lucien.sportisse@prepas.org
PT

Corrigé de l'épreuve II-A, Banque PT 2004

Trois problèmes indépendants

PROBLEME I

On note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0})$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$.
On considère les deux formes quadratiques définies dans la base $\mathcal{B}_0$ par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} q_1(\overrightarrow{U}) & = & 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 \\ q_2(\overrightarrow{U}) & = & 2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2 \end{array}\right.$$

$\boxed{1\ )}$
Dans la base $\mathcal{B}_0$ les matrices A_1 et A_2 des formes quadratiques q_1 et q_2 sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2\ )}$

$$A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

On désigne respectivement par u_1 et u_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis dans la base $\mathcal{B}_0$ par A_1 et A_2.
S'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices Δ_1 de u_1 et Δ_2 de u_2 sont toutes deux diagonales, alors comme $\Delta_1\Delta_2 = \Delta_2\Delta_1$, on a bien sûr $u_1 \circ u_2 = u_2 \circ u_1$ et nécessairement, en passant aux matrices dans la base canonique $A_1A_2 = A_2A_1$, ce qui est faux.
$\boxed{\text{Il n'esxiste pas de base commune de diagonalisation de } A_1 \text{ et } A_2.}$

$\boxed{3\ )}$
On note $\mathcal{R}_0$ le repère $(O, \mathcal{B}_0)$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme plan euclidien orienté.
Soit a un réel strictement positif.
Soient C_1 et C_2 les coniques dont les équations dans le repère $\mathcal{R}_0$ sont respectivement $q_1(\overrightarrow{U}) = 8a^2$ et $q_2(\overrightarrow{U}) = a^2$.
Le déterminant de A_1 est positif strictement (=16), donc $\boxed{C_1 \text{ est une ellipse.}}$
Le déterminant de A_2 est négatif strictement (=-3), donc $\boxed{C_2 \text{ est une hyperbole.}}$
Il est clair que $\boxed{O \text{ est le centre (de symétrie) de ces deux coniques}}$.
En effet, si $M(x_0, y_0) \in C_i$, alors $M'(-x_0, -y_0) \in C_i$.
Comme dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y_0 = x_0$, C_1 est invariante puisque si $M(x_0, y_0 \in C_1$, alors $M'(y_0, x_0) \in C_1$, on en déduit que :
$\boxed{\text{les droites } y_0 = x_0 \text{ et } y_0 = -x_0\text{, orthogonales et passant par le centre sont les axes de l'ellipse } C_1.}$
Pour obtenir les sommets de l'ellipse, il faut couper C_1 par les axes $y_0 = x_0$ et $y_0 = -x_0$. On obtient deux systèmes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_0 & = & x_0 \\ 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 & = & 8a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_0^2 & = & 2a^2 \\ y_0 & = & x_0 \end{array}\right. \text{ Deux sommets } A(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}),\ A'(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$$

et :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_0 & = & -x_0 \\ 5x_0^2 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 & = & 8a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_0^2 & = & \dfrac{a^2}{2} \\ y_0 & = & -x_0 \end{array}\right. \text{ Deux sommets } B(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}),\ B'(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$$

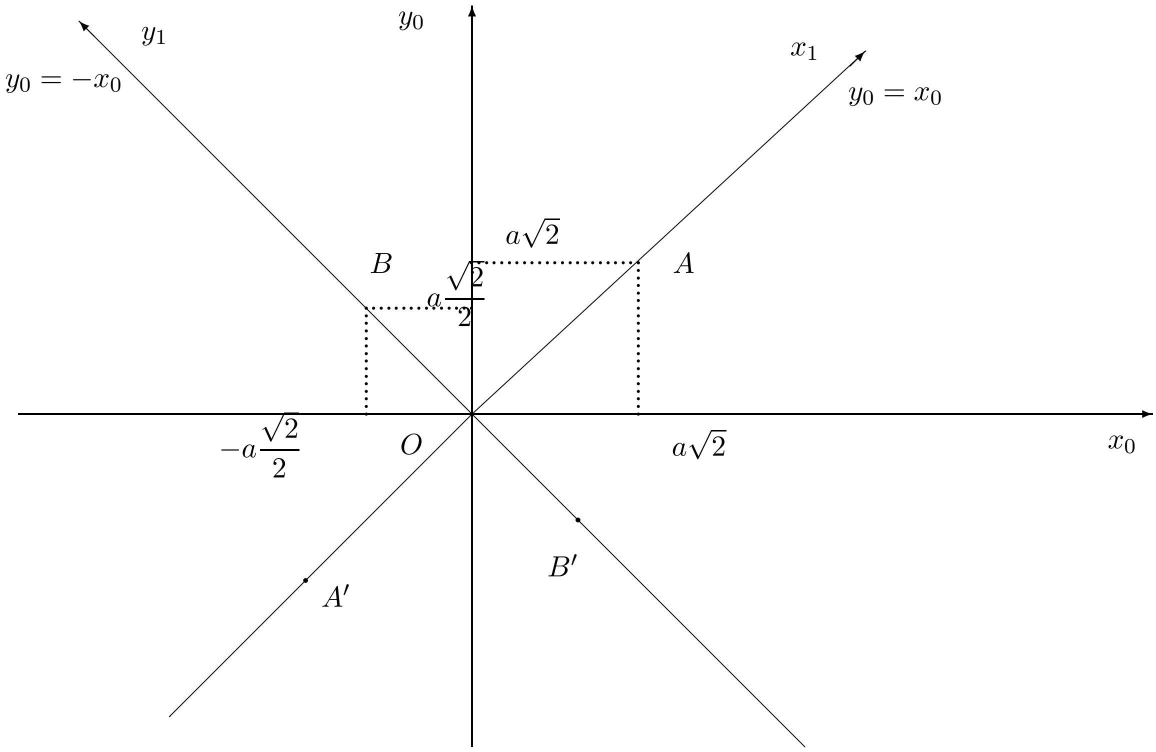

FIG. 1 – Ellipse C_1

$OA^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2$, $OB^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$.
On obtient ainsi $\boxed{\text{les demi-axes focaux } OA = 2a \text{ et } OB = a.}$

Les asymptotes de C_2 sont obtenues en annulant le premier membre de l'équation de C_2 :

$$2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 2y_0(\sqrt{3}x_0 - y_0) = 0$$

Donc les asymptotes de C_2 sont les droites $y_0 = 0$ (l'axe des abscisses) et la droite d'équation $y_0 = \sqrt{3}x_0$ passant par O et faisant l'angle $\frac{\pi}{3}$ avex Ox_0, puisque $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.
Les axes (de symétrie) de C_2 sont les bissectrices de ces deux asymptotes : ce sont les droites orthogonales passant par O et faisant respectivement l'angle $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ avec Ox_0.

Les sommets C et C' de C_2 sont obtenus en coupant l'hyperbole par l'axe focal, ici la droite $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_0$.
On résoud le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_0 & = & \frac{\sqrt{3}}{3}x_0 \\ 2\sqrt{3}x_0y_0 - 2y_0^2 & = & a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y_0 & = & \frac{\sqrt{3}}{3}x_0 \\ x_0^2 & = & \frac{3}{4}a^2 \end{array}\right.$$

D'où les deux sommets de l'hyperbole C_2 : $C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2})$, $C'(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{a}{2})$.
On a représenté une demi-hyperbole.
Les axes de symétrie de C_1 et C_2 sont différents.
Il n'existe donc pas de rotation de $\mathbb{R}^2$ qui amène simultanément les axes de $\mathcal{R}_0$ sur les axes de symétrie de C_1 et C_2.
$\boxed{4\ )}$

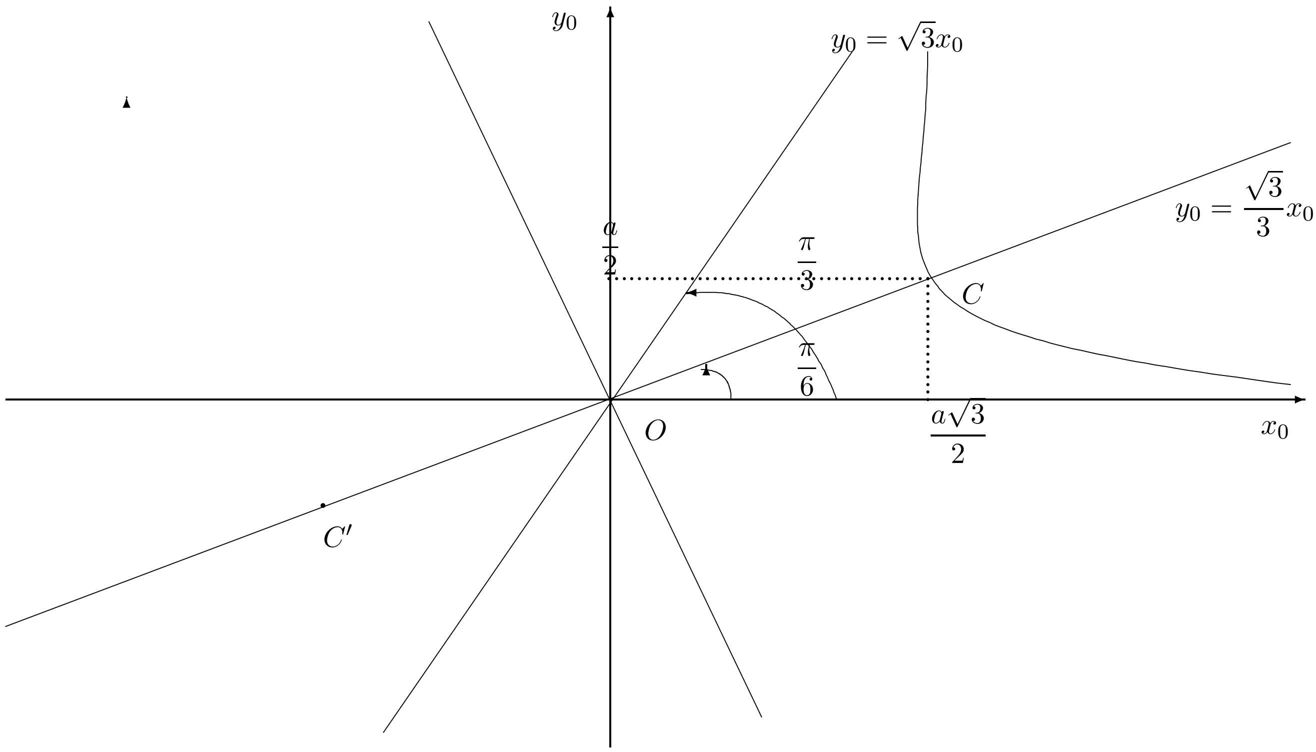

FIG. 2 – Hyperbole C_2

L'unique angle θ de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que la rotation de centre O et d'angle θ transforme le repère $\mathcal{R}_0$ en un repère $(O, (\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}))$ noté $\mathcal{R}_1$ dont les axes soient les axes de symétrie de C_1 est évidemment $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
C_1, dont les demi-axes focaux sont $OA = 2a$ et $OB = a$, a pour équation dans ce nouveau repère $\mathcal{R}_1$ qui est celui de ses axes de symétrie :

$$\boxed{C_1 \ \frac{x_1^2}{4a^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1}$$

Le changement de base pour C_2 se fait par le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

L'équation de C_2 dans le nouveau repère est donc :

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1\right)^2 = a^2$$

i.e $\boxed{C_2 \ \sqrt{3}(x_1^2 - y_1^2) - (x_1 + y_1)^2 = a^2}$

$\boxed{5\ )}$

On note $\overrightarrow{i_2} = 2\overrightarrow{i_1}$, $\overrightarrow{j_2} = \overrightarrow{j_1}$, puis $\mathcal{R}_2$ le nouveau repère $(O, (\overrightarrow{i_2}, \overrightarrow{j_2}))$.
Le changement de base se fait par le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Les équations de C_1 et C_2 dans ce repère $\mathcal{R}_2$ sont respectivement :

$$\boxed{C_1 \ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{a^2} = 1, \ \ C_2 \ \sqrt{3}(4x_2^2 - y_2^2) - (2x_2 + y_2)^2 = a^2}$$

Il n'existe pas une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices des formes quadratiques q_1 et q_2 soient toutes deux diagonales, comme déjà vu en fait à la première question.

PROBLEME II

A

$\boxed{1\ )}$

Déterminons le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle définie par :

$$x \mapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} \ln t \, dt$$

Quel que soit $x > 0$, la fonction $F_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} \ln t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, car continue.

$$|F_x(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |lnt|$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 |lnt|\, dt = -\int_0^1 lnt\, dt$ converge (intégrale de référence). Donc, par comparaison par équivalence des fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 |lnt|\, dt$ converge.

Quel que soit $t \geqslant 1$, $F_x(t) \geqslant 0$, et $\forall x > 0$, $t^2 F_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance et le logarithme). D'après la règle $x^\alpha f(x)$, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |F_x(t)|\, dt = \int_1^{+\infty} F_x(t)\, dt$ converge.

Par Chasles, on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |F_x(t)|\, dt$ et donc la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \ln t\, dt$, quel que soit $x > 0$.

Pour $x \leqslant 0$, $\forall t \geqslant \mathrm{e}$, $\mathrm{e}^{-xt} \ln t \geqslant \mathrm{e} \geqslant 0$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \mathrm{e}\ dt$ diverge, puisque $\forall a \geqslant \mathrm{e}$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{a} \mathrm{e}\ dt = (a-1)\,\mathrm{e} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc, par comparaison par inégalité des fonctions positives, $\forall x \leqslant 0$, $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} \ln t\, dt$ diverge.

Le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$. De plus, ce qui va servir dans la suite : $\forall x > 0$, $F_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} \ln t$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{2\ )}$

Déterminons le domaine de définition de la fonction g de la variable réelle définie par :

$$x \mapsto \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t \, dt$$

Quel que soit $x > 0$, la fonction $G_x : t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, car continue.

$$G_x(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

On peut prolonger G_x par continuité en 0, en posant $G_x(0) = 0$. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t\, dt$ est **faussement généralisée en 0.**

Quel que soit $t \geqslant 1$, $G_x(t) \geqslant 0$, et $\forall x > 0$, $t^2 G_x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance et le logarithme). D'après la règle $x^\alpha f(x)$, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} G_x(t)\, dt$ converge.

On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t\, dt$, quel que soit $x > 0$.

Pour $x \leqslant 0$, $\forall t \geqslant \mathrm{e}$, $\mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t \geqslant \mathrm{e} \geqslant 0$, Comme dans la question précédente, par comparaison par inégalité des fonctions positives, $\forall x \leqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t \, dt$ diverge.

$\boxed{\text{Le domaine de définition de } g \text{ est }]0,+\infty[.}$

En fait, nous avons montré que, quel que soit $x >$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t$ est **intégrable** sur $]0,+\infty[$, puisque prolongeable par continuité en 0, en prenant la valeur 0, et puisque $\displaystyle\int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, t |\ln t| \, dt = \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t \, dt$ converge.

$\boxed{3\ )}$ Etudions la dérivabilité de f sur $]0,+\infty[$.

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt} \ln t \, dt$$

Posons sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ $F : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-xt} \ln t$.

Quel que soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, car continue. Elle y est intégrable, comme on l'a vu.

$$\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -t\, \mathrm{e}^{-xt} \ln t$$

existe, continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t, car continue sur $],+\infty[$

D'autre part, $\forall a >$, $\forall t \in [a,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t|\ln t|\, \mathrm{e}^{-at} = \varphi_a(t)$.

On a vu dans la question précédente, que quel que soit $x >$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\, t \ln t$ est **intégrable** sur $]0,+\infty[$, donc $\varphi_a(t)$ est **intégrable** sur $]0,+\infty[$.. On peut donc appliquer le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme, avec hypothèse de domination locale.

f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :

$$\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\, dt = -g(x)}$$

$\boxed{4\ )}$

$$\forall x > 0,\ \forall 0 < a < b,\ I(a,b) = \int_a^b \mathrm{e}^{-xt} \ln t \, dt \underset{a \to 0,\, b \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Intégrons par parties :

$$\forall x > 0,\ I(a,b) = \int_a^b \underbrace{\mathrm{e}^{-xt}}_{u(t)}, \overbrace{\ln t}^{v'(t)} \, dt = \left[\mathrm{e}^{-xt}(t \ln t - t)\right]_{t=a}^{t=b} + x \int_a^b \mathrm{e}^{-xt}(tlnt - t)\, dt$$

$$\forall x > 0,\ I(a,b) = \left[\mathrm{e}^{-xt}(t \ln t - t)\right]_{t=a}^{t=b} + x \left[\int_a^b \mathrm{e}^{-xt}\, tlnt \, dt - \int_a^b \mathrm{e}^{-xt}\, t \, dt\right]$$

Or $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-xt}\, t \, dt = \frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}\right) \underset{a \to 0,\, b \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$. En passant à la limite, pour $a \to 0$ et $b \to +\infty$, puisque les intégrales généralisées existent, on obtient :

$$\forall x > 0,\ f(x) = xg(x) - \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\forall x > 0,\ xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x} = 0}$$

Résolvons sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $E\, xy' + y + \dfrac{1}{x} = 0$.

On associe l'équation sans second membre $H\, xy' + y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (xy(x))' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad xy(x) = \lambda$.

La solution générale de H sur $]0,+\infty[$ est donnée par $y(x) = \lambda y_1(x)$ en posant $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$.. Cherchons sur

$]0,+\infty[$ une solution particulière de E par la méthode de la variation de la constante, en posant $y_0(x) = \lambda(x)y_1(x)$. On a :

$$xy_0'(x) + t_0(x) + \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(x)\underbrace{(xy_1'(x) + y_1(x))}_{=0} + \frac{1}{x} + x\lambda'(x)y_1(x) = -\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = -\frac{1}{x}$$

On peut choisir sur $]0,+\infty[$: $\lambda(x) = -\ln x$ et donc $y_0(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$.
la solution générale de E sur $]0,+\infty[$ est donnée par :

$$\forall x > 0,\ y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

En particulier f solution de E sur $]0,+\infty[$ s'écrit :

$$\forall x > 0,\ f(x) = --\frac{\ln x}{x} + \lambda\frac{1}{x}$$

Or $f(1) = \lambda$. D'où :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f(x) = --\frac{\ln x}{x} + f(1)\frac{1}{x},\ f(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt}$$

$\boxed{5\ )}$
Comme A supérieur ou égal à 1 :

$$u(A) = \left|\int_A^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right| - (A+1)\,\mathrm{e}^{-A} = \int_A^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt - (A+1)\,\mathrm{e}^{-A}$$

Comme $u(A) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt - \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt - (A+1)\,\mathrm{e}^{-A}$ et que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est continue sur $[1,+\infty[$, $u(A)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et :

$$\forall A \geqslant 1,\ u'(A) = -\,\mathrm{e}^{-A}\ln A - \mathrm{e}^{-A}\,(-A-1+1) = \mathrm{e}^{-A}\,(A - \ln A) \geqslant 0$$

Donc u est croissante sur $[1,+\infty[$. La convergence de $\displaystyle\int_A^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$ montre que :

$$\int_A^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt - \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où :

$$\boxed{\forall A \geqslant 1,\ \left|\int_A^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right| - (A+1)\,\mathrm{e}^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \leqslant 0}$$

$\boxed{6\ )}$
Etudions sur $]0,1]$ la fonction $v(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \ln t$.

$$\forall t \in]0,1],\ v'(t) = -\frac{1}{(\sqrt{t})^3} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leqslant 0$$

Donc $v(t)$ est décroissante sur $]0,1]$, et comme $v(1) = 2 \geqslant 0$:

$$\boxed{\forall t \in]0,1],\ \frac{2}{\sqrt{t}} + \ln t \geqslant 0}$$

$$\forall \varepsilon \in]0,1],\ w(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon} - \left|\int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right| = 4\sqrt{\varepsilon} + \int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt =$$

$$4\sqrt{\varepsilon} + \left[\int_1^\varepsilon \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt - \int_1^0 \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right]$$

Comme $\varepsilon \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est continue sur $]0,1]$, on peut dériver et :

$$\forall \varepsilon \in]0,1],\ w'(\varepsilon) = 2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ln\varepsilon$$

Or $\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\mathrm{e}^{-\varepsilon} \leqslant 1$ et $\ln\varepsilon \leqslant 0$. Donc $\forall \varepsilon \in]0,1]$, $\mathrm{e}^{-\varepsilon}\ln\varepsilon \geqslant \ln\varepsilon$.
Donc, d'après la première partie de la question :

$$\forall \varepsilon \in]0,1],\ w'(\varepsilon) = 2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \mathrm{e}^{-\varepsilon}\ln\varepsilon \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \ln\varepsilon \geqslant 0$$

$w(\varepsilon)$ est croissante sur $]0,1]$. D'autre part, comme $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $w(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.
La croissance de w sur $]0,1]$ montre alors que :

$$\boxed{\forall \varepsilon \in]0,1],\ w(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon} - \left|\int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right| \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt\right| \leqslant 4\sqrt{\varepsilon}}$$

B

On désigne par a, b, α, β quatre constantes réelles vérifiant $a < b$ et $\alpha < \beta$.
Soit φ une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs réelles, continue et croissante au sens large.

1)

Pour n entier naturel strictement positif, on pose $h = \dfrac{b-a}{n}$. Comme φ croissante :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(a+kh)\,dt \leqslant \int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(a+(k+1)h)\,dt$$

D'où les inégalités :

$$h\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+kh) \leqslant \int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(t)\,dt \leqslant h\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+(k+1)h)$$

i.e :

$$\boxed{h\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+kh) \leqslant \int_a^b \varphi(t)\,dt \leqslant h\sum_{k=1}^{n}\varphi(a+kh)}$$

2)

Les inégalités obtenues si φ avait été décroissante au sens large sont évidemment :

$$\boxed{h\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+kh) \geqslant \int_a^b \varphi(t)\,dt \geqslant h\sum_{k=1}^{n}\varphi(a+kh)}$$

3)

Bien sûr :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \left|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt - h\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+kh)\right| \\ \\ \left|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt - h\sum_{k=1}^{n}\varphi(a+kh)\right| \end{array}\right. \leqslant \left|h\sum_{k=1}^{n}\varphi(a+kh) - h\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+kh)\right| = \frac{b-a}{n}\left(\varphi(b)-\varphi(a)\right)}$$

$\boxed{4\ )}$

On suppose désormais que φ admet une dérivée seconde sur $[a,b]$ et qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que, pour tout t de $[a,b]$, on a :

$$\alpha \leqslant \varphi"(t) \leqslant \beta$$

Etudions sur $[a,b]$ le signe de la dérivée seconde de la fonction θ définie sur $[a,b]$ par la relation :

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{\alpha}{2}(t-a)(b-t) \Longrightarrow \theta'(t) = \varphi'(t) + \frac{\alpha}{2}(-2t+a+b) \Longrightarrow \theta"(t) = \varphi"(t) - \alpha \geqslant 0$$

$\boxed{5\ )}$

Posons :

$$g(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t)\,dt - \alpha\frac{(x-a)^3}{12}$$

On a $g'(x) = \dfrac{1}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) + \dfrac{x-a}{2}\varphi'(x) - \varphi(x) - \alpha\dfrac{(x-a)^2}{4}$ et :

$$\forall x \in [a,b],\ g"(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{x-a}{2}\varphi"(x) - \varphi'(x) - \alpha\frac{(x-a)}{2} = \frac{x-a}{2}(\varphi"(x)-\alpha) \geqslant 0$$

Donc g' est croissante sur $[a,b]$ et comme $g'(a)=0$, g' est positive sur $[a,b]$, donc g est croissante sur $[a,b]$ Or $g(a)=0$. Donc :

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t)\,dt - \alpha\frac{(x-a)^3}{12} \geqslant 0$$

De même, on étudie la fonction h définie sur $[a,b]$ par :

$$h(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t)\,dt - \beta\frac{(x-a)^3}{12}$$

On trouve successivement :

$$h'(x) = \frac{1}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) + \frac{x-a}{2}\varphi'(x) - \varphi(x) - \beta\frac{(x-a)^2}{4}$$

$$\forall x \in [a,b],\ h"(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{x-a}{2}\varphi"(x) - \varphi'(x) - \beta\frac{(x-a)}{2} = \frac{x-a}{2}(\varphi"(x)-\beta) \leqslant 0$$

Donc h' décroissante sur $[a,b]$ et comme $h'(a)=0$, h' est négative sur $[a,b]$. Donc h décroit sur $[a,b]$. Comme $h(a)=0$, on a :

$$\forall x \in [a,b],\ h(x) = \frac{x-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t)\,dt - \beta\frac{(x-a)^3}{12} \leqslant 0$$

Donc, quel que soit $x \in [a,b]$, on a :

$$\alpha\frac{(x-a)^3}{12} \leqslant \frac{x-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(x)) - \int_a^x \varphi(t)\,dt \leqslant \beta\frac{(x-a)^3}{12}$$

En particulier, pour $x=b$:

$$\boxed{\alpha\frac{(b-a)^3}{12} \leqslant \frac{b-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(b)) - \int_a^b \varphi(t)\,dt \leqslant \beta\frac{(b-a)^3}{12}}$$

$\boxed{6\ )}$

Evidemment, en remplaçant a par $a+kh$, b par $a+(k+1)h$, et donc $b-a$ par $(a+(k+1)h)-(a+kh)=h$, on a les inégalités $(k=0..(n-1)$:

$$\alpha\frac{h^3}{12} \leqslant \frac{h}{2}(\varphi(a+kh)+\varphi(a+(k+1)h)) - \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} \varphi(t)\,dt \leqslant \beta\frac{h^3}{12}$$

En sommant les inégalités de 0 à $(n-1)$, on obtient :

$$\alpha n\frac{h^3}{12}\leqslant\frac{h}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(a+kh)+\sum_{k=1}^{n}\varphi(a+kh)\right]-\int_a^b\varphi(t)\,dt\leqslant\beta n\frac{h^3}{12}$$

On pose :

$$S=\frac{h}{2}\left[\varphi(a)+\varphi(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(a+kh)\right]$$

On a donc :

$$\alpha n\frac{h^3}{12}\leqslant S-\int_a^b\varphi(t)\,dt\leqslant\beta n\frac{h^3}{12}$$

Comme $h=\dfrac{b-a}{n}$, on obtient :

$$\alpha\frac{(b-a)^3}{12n^2}\leqslant S-\int_a^b\varphi(t)\,dt\leqslant\beta\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Donc :

$$\boxed{\left|S-\int_a^b\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\max(|\alpha|,|\beta|)\frac{(b-a)^3}{12n^2}}$$

PROBLEME III

Soit p une constante réelle strictement positive.

$\boxed{1\ )}$

La courbe $\mathcal{P}$ d'équation polaire :

$$\rho(\theta)=\frac{p}{1+\cos\theta}$$

est évidemment une parabole, de **foyer O**, d'axe de symétrie Ox, lieu des points M tels que $OM=MH$, où MH est la distance de M à la **directrice** D, d'équation $x=p$.

Remarque : une fois que l'on sait qu'il s'agit d'une parabole, de foyer O, d'axe Ox, **c'est facile de retouver la directrice**. En effet, le sommet S est obtenu pour $\theta=0$. Il a donc pour abscisse $\dfrac{p}{2}$. D'où l'équation de la directrice $D\,x=p$.

$\boxed{2\ )}$

Donnons une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P}\ \ \forall\theta\in]-\pi,\pi[,\ \left\{\begin{array}{rcl} x&=&\dfrac{p}{1+\cos\theta}\cos\theta=p\dfrac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=p\left(1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right)=p\left(1-\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}\right)\right)\\ y&=&\dfrac{p}{1+\cos\theta}\sin\theta=p\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\end{array}\right.$$

On pose $\boxed{t=\tan\dfrac{\theta}{2}}$. D'où une équation catésienne de $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\mathcal{P}\ \ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} x(t)&=&\dfrac{p}{2}(1-t^2)\\ y(t)&=&pt\end{array}\right.}$$

$\boxed{3\ )}$

Pour θ décrivant l'intervalle $]-\pi,\pi[$, on associe au point $P(\theta)$ de $\mathcal{P}$ le point $Q(\theta)$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = p^2 \frac{\overrightarrow{OP(\theta)}}{||\overrightarrow{OP(\theta)}||^2}$$

On note $\mathcal{L}$ la courbe décrite par le point $Q(\theta)$.
Posons $\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$.

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = p^2 \frac{(1+\cos\theta)^2}{p^2} \frac{p}{(1+\cos\theta)} \overrightarrow{u(\theta)}$$

$\boxed{\mathcal{L} \text{ est la cardioide bien connue d'équation polaire } \rho(\theta) = p(1+\cos\theta)}$

On a représenté la demi-cardioide pour $y \geqslant 0$.
Si on note $V(P)$ (resp. $V(Q)$) l'angle de la tangente en $P(\theta) \in \mathcal{P}$ (resp. en $Q(\theta)$ à $\mathcal{L}$) avec $\overrightarrow{u(\theta)}$ on a :

$$\boxed{\tan(V(P)) = \frac{\rho_P(\theta)}{\rho'_P(\theta)} = \frac{\dfrac{p}{1+\cos\theta}}{\dfrac{p\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}}$$

$$\boxed{\tan(V(Q)) = \frac{\rho_Q(\theta)}{\rho'_Q(\theta)} = \frac{p(1+\cos\theta)}{p\sin\theta} = -\frac{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} = -\frac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}}$$

$\boxed{\text{Les tangentes en } P(\theta) \text{ à } \mathcal{P} \text{ et en } Q(\theta) \text{ à } \mathcal{L} \text{ sont donc symétriques par rapport à la droite } OPQ}$

$\boxed{4\ )}$

Au point $Q(\theta)$ de $\mathcal{L}$, on associe le point $R(\theta)$ défini par la relation :

$$\overrightarrow{OR(\theta)} = \left(1 - \frac{p}{||\overrightarrow{OQ(\theta)}||}\right)\overrightarrow{OQ(\theta)} = p(1+\cos\theta)\overrightarrow{u(\theta)} - \frac{p}{p(1+\cos\theta)}p(1+\cos\theta)\overrightarrow{u(\theta)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OR(\theta)} = p\cos\theta\overrightarrow{u(\theta)}}$$

$\boxed{R(\theta) \text{ décrit le cercle } \mathcal{R} \text{ passant par } P\text{, dont le centre est le point } S(\frac{p}{2},0)}$

$\boxed{5\ )}$

On désigne désormais par $\mathcal{L}$ la courbe fermée du plan paramétrée par θ obtenue en complétant la courbe $\mathcal{L}$ définie à la question $\boxed{3)}$ par les deux relations $Q(-\pi) = Q(\pi) = 0$.
L'aire $\mathcal{A}$ d'un morceau de surface S est donnée par :

$$\mathcal{A} = \iint_S dxdy \underset{\text{en polaires}}{=} \iint_\Delta r\,drd\theta$$

où Δ décrit S en polaires. SI S est le domaine délimité par les demi-droites OA, d'angle polaire α, OB d'angle polaire β et la courbe C d'équation polaire $\rho = \rho[\theta)$, le domaine Δ est défini par $\Delta \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & \leqslant \theta \leqslant & \beta \\ 0 & \leqslant r(\theta) \leqslant & \rho(\theta) \end{array} \right.$.
Alors :

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{\rho(\theta)} r\,dr\right)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta}$$

L'aire de la surface de $\mathbb{R}^2$ intérieure à $\mathcal{L}$ est donnée, puisque Ox est axe de symétrie de $\mathcal{L}$ par :

$$\mathcal{A} = 2\frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2(\theta)\,d\theta = \int_0^\pi p^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = p^2\int_0^\pi (1 + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) + 2\cos\theta)\,d\theta$$

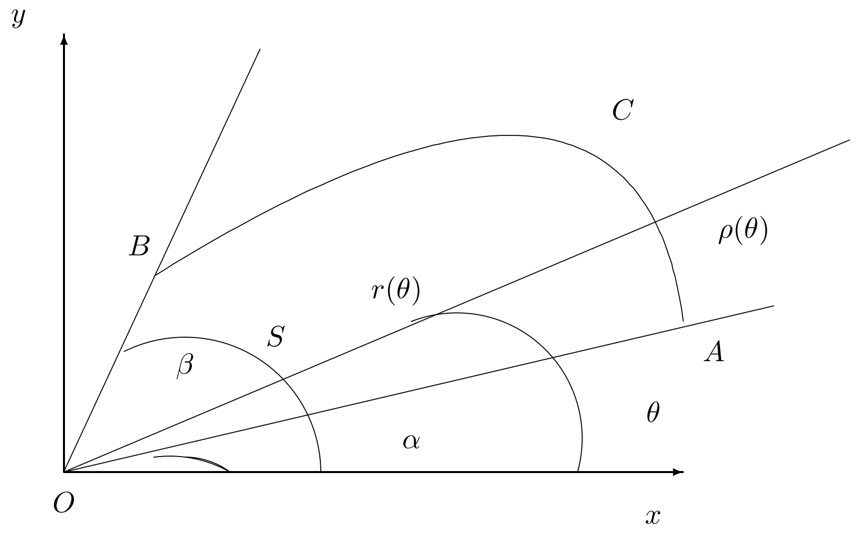

FIG. 3 – Aire d'un secteur

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{3}{2}\pi p^2}$$

Le centre d'inertie G de cette surface intérieure, supposée homogène est évidemment sur Ox, axe de symétrie de $\mathcal{L}$. Donc $\boxed{y_G = 0}$.

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}}\iint\limits_S x\,dxdy \underset{\text{en polaires}}{=} \frac{1}{\mathcal{A}}\iint\limits_\Delta r\cos\theta r\,drd\theta \underset{\text{sur le secteur}}{=} \frac{1}{\mathcal{A}}\int_\alpha^\beta \left(\int_0^{\rho(\theta)} r^2\,dr\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\frac{1}{\mathcal{A}}\int_\alpha^\beta \rho^3(\theta)\cos\theta\,d\theta$$

Pour la même raison de symétrie :

$$x_G = \frac{2}{3}\frac{1}{\mathcal{A}}\int_0^\pi p^3(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta = \frac{2p^3}{3}\frac{1}{\mathcal{A}}\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta$$

$$\begin{aligned}(1+\cos\theta)^3\cos\theta = {} & \cos^4\theta + 3\cos^3\theta + 3\cos^2\theta + \cos\theta = \frac{1}{4}(1+\cos 2\theta)^2 + 3\cos^3\theta + \frac{3}{2}(1+\cos 2\theta) + \cos\theta = \\ & \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) + 3\cos^3\theta + \frac{3}{2}(1+\cos 2\theta) + \cos\theta = \\ & \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right) + 3\cos^3\theta + \frac{3}{2}(1+\cos 2\theta) + \cos\theta = \\ & \frac{15}{8} + \cos\theta + 2\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta + 3(1-\sin^2\theta)d(\sin\theta)\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{15}{8}\theta + \sin\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta + \sin\theta - \sin^3\theta\right]_0^\pi = \left[\frac{15}{8}\theta\right]_0^\pi = \frac{15}{8}\pi.$

On trouve $\boxed{x_G = \frac{5}{6}p}$

$\boxed{6\ )}$

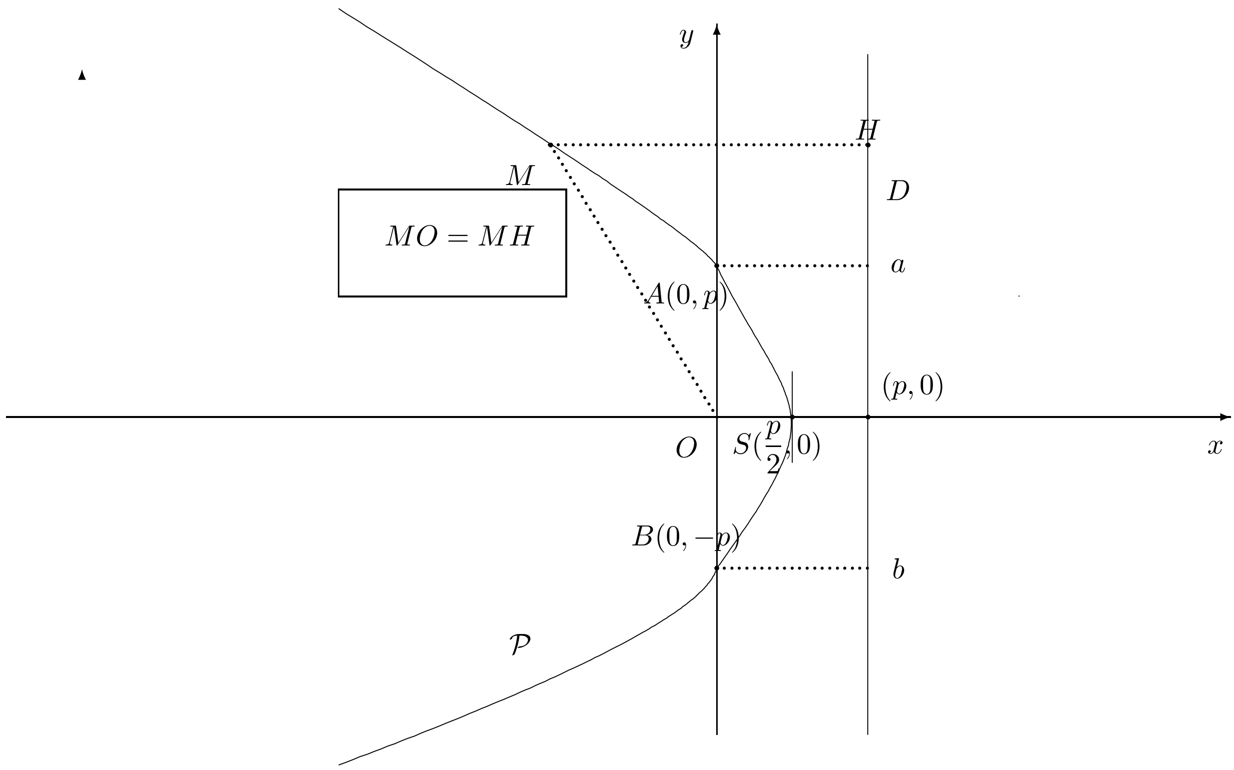

FIG. 4 – Parabole $\mathcal{P}$

A l'aide du repère canonique de $\mathbb{R}^2$, on définit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ par ses deux composantes :

$$V_x = (1 - \mathrm{e}^{-x}\cos y),\ V_y = (x - \mathrm{e}^{-x}\sin y)$$

Pour que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive sur $\mathbb{R}^2$ d'un potentiel scalaire, i.e qu'il soit un champ de gradients, ou encore qu'il existe une fonction C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{grad}f$.
La condition nécessaire est connue : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$. Cette condition est suffisante car $\mathbb{R}^2$ est étoilé par rapport à un de ses points, n'importe lequel d'ailleurs. Or :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Comme $\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} = (1 + \mathrm{e}^{-x}\sin y) - \mathrm{e}^{-x}\sin y = 1 \neq 0$, $\boxed{\text{le champ } \overrightarrow{V} \text{ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.}}$
La circulation de $\overrightarrow{V}$ sur la courbe fermée $\mathcal{L}$ orientée dans le sens trigonométrique vaut :

$$\int_{\mathcal{L}} V_x dx + V_y dy \underset{\text{cf Green Riemann}}{=} \iint_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dxdy = \iint_S (1)\, dxdy = \mathcal{A} = \frac{3}{2}\pi p^2$$

On rappelle que S est la surface intérieure à $\mathcal{L}$.

$\boxed{\text{La circulation de } \overrightarrow{V} \text{ sur la courbe fermée } \mathcal{L} \text{ orientée dans le sens trigonométrique est donc égale à } \frac{3}{2}\pi p^2.}$

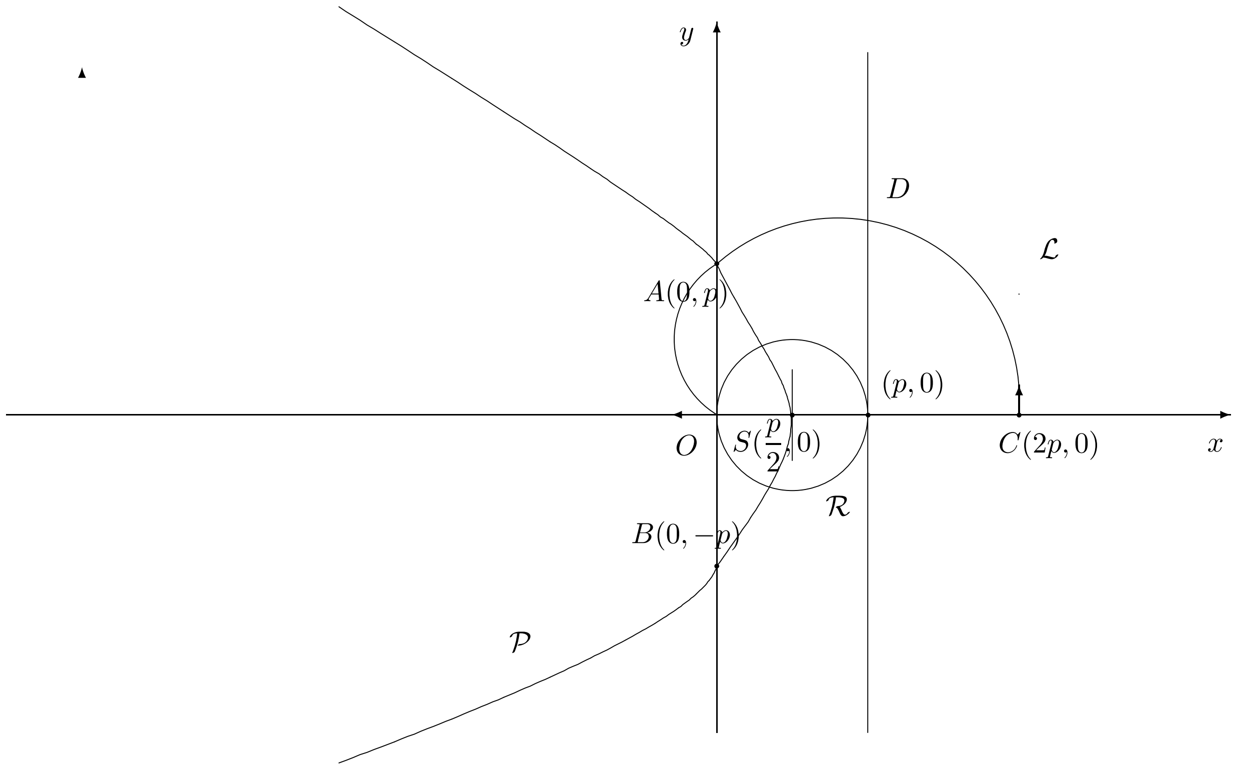

FIG. 5 – Courbes $\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$