = X^3 - 9X^2 + 9X - 1$

15. $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et $P(t)Q(t)e^{-t} = o(\dfrac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$ ce qui prouve que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$. Elle est clairement bilinéaire, symétrique et positive. En outre $\psi(P, P) = 0$ implique que $P^2(t)e^{-t} = 0$ pour $t \geqslant 0$ puisque $t \longmapsto P^2(t)e^{-t}$ est positive et continue. Ainsi P admet une infinité de racines donc est le polynôme nul. Ce qui établit finalement que ψ est un produit scalaire. $\square$

16. $\psi(B_1, B_j) = \dfrac{1}{i!j!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{i+j}e^t \,\mathrm{d}\,t = \dfrac{\Gamma(i+j+1)}{i!j!} = \dfrac{(i+j)!}{i!j!} = \mathrm{C}_{i+j}^i = s_{i+1,j+1}$.
Ainsi S n'est autre que la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}$ ce qui établit que S est définie positive. $\square$

Il en résulte que S est de rang $n + 1$. $\square$

Par ailleurs par définition même de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ on a clairement $s'_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{i} s_{i,j}$ ce qui se traduit matriciellement par $S' = S\widetilde{T}$ où $\widetilde{T}$ est la matrice triangulaire supérieure inversible définie par $\widetilde{t}_{i,j} = 1$ pour $j \leqslant i$.
Donc $\operatorname{rg} S' = n + 1$. $\square$

17. La formule de dérivation de Leibniz montre que $f_i^{(j)}(t) = P_{i,j}(t)e^{-t}$ où $P_{i,j}$ est un polynôme de degré i et de valuation $\max(0, i - j)$. (1).
Par croissances comparées on a donc $f_{i,j}(t) = o(t^k)$ quand $t \to +\infty$ pour tout entier k. (2) $\square$

En particulier en explicitant la formule de Leibniz pour $j = i$ il vient $L_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{i} (-1)^{i+k}\dfrac{i!}{(i-k)!(k!)^2}t^k$ de sorte que cela définit un polynôme L_i de degré i (coefficient dominant $\dfrac{1}{i!}$) et la famille $\mathcal{L}$ est libre (échelonnée en degré) donc constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$ $\square$

Il vient $\psi(L_i, B_j) = \dfrac{(-1)^i}{i!j!}I_{i,j}$ avec $I_{i,j} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^j f_i^{(i)}(t) \,\mathrm{d}\,t$.
Si $j = 0$ et $i \geqslant 1$ on a $I_{i,0} = \lim\limits_{t\to+\infty} f_i^{(i-1)}(t) - f_i^{(i-1)}(0) = 0 - 0 = 0$ d'après (1) et (2).
Si $1 \leqslant j < i$ une intégration partie entre 0 et A suivie d'un passage à la limite montre (toujours grâce à (1) et (2)) que $I_{i,j} = -j\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{j-1}f_i^{(i-1)}(t) \,\mathrm{d}\,t$.
Par itération $I_{i,j} = (-1)^j j!\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t) \,\mathrm{d}\,t = 0$ d'après (2) puisque $i - j > 0$.

Ainsi $\psi(L_i, B_j) = 0$ dès que $j < i$ ce qui prouve que la base $\mathcal{L}$ est orthonormale car L_i est orthogonal à $\operatorname{vect}(B_0, B_1, \ldots, B_{i-1}) = \mathbb{R}_{i-1}[X]$

Compte-tenu de l'expression de L_i ci-dessus et du fait que $\psi(L_i, X^k) = 0$ pour $k < i$ il vient
$\psi(L_i, L_i) = \psi(L_i, \dfrac{X^i}{i!}) = \dfrac{1}{i!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^i L_i(t)e^{-t} \,\mathrm{d}\,t = \dfrac{(-1)^i}{(i!)^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^i f_i^{(i)}(t) \,\mathrm{d}\,t = \dfrac{(-1)^i}{(i!)^2}I_{i,i}$
Or par un calcul ci-dessus on a $I_{i,i} = (-1)^i i!\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i(t) \,\mathrm{d}\,t = (-1)^i i!\Gamma(i+1) = (-1)^i(i!)^2$.
Ainsi $\psi(L_i, L_i) = 1$ et la famille $\mathcal{L}$ est bien une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. $\square$

19. On a $\tau(X^j) = (X-1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j} (-1)^{j-i}\,\mathrm{C}_j^i\, X^i$ et $\tau^{-1}(X^j) = (X+1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j} \mathrm{C}_j^i\, X^i$. Donc
T est la matrice triangulaire supérieure telle que $u_{i,j} = (-1)^{i-j}\,\mathrm{C}_{j-1}^{i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ $\square$
U est la matrice triangulaire supérieure telle que $u_{i,j} = \mathrm{C}_{j-1}^{i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ $\square$

L'expression de L_i trouvée à la question 17 s'écrit également $L_j(X) = \sum\limits_{i=0}^{j} (-1)^{j-i}\,\mathrm{C}_j^i\, B_i$ donc $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{L}} = T$ $\square$

D'après la question 16 on a $S = \mathcal{M}(\psi, \mathcal{B})$. Or $\mathcal{M}(\psi, \mathcal{L}) = I_{n+1}$ donc $I_{n+1} = {}^tTST$ soit $S = {}^tUU$. $\square$

Or $\det(U) = 1$ car U est triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur sa diagonale. Ainsi $\det S = 1$ $\square$
D'après la question 16 on a $S' = S\widetilde{T}$ donc (puisque $\det \widetilde{T} = 1$) on a $\det S' = 1$. $\square$

20. DU se déduit de U en multipliant chaque ligne i par $(-1)^{i-1}$ et $(DU)D$ se déduit de DU en multipliant chaque colonne j par $(-1)^{j-i}$ de sorte que DUD se déduit de U en multipliant chaque terme de U par $(-1)^{i+j}$.
Compte-tenu des expressions de T et U ci-dessus on a donc $DUD = T = U^{-1}$ soit $(DU)^2 = I_{n+1}$. $\square$

De $S = {}^tUU$ on tire alors $S^{-1} = U^{-1}{}^tU^{-1} = (DUD)({}^tD{}^tU{}^tD) = DU{}^tUD$ car $D = {}^tD$ et $D^2 = I_{n+1}$ ce qui prouve (puisque $D = D^{-1}$) que S^{-1} est semblable à $U{}^tU$. $\square$

21. On a donc $\Phi_{U{}^tU}(X) = \Phi_{S^{-1}}(X) = \det(XI_{n+1} - S^{-1}) = \det(XS - I_{n+1})$ puisque $\det S^{-1} = 1$.
Ainsi $\Phi_{U{}^tU}(X) = (-X)^{n+1} \det(\dfrac{1}{X} I_{n+1} - S) = (-X)^{n+1} \Phi_S(\dfrac{1}{X})$.
Mais par ailleurs par la question 13 on a $\Phi_{U{}^tU}(X) = \Phi_{{}^tUU}(X) = \Phi_S(X)$.
Ce qui prouve que Φ_S est un polynôme réciproque de première espèce si n est impair et de seconde sinon. $\square$

FIN