1

Question 1 La symétrie de T_1 et T_2 se traduit par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \big(T_1(x),y\big) = \big(x,T_1(y)\big) \quad et \quad \big(T_2(x),y\big) = \big(x,T_2(y)\big) \quad .$$

Il s'ensuit, par bi-linéarité du produit scalaire, que

$$\big((T_1+T_2)(x),y\big) = \big(T_1(x),y\big) + \big(T_2(x),y\big) = \big(x,T_1(y)\big) + \big(x,T_2(y)\big) = \big(x,(T_1+T_2)(y)\big) \quad .$$

On a bien montré qu'alors T_1+T_2 est symétrique également.

Question 2 $m(T)$ est une valeur propre de T , soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $T(x) = m(T).x$, d'où : $Q_T(x) = \dfrac{\big(T(x),x\big)}{\|x\|^2} = \dfrac{m(T).\big(x,x\big)}{\|x\|^2} = m(T)$. Donc la valeur $m(T)$ est bien atteinte par Q_T .
Le raisonnement est identique pour la valeur propre $M(T)$, en prenant pour x un vecteur propre correspondant.

Question 3 Le théorème spectral donne l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres pour T . En se plaçant dans une telle base, un vecteur x quelconque a pour composantes $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, tandis que $T(x)$ a pour composantes $(\lambda_1.x_1,\lambda_2.x_2,\ldots,\lambda_n.x_n)$, les λ_i étant les valeurs propres respectives associées aux vecteurs de base. Comme la base est orthonormée, les formules donnant le produit scalaire et la norme sont les formules canoniques, d'où :

$$Q_T(x) = \frac{\lambda_1.x_1^2 + \lambda_2.x_2^2 + \cdots + \lambda_n.x_n^2}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} \quad .$$

Or, pour toute valeur propre λ_i on a l'inégalité $m(T) \leqslant \lambda_i \leqslant M(T)$, qu'on peut multiplier par $x_i^2 \geqslant 0$, d'où par sommation :

$$m(T).(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \leqslant \lambda_1.x_1^2+\lambda_2.x_2^2+\cdots+\lambda_n.x_n^2 \leqslant M(T).(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \quad ,$$

et finalement $m(T) \leqslant Q_T(x) \leqslant M(T)$, cqfd.

Question 4 Comme le dénominateur de $Q_T(x)$ est toujours strictement positif, on a que $T \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $T \in \mathcal{S}_n^{+*}$ équivaut à $\forall x \in \mathbb{R}^n \;\; Q_T(x) \geqslant 0$ (resp. $Q_T(x) > 0$). Mais d'après les questions précédentes, $m(T)$ est un minimum, atteint, de $Q_T(x)$, donc $Q_T(x) \geqslant 0$ (resp. $Q_T(x) > 0$) équivaut en fait à $m(T) \geqslant 0$ (resp. $m(T) > 0$), soit encore à $\sigma(T) \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\sigma(T) \in \mathbb{R}^{+*}$).

Question 5 Par le théorème spectral, $\mathbb{R}^n$ est la somme directe, orthogonale, des sous-espaces propres de T : $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$, les E_i étant les sous-espaces propres associés aux valeurs propres (distinctes) λ_i de T . Or, par théorème, une application linéaire peut être définie de manière unique en fixant sa restriction à chaque sous-espace vectoriel E_i d'une décomposition en somme directe. Or la condition sur U donnée par l'énoncé équivaut à dire que $\forall i \in [1,p] \;\; U_{\big|E_i} = f(\lambda_i).I$. Donc une telle application linéaire existe et est définie de manière unique.
U est bien symétrique, car dans une base, orthonormée, adaptée à la décomposition en somme directe ci-dessus, sa matrice est une matrice diagonale (ayant les $f(\lambda_i)$ sur la diagonale).

Question 6 Soit q l'endomorphisme $\alpha_0.I + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j T^j$. Sur chaque sous-espace propre E_i associé à la valeur propre λ_i de T , on a que T se réduit à $\lambda_i.I$, et sonc que q se réduit à $\big(\alpha_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j.\lambda_i^j\big).I = p(\lambda_i).I$. On en déduit que que $q = p(T)$ sur chaque sous-espace propre E_i , et comme $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de ceux-ci, finalement, $q = p(T)$ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier par linéarité.

Question 7 Les valeurs propres de T considérées sont distinctes deux à deux, donc on peut appliquer le théorème d'interpolation de Lagrange : pour toute fonction g il existe un polynôme p interpolant les valeurs $g(\lambda_i)$ aux points λ_i . D'après le raisonnement de la question précédente, il vient alors que $g(T) = p(T)$ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. La réponse à la question posée est donc non.

Question 8 Du fait même de la définition de $f(T)$, les sous-espaces propres propres de T sont aussi sous-espaces propres pour $f(T)$, avec $f(\lambda)$ pour valeur propre associée si λ est la valeur propre associée à T . Mais en fait, plusieurs valeurs propres λ distinctes de T peuvent redonner la même valeur $f(\lambda)$. Donc, plus précisément, si y est une valeur propre de $f(T)$, le sous-espace propre correspondant est la somme directe des sous-espaces propres E_{λ_i} de T où les λ_i sont les valeurs propres de T vérifiant $f(\lambda_i) = y$.

Question 9 Il s'ensuit de même que les sous-espaces propres propres de T sont stables par $g(T)$. Donc, si on se restreint au sous-espace propre E_i associé à la valeur propre λ_i , on a d'une part que $(fg)(T)$ se réduit à $(fg)(\lambda_i).I = f(\lambda_i).g(\lambda_i).I$, et d'autre part que $f(T)\circ g(T)$ se réduit à $f(T)\circ g(\lambda_i)I_{\big|E_i} = f(\lambda_i).g(\lambda_i).I$. Donc les endomorphismes $(fg)(T)$ et $f(T)\circ g(T)$ sont égaux sur chaque sous-espace propre E_i , et par suite sont égaux.

Question 10 Soit g la fontion $t \mapsto t$, de sorte que fg soit la fonction constante $t \mapsto 1$. Par ci-dessus, on a $f(S)\circ S = S\circ f(S) = 1(S) = I$, d'où il suit que $f(S) = S^{-1}$.

Question 11 Si $S \in \mathcal{S}_n^+$, ses valeurs propres sont positives, donc leur racine carrée existe, et la définition de $f(S) = \sqrt{S}$ donnée à la question **5** fonctionne.
Là encore, la question **9** montre que $(\sqrt{S})^2 = Id(S) = S$.
Lorsque les valeurs propres de S sont toutes simples, les sous-espaces propres associés sont des droites vectorielles. D'autre part, si C vérifie $C^2 = S$, il est clair que C commute avec S ($C\circ S = S\circ C = C^3$) , donc les droites propres pour S sont stables par C , donc aussi des droites propres pour C . Or, sur une telle droite propre, l'égalité $C^2 = S$ impose pour valeur propre pour C une racine carrée de la valeur propre correspondante pour S . Si on veut que $C \in \mathcal{S}_n^+$, seules les racines carrées positives sont à prendre en compte, sinon, il y a deux choix (opposés) possibles pour la racine carrée, sauf en cas de valeur propre nulle. Réciproquement, on a vu qu'imposer les valeurs propres de C sur chaque droite propre déterminait un endomorphisme $C \in \mathcal{S}_n$ et un seul (question **5**).
En conclusion, il y a une seule solution $C = \sqrt{S}$ dans $\mathcal{S}_n^+$, et, si S a n valeurs propres > 0 , 2^n solutions pour C dans $\mathcal{S}_n$, si S a une valeur propre nulle et $(n-1)$ valeurs propres > 0 , 2^{n-1} , solutions pour C dans $\mathcal{S}_n$.

2

Question 12 On vérifie les trois propriétés :
-reflexivité : $T1 \geqslant T_1$ est vraie, puisque $0 \in \mathcal{S}_n^+$;
-anti-symétrie : supposons $T_1 \geqslant T_2$ et $T_2 \geqslant T_1$. Cela signifie que $T_2 - T_1$ est à la fois $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$, i.e. que les valeurs propres de $T_2 - T_1$ sont à la fois positives ou négatives, donc nulles. Comme $T_2 - T_1$, symétrique, est diagonalisable, il est nul, et donc $T_2 = T_1$, cqfd.
-transitivité : si $T_1 \geqslant T_2$ et $T_2 \geqslant T_3$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \big(x, (T_2 - T_1)(x)\big) \geqslant 0 \ et \ \big(x, (T_3 - T_2)(x)\big) \geqslant 0 \quad ,$$

d'où, en faisant la somme de deuxc nombres positifs,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \big(x, (T_3 - T_1)(x)\big) \geqslant 0 \quad ,$$

soit $T_3 \geqslant T_1$.
L'ordre n'est pas total, car $T_2 - T_1$ peut très bien avoir des valeurs propres de signes opposés, par exemple en prenant des endomorphismes à matrices diagonales ...

Question 13 On a, puisque U est symétrique :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \big(x, U\circ(T_2 - T_1)\circ U(x)\big) = \big(U(x), (T_2 - T_1)(U(x))\big) \geqslant 0$$

puisque $T_2 - T_1 \geqslant 0$.

Question 14 Comme $M_2 - M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il est clair que $T_2 \geqslant T_1$ (les valeurs propres de $T_2 - T_1$ sont 1 et 0). Mais $M_2^2 - M_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont de signes opposés puisque de produit -1 , donc on a pas $T_2^2 \geqslant T_1^2$, et la fonction $f : t \mapsto t^2$ n'est pas croissante.

Question 15 Les endomorphismes, T_2 , $\sqrt{T_2}$, et donc aussi $U = \big(\sqrt{T_2}\big)^{-1}$ sont simultanément diagonalisables (dans une base propre pour T_2), donc commutent. Il s'ensuit que $U\circ T_2\circ U = I$.
D'après les questions **13** et **9**, on a alors $I = U\circ T_2\circ U \geqslant U\circ T_1\circ U$, soit $I - U\circ T_1\circ U$ a toutes ses valeurs propres positives. Il s'ensuit directement (se placer dans une base propre de l'endomorphisme, symétrique, $U\circ T_1\circ U$) que les valeurs propres de $U\circ T_1\circ U$ sont toutes $\leqslant 1$. De plus elles sont > 0 car, comme $T_1 \in \mathcal{S}_n^{+*}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \big(x, (U\circ T_1\circ U)(x)\big) = \big(U(x), T_1(U(x))\big) > 0 \quad .$$

Les valeurs propres de $U^{-1}\circ T_1^{-1}\circ U^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $U\circ T_1\circ U$, donc elles sont toutes $\geqslant 1$, ce qui peut se traduire, comme précédemment, par $U^{-1}\circ T_1^{-1}\circ U^{-1} - I \geqslant 0$, ou encore $-I \geqslant U^{-1}\circ(-T_1^{-1})\circ U^{-1}$. En réutilisant la question **9**, on en déduit $-U^2 = -T_2^{-1} \geqslant -T_1^{-1}$. On a bien montré que l'application $t \mapsto -\frac{1}{t}$ est croissante.

Question 16 Soit x un vecteur propre pour $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$:

$$\sqrt{T_2}(x) = \sqrt{T_1}(x) + \lambda.x \quad .$$

Appliquons $\sqrt{T_2}$ puis $\sqrt{T_1}$ à cette égalité, puis additionnons. Il vient :

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \big(\sqrt{T_2} \circ \sqrt{T_1}\big)(x) + \lambda.\sqrt{T_1}(x) \; ; \\ \big(\sqrt{T_1} \circ \sqrt{T_2}\big)(x) &= T_1(x) + \lambda.\sqrt{T_2}(x) \; ; \\ T_2(x) - T_1(x) &= \big(\sqrt{T_2} \circ \sqrt{T_1}\big)(x) - \big(\sqrt{T_1} \circ \sqrt{T_2}\big)(x) + \lambda.\big(\sqrt{T_2}(x) + \sqrt{T_1}(x)\big) \quad . \end{aligned}$$

On multiplie maintenant scalairement par x . A gauche, comme $T_2 - T_1 \geqslant 0$, on obtient un nombre positif. A droite, il apparaît le produit scalaire $A = \big(x, \big(\sqrt{T_2}\circ\sqrt{T_1} - \sqrt{T_1}\circ\sqrt{T_2}\big)(x)\big)$ ainsi que le produit scalaire $B = \big(x, \big(\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}\big)(x)\big)$. Or, A est nul car par symétrie des opérateurs $\sqrt{T_1}$ et $\sqrt{T_2}$:

$$A = \big(\sqrt{T_2}(x), \sqrt{T_1}(x)\big) - \big(\sqrt{T_1}(x), \sqrt{T_2}(x)\big) = 0 \quad ,$$

et B est positif par positivité des opérateurs $\sqrt{T_1}$ et $\sqrt{T_2}$. Il est même strictement positif sauf si les deux nombres positifs $\big(x, \sqrt{T_2}(x)\big)$ et $\big(x, \sqrt{T_1}(x)\big)$ sont tous les deux nuls, ce qui ne peut se produire (se placer dans une base propre) que si $\sqrt{T_2}(x) = \sqrt{T_1}(x) = 0$.
On en conclut que, ou bien $\lambda = 0$, ou bien $\lambda = \dfrac{\big(x, (T_2 - T_1)(x)\big)}{B} \geqslant 0$.
On a bien montré que toutes les valeurs propres de $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$ sont $\geqslant 0$, donc $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1} \geqslant 0$, i.e. $\sqrt{T_2} \geqslant \sqrt{T_1}$: l'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante.

3

Question 17 Il est clair par définition que la composée de fonctions d'opérateur croissantes est une fonction d'opérateur croissante.
Si on écrit $f_u(t) = 1 - \frac{u}{t+u}$, on voit que f_u est croissante par composition de $t \mapsto t + u$ croissante ($T_2 \geqslant T_1 \Rightarrow (T_2 + u.I) \geqslant (T_1 + U.I)$) avec $t \mapsto u.(-1/t)$ croissante (car $u > 0$), puis par somme avec la fonction constante $t \mapsto 1$, qui ne change pas les inégalités de croissance.

Question 18 Ce sont évidemment les définitions de l'intégrabilité et de l'endomorphisme $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(s)\, ds$ qui doivent être indépendantes du choix de la base.
Effectuons donc un changement de base de matrice P . La nouvelle matrice de $\varphi(s)$ est $P^{-1}.\Phi(s).P$. Or, multiplier une matrice, à gauche comme à droite, par une matrice constante, revient à effectuer des combinaisons linéaires sur les coefficients de la matrice. Si les éléments de la matrice sont intégrables sur $]0, +\infty[$, il en sera de même de ces combinaisons linéaires. De plus, par linéarité de l'intégrale, l'intégrale d'un tel produit de matrices a pour éléments les mêmes combinaisons linéaires des intégrales des éléments de la matrice. En d'autres termes, si $\Phi(s)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il en est de même de $P^{-1}.\Phi(s).P$, et de plus

$$\int_0^\infty P^{-1}.\Phi(s).P\, ds = P^{-1} \left(\int_0^\infty \Phi(s)\, ds \right).P \quad .$$

Ceci prouve que la nouvelle matrice de $\displaystyle\int_0^\infty \varphi(s)\, ds$ correspond au même endomorphisme qu'avant le changement de base, et donc on a bien une définition indépendante du choix de la base.

Question 19 On peut donc choisir une base dans laquelle S est diagonalisée. Les éléments de matrices de $f_u(S)u^{a-1}$ sont alors soit des fonctions nulles, soit des fonctions (continues) de la forme $g : u \mapsto \dfrac{\lambda}{\lambda + u}.u^{a-1}$, λ étant une valeur propre , > 0 de S . Comme $\lambda > 0$, g équivaut en $u = 0$ à la fonction $u \mapsto u^{a-1}$ qui est intégrable en 0 car $a - 1 > -1$; et en $+\infty$, g équivaut à la fonction $u \mapsto u^{a-2}$ qui est intégrable en $+\infty$ car $a - 2 < -1$. Donc la fonction $\varphi(u)$ est bien continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 20 Il suffit de se placer dans une base de diagonalisation de S . Par définition de S^a , l'égalité (7) provient de l'égalité admise (6) entre les valeurs propres λ^a de S^a et les intégrales $\dfrac{\sin a\pi}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty f_u(\lambda) u^{a-1}\, du$ pour les éléments diagonaux, et de l'égalité $0 = 0$ pour les éléments hors-diagonaux.

Question 21 Soit $s \mapsto \varphi(s) \in \mathcal{L}_n$ une application intégrable sur $]0,+\infty[$. En se plaçant dans une base orthonormée, par linéarité de l'intégrale, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ donné, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}
\big(x, \Big(\int_0^{\infty} \varphi(s)\,ds\Big)(x)\big) &= \sum_{i,j} \Big(\int_0^{\infty} \Phi_{ij}(s)\,ds\Big) x_i.x_j \\
&= \int_0^{\infty} \Big(\sum_{i,j} \Phi_{ij}(s).x_i.x_j\Big)\,ds \\
&= \int_0^{\infty} \big(x, \big(\varphi(s)\big)(x)\big)\,ds \quad .
\end{aligned}$$

On vient en quelque sorte de montrer que le produit scalaire "commute" avec l'intégrale sur $]0,+\infty[$.
Soit alors T_1 et T_2 dans $\mathcal{S}_n$ tels que $T_2 \geqslant T_1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ donné, on a :

$$\begin{aligned}
\big(x, (T_2^a - T_1^a)(x)\big) &= \big(x, \frac{\sin a\pi}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \big(f_u(T_2) - f_u(T_1)\big) u^{a-1}\,du\right)(x)\big) \\
&= \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \big(x, \big(f_u(T_2) - f_u(T_1)\big)(x)\big) u^{a-1}\,du \quad .
\end{aligned}$$

Comme la fonction f_u est croissante, le produit scalaire à l'intérieur de la dernière intégrale est $\geqslant 0$, d'où, par positivité de l'intégrale, $\big(x, (T_2^a - T_1^a)(x)\big) \geqslant 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, cela prouve que $T_2^a - T_1^a \geqslant 0$, et donc $t \mapsto t^a$ définit un opérateur croissant ∎

⁂