Concours Communs Polytechniques - Session 2009

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Valeurs propres, symétrie orthogonale et résultant de deux polynômes

Corrigé par M.TARQI

PREMIER EXERCICE

1. Soit λ une valeur propre de u, alors il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ et par composition, on obtient $P(u)(x) = P(\lambda)x$, donc $P(\lambda)$ est une valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$.
2. (a) D'après l'égalité précédente,on obtient $P(\lambda)x = 0$ et comme $x \neq 0$, alors $P(\lambda) = 0$.

   (b) Non, Si E est de dimension finie n, le polynôme $P = (X^n - 1)(X + 1)$ est un polynôme anulateur de l'identité, alors que -1 qui est une racine de P, n'est une valeur propre de l'identité.
3. Comme la dimension est impaire, le spectre de u est non vide. D'autre part le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$, anulateur de u, admet 1 comme la seule racine réelle, donc le spectre de u est $\{1\}$.

DEUXIÈME EXERCICE

1. Les vecteurs $u = (1, 0, -2)$ et $v = (0, 1, -3)$ forment une base de Π et comme w est un vecteur normal à Π, alors (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Il est clair que $s(u) = u$, $s(v) = v$ et $s(w) = -w$, donc :

$$S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w), alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$S = PS'P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. **Cas où u est bijective**

   (a) Soient (A, B) et (A', B') deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} u(\lambda(A, B) + (A', B')) &= u(\lambda A + A', \lambda B + B) \\ &= P(\lambda A + A') + Q(\lambda B + B') \\ &= \lambda(PA + QB) + (PA' + QB') \\ &= \lambda u(A, B) + u(A', B') \end{aligned}$$

   Donc u est bien est une application linéaire.

(b) Si u est une bijection, alors le polynôme constant 1 est atteint et une seule fois, donc il existe un unique élément (A,B) de E tel que $PA+QB=1$, donc d'après le théorème de Bézout les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

(c) Soit $(A,B)\in\ker u$, alors $PA+QB=0$ ou encore $PA=-QB$ et comme P et Q sont premiers entre eux alors si $B\neq 0$ P diviserait B, ce qui est absurde en raison de degrés. De même $A=0$, donc u est injective et comme les deux espaces ont la même dimension, alors u est bijective.

2. **Matrice de u**

(a) On a $\forall 0\leq i\leq q-1$, $u(X^i,0)=X^iP=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kX^{k+i}$ et $\forall 0\leq j\leq p-1$, $u(0,X^j)=X^jQ=\sum\limits_{k=0}^{q}b_kX^{k+j}$. La matrice de u par rapport au bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est donc $M_{P,Q}$.

(b) D'après la question 1., les polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si u est bijective ou encore

$$\det Mat(u,\mathcal{B},\mathcal{B}')=\det M_{P,Q}=\text{Res}(P,Q)\neq 0.$$

3. **Racine multiple**

(a) Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple si et seulement si P et P' ont une racine commune, ou encore $\text{Res}(P,P')=0$

(b) *Application* : Le polynôme X^3+aX+b admet une racine double si et seulement si $\text{Res}(X^3+aX+b,3X^2+a)=0$, ou encore

$$\begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0\\ a & b & 0 & a & 0\\ 0 & a & 3 & 0 & a\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=27b^2+4a^3=0.$$

II. Applications

4. **Équation de Bézout**

(a) Calculons le résultant de P et Q. On a :

$$\text{Res}(P,Q)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Donc les deux polynômes sont premiers entre eux.

(b) Il faut résoudre le système $M_{P,Q}Z=1$, avec $Z=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$ et $1=(1,0,0,0,0,0,0)$.
On trouve donc, après les calculs, $Z=(1,-1,-1,0,1,2,1)$, ce qui donne le couple :

$$\begin{aligned}(A_0,B_0) &= (1,0)-(X,0)-(X^2,0)+(0,X)+2(0,X^2)+(0,X^3)\\ &= (1-X-X^2,X+2X^2+X^3)\end{aligned}$$

(c) Soit (A, B) un couple de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $PA + QB = 1$. Par soustraction on obtient :

$$P(A - A_0) = Q(B_0 - B) \ \ (*)$$

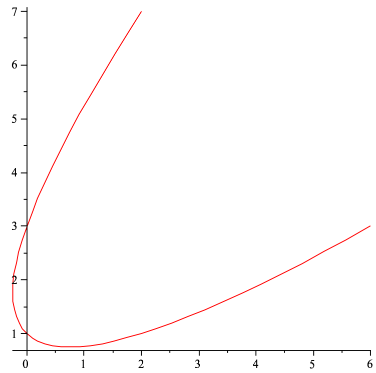
Comme Q et P sont premiers entre eux, alors Q divise $A - A_0$ et par suite il existe un polynôme R_1 tel que $A - A_0 = RQ$, donc $A = A_0 + RQ$, puis en remplaçant dans $(*)$, on obtient $B = B_0 - RP$.
Inversement tout couple de la forme $(A, B) = (A_0 + RQ, B_0 - RP)$ vérifie $PA + QB = 1$.

5. **Équation d'une courbe**

(a) Tableau de variation :

t	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$			$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		0		$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$			$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$			$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$			$-$		0	$+$	
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	1		∞		0	1	

L'allure de Γ :



(b) Le point $M(x, y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = P(t) \\ y(t) = Q(t) \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x = P(t_0)$ et $y = Q(t_0)$, donc $A(t_0) = B(t_0) = 0$, c'est-à-dire A et B ont une racine commune.
$M(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si les polynômes $A = X^2 + X - x$ et $B = X^2 - X + 1 - y$ ont une racine commune, c'est-à-dire $\text{Res}(A, B) = 0$. Or

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 1-y & 0 \\ 1 & -x & -1 & 1-y \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 3 = 0.$$

(c) Le rang de q est 1, donc la courbe c'est une conique sans centre ; c'est une parabole.

6. Si x_0 est solution de $P = X^2 - 3$, et si P et Q ont une racine commune, alors $y = x_0 \pm \sqrt{7}$. Mais une condition nécessaire et suffisante, pour que les polynômes P et Q_y ont une racine commune, c'est que :

$$\text{Res}(P, Q_y) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & y^2-7 & 0 \\ 0 & -3 & -2y & y^2-7 \\ 1 & 0 & 1 & -2y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y^4 - 20y + 16 = 0$$

On prend donc le polynôme $X^4 - 20X + 16$. Les autres racines sont $\sqrt{3} - \sqrt{7}$,$-\sqrt{3} - \sqrt{7}$ et $-\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

• • • • • • • • • • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr