DURIN Jean-Pierre
Lot des Jaillots 71250 CLUNY
Tél: 03.85.59.16.48

Corrigé de l'épreuve Banque PT Maths I-B

Question préliminaire

Une CNS pour qu'une matrice A appartenant à $\mathrm{M}_n(R)$ soit diagonalisable est que:

- le polynome caractéristique de A soit scindé: $\det(A-\lambda Id)=(-1)^n\prod_{k=1}^{r}(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ et que
- $\forall k\in\{1,2,...r\}, Ker(A-\lambda_k Id)$ soit de dimension α_k.

Partie I: Algorithme de Babylone.

Soient les deux suites réelles $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ définies par: $u_0=v_0=1$ et $\forall n\in N, \begin{cases} u_{n+1}=u_n+2v_n \\ v_{n+1}=u_n+v_n \end{cases}$

On pose enfin $\rho_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1) On a $\rho_{n+1}=A\rho_n$ avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

---

2) $\det(A-\lambda Id)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-2$, les valeurs propres de A sont donc $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.

A appartenant à $\mathrm{M}_2(R)$ et ayant deux valeurs propres distinctes est donc diagonalisable.

---

3) On fait une petite récurrence.
u_0 et v_0 sont strictement positifs. Supposons u_n et v_n strictement positifs, alors $u_{n+1}=u_n+2v_n$ et $v_n=u_n+v_n$ sont strictement positifs.

---

4) • Montrons que $\forall n\in N, \frac{u_n}{v_n}\geq 1$. C'est vrai pour $n=0$.

Par ailleurs on peut écrire: $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=1+\frac{v_n}{u_n+v_n}$ quantité qui est strictement plus grande que 1 puisque

$\frac{v_n}{u_n+v_n}>0$.

• Montrons que $\forall n \in N, \left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right|$. On a:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{u_n + 2v_n}{u_n + v_n} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{\frac{u_n}{v_n} + 2}{\frac{u_n}{v_n} + 1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(1-\sqrt{2})\frac{u_n}{v_n} + 2 - \sqrt{2}}{\frac{u_n}{v_n} + 1}\right| = \frac{\sqrt{2} - 1}{\frac{u_n}{v_n} + 1}\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right| \text{ et}$$

comme $\sqrt{2} - 1 < 1$ d'une part, et $\frac{u_n}{v_n} + 1 > 2$ d'autre part, on peut écrire: $\left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right|$.

---

5) La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in N}$ est convergente et a pour limite $\sqrt{2}$. En effet l'inégalité précédente assure que:

$\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\frac{u_0}{v_0} - \sqrt{2}\right|$ quantité qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

---

6) • On a que $\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2} - 1)$ et donc $\frac{u_n}{v_n}$ sera une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près dès que $\left(\frac{1}{2}\right)^n (\sqrt{2} - 1) \leq 10^{-2}$. En fait, puisqu'il s'agit d'approcher $\sqrt{2}$, je ne retiendrai que le fait, par exemple, que $\sqrt{2} < 1{,}5 \quad (2 < 1{,}5^2 = 2{,}25)$, et donc on cherchera n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-2}$.

$n = 5$ fournit $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}015625$ et $n = 6$ fournit $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}0078125$. Par conséquent $\frac{u_6}{v_6}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. On a le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	3	7	17	41	99	239
v_n	1	2	5	12	29	70	169

On a donc: $\sqrt{2} \approx \frac{239}{169} = 1{,}414201183$.

On retiendra $\sqrt{2} = 1{,}41$ à 10^{-2} près, par défaut. $(1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2)$.

• L'inégalité $\left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{u_n}{v_n} - \sqrt{2}\right|$ peut être améliorée. En effet, on avait seulement retenu que $\sqrt{2} - 1 < 1$, or on peut assurer en fait que $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$. (cf $\sqrt{2} < 1{,}5$ déjà utilisé). Dès lors on peut écrire:

$\left|\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{4}\left|\frac{u_n}{v_n}-\sqrt{2}\right|$ et par suite $\left|\frac{u_n}{v_n}-\sqrt{2}\right|<\left(\frac{1}{4}\right)^n(\sqrt{2}-1)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, inégalité, qui par un raisonnement analogue au précédent, permet d'assurer que $\frac{u_7}{v_7}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

Pour information $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^7 \approx 3{,}05.10^{-5}$. $\frac{u_7}{v_7}=\frac{239+2\times169}{239+169}=\frac{577}{408}=1{,}414215686$.

On retiendra $\sqrt{2}=1{,}4142$ à 10^{-4} près, par défaut. $(1{,}4142^2=1{,}99996164<2)$.

Rq: la machine fournit $\sqrt{2}=1{,}414213562$

Partie II: Etude d'une réaction chimique

Numérotons les réactions de la façon suivante:

(1) $O^{2-}+H_2\to OH^-+H^+$, (2) $OH^-+H_2\to H_2O+H^+$, (3) $H^++O_2\to OH^-+O^{2-}$

1) Calcul de ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 . $\rho_n=\begin{pmatrix} o_n \\ (oh)_n \\ h_n \end{pmatrix}$

$n=0$ Il y a 1 radical O^{2-}, pas de radical H^+ ni de radical OH^-, donc $\rho_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Seule la réaction (1) peut avoir lieu et à l'instant $n=1$ on a donc 1 radical OH^-, 1 radical H^+ et plus de radical O^{2-}, donc $\rho_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Seules les réactions (2) et (3) peuvent avoir lieu et à l'instant $n=2$ on a donc:

1 radical H^+ issu de (2)

1 radical OH^- et 1 radical O^{2-} issus de (3)

donc $\rho_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Calcul de ρ_3. Les trois réactions peuvent avoir lieu:

(1) fournit 1 radical OH^- et 1 radical H^+,

(2) fournit 1 radical H^+,

(3) fournit 1 radical OH^- et 1 radical O^{2-} ,

et on a donc $\rho_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

---

2) Matrice A telle que $\rho_{n+1} = A\rho_n$.

o_n radicaux O^{2-} donnent o_n radicaux OH^- et o_n radicaux H^+ dans la réaction (1),

$(oh)_n$ radicaux OH^- donnent $(oh)_n$ radicaux H^+ dans la réaction (2),

h_n radicaux H^+ donnent h_n radicaux OH^- et h_n radicaux O^{2-} dans la réaction (3),

On a donc: $\begin{cases} o_{n+1} = h_n \\ (oh)_{n+1} = o_n + h_n \\ h_{n+1} = o_n + (oh)_n \end{cases}$ soit $\rho_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\rho_n$, donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

3) $\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) + (1 + \lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1)$. Les valeurs propres de A sont: -1 , $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et donc A est diagonalisable. Il existe donc une matrice P inversible telle que: $A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}P^{-1}$ et par suite

$A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}P^{-1}$. Dès lors, $\rho_n = A^n\rho_0 = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ s'écrit, en notant

$P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix}$, $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (-1)^n u \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n v \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n w \end{pmatrix}$ et par suite

$$o_n = au(-1)^n + a'v\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + a''w\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

soit $o_n = \alpha(-1)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \gamma\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ avec α, β, γ trois constantes réelles.

---

4) On détermine α, β, γ avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} o_0 = 1 = \alpha + \beta + \gamma \\ o_1 = 0 = -\alpha + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\gamma \\ o_2 = 1 = \alpha + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\beta + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\beta + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$ ce qui fournit enfin

$\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, et $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ soit

$$o_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(\sqrt{5}+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (\sqrt{5}-1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

__Rq:__ Il fallait peut-être se contenter de vérifier que $\gamma = 0$ n'était pas possible dans le système précédent, puis dire que $\gamma > 0$, car $\gamma < 0$ conduirait à $o_n < 0$ pour n assez grand, ce qui n'a pas de sens dans l'expérience étudiée. Mais alors la question (5) est un peu redondante...

---

5) La suite $(o_n)_{n\in N}$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. En effet

$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \approx 0{,}62 < 1$ implique $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et

$\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \approx 1{,}62 > 1$ implique $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ce qui démontre le résultat annoncé.

__Partie III: Diffusion d'un gaz__

1) Soit $P = (p_{i,j})$ une matrice de $M_r(R)$ dont le terme générique est $p_{i,j}$. Notons $Q_n = PB_n$.

Le terme générique de Q_n est $q_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{r} p_{i,k} b_{k,j}(n)$.

$\lim_{n\to\infty} q_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{r} p_{i,k} b_{k,j} = q_{i,j}$ terme générique de la matrice $Q = PB$.

Donc $(PB_n)_{n\in N}$ converge vers PB. Même type de calcul pour justifier que $(B_nP)_{n\in N}$ converge vers BP.

__Conclusion__: si $(B_n)_{n\in N}$ converge vers B alors $(PB_n)_{n\in N}$ et $(B_nP)_{n\in N}$ convergent vers PB et BP.

---

2) Soient $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \dfrac{1}{6} I$.

Q est diagonalisable car symétrique réelle. $\det(Q-\lambda Id)=\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$ et les valeurs propres de Q sont donc $\frac{5}{6}$ et $-\frac{1}{6}$. Dès lors il existe P inversible telle que $Q=P\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & 0\\ 0 & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}P^{-1}$ et par suite

$$Q^n=P\begin{pmatrix}\left(\frac{5}{6}\right)^n & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}P^{-1}=PB_nP^{-1} \text{ avec } B_n=\begin{pmatrix}\left(\frac{5}{6}\right)^n & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}.$$

Mais alors $(B_n)_{n\in N}$ converge vers $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $(PB_n)_{n\in N}$ converge vers $P\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et enfin $(PB_n)P^{-1}$ converge vers $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, soit $\lim_{n\to\infty}Q^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

---

3) • Les valeurs propres de $I-Q$ sont: $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ et $1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$.

0 n'est donc pas valeur propre de $I-Q$, donc $I-Q$ et inversible.

• On a $(I-Q)(I+Q+Q^2+\ldots+Q^n)=I-Q^{n+1}$ et donc d'après ce qui précède

$\lim_{n\to\infty}(I-Q)(I+Q+Q^2+\ldots+Q^n)=I$ et par suite

$\lim_{n\to\infty}\left((I-Q)^{-1}(I-Q)(I+Q+Q^2+\ldots+Q^n)\right)=(I-Q)^{-1}$ en appliquant (1) avec

$P=(I-Q)^{-1}$ et $B_n=(I-Q)(I+Q+Q^2+\ldots+Q^n)$ et on a donc finalement:

$$\lim_{n\to\infty}(I+Q+Q^2+\ldots+Q^n)=(I-Q)^{-1}$$

---

4) Calcul de $\lim_{n\to\infty}A^n$. A peut s'écrire par blocs sous la forme: $A=\begin{pmatrix}Q&0\\R&I\end{pmatrix}$. On a alors:

$A^2=\begin{pmatrix}Q^2&0\\R(I+Q)&I\end{pmatrix}$ en faisant un produit par blocs.

$A^3=\begin{pmatrix}Q^3&0\\R(I+Q+Q^2)&I\end{pmatrix}$ et plus généralement $A^n=\begin{pmatrix}Q^n&0\\R(I+Q+Q^2+\ldots Q^{n-1})&I\end{pmatrix}$ de sorte que

$$\lim_{n\to\infty}A^n=\begin{pmatrix}0&0\\R(I-Q)^{-1}&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{6}(I-Q)^{-1}&I\end{pmatrix}$$

---

5) Notons $q_1(n)$, $q_2(n)$, $q_3(n)$, $q_4(n)$ les quantités de gaz contenues dans les réservoirs R_1, R_2, R_3, R_4

au bout de n heures d'évolution du système. On aura au bout de $(n+1)$ heures:

$$\begin{cases} q_1(n+1) = q_1(n) - \frac{1}{2}q_1(n) - \frac{1}{6}q_1(n) + \frac{1}{2}q_2(n) \\ q_2(n+1) = q_2(n) - \frac{1}{2}q_2(n) - \frac{1}{6}q_2(n) + \frac{1}{2}q_1(n) \\ q_3(n+1) = q_3(n) + \frac{1}{6}q_1(n) \\ q_4(n+1) = q_4(n) + \frac{1}{6}q_2(n) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ q_3(n+1) \\ q_4(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ q_3(n) \\ q_4(n) \end{pmatrix}$$

c'est à dire, avec des notations évidentes: $q_{n+1} = Aq_n$. On en déduit $q_n = A^n q_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

q_n a donc une limite quand $n \to \infty$ qui est $q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{6}(I-Q)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On doit calculer $(I-Q)^{-1}$.

$(I-Q) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ de sorte que $(I-Q)^{-1} = \frac{36}{7} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et enfin

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

<u>Conclusion</u>: au bout d'un temps infini, il n'y aura plus de gaz dans R_1 et R_2, et il y aura $\frac{4}{7}l$ dans R_3 et $\frac{3}{7}l$ dans R_4.

<u>Partie IV: Un cas plus général</u>

1) Pour montrer qu'une valeur propre de A est aussi valeur propre de ${}^tA$, on montre que A et ${}^tA$ ont le même polynome caractéristique. Or en effet: $\det(A-\lambda Id) = \det({}^t(A-\lambda Id)) = \det({}^tA - \lambda Id)$.

---

2) Soit x un vecteur propre de A associé à λ : $x \neq 0$ et $Ax = \lambda x$.
Soit y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à μ : $y \neq 0$ et ${}^tAy = \mu y$.
Supposons $\lambda \neq \mu$, et calculons ${}^tyAx$ qui est un nombre réel, donc qui sera égal à son tranposé.

$${}^tyAx = {}^ty\lambda x = \lambda {}^tyx = \lambda \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \qquad \text{et} \qquad {}^t({}^tyAx) = {}^tx{}^tAy = {}^tx\mu y = \mu {}^txy = \mu \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

L'égalité des deux quantités, avec $\lambda \neq \mu$, implique ${}^tyx = 0$.

---

3) A admet d valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.
On suppose de plus que: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_d|$.
Soit x_i un vecteur propre de A associé à λ_i et y_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i .

a) $(x, y) \rightarrow {}^tyx$ est un produit scalaire sur R^d , c'est en effet le produit scalaire qui fait de la base fixée de R^d une base orthonormée.

b) Une famille de vecteurs propres de A, associés à des valeurs propres distinctes, est une famille libre.
$(x_1, x_2, \ldots x_d)$ est donc une famille libre de R^d , elle possède d éléments dans un espace de dimension d ,
c'est donc une base de R^d .

c) Soit y_i un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i . On a que $\forall k \neq i, {}^ty_i x_k = 0$ c'est à dire y_i est orthogonal à x_k . Si on avait également ${}^ty_i x_i = 0$, on aurait que y_i serait orthogonal à tous les vecteurs
d'une base de R^d , donc serait le vecteur nul, ce qui n'est pas le cas. Donc ${}^ty_i x_i = a_i \neq 0$, et en prenant
$y'_i = \dfrac{y_i}{a_i}$ on aura: y'_i est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à λ_i et ${}^ty'_i\, x_i = 1$.
<u>Conclusion:</u> On peut donc choisir la famille $(y_1, y_2, \ldots y_d)$ de telle sorte que: $\forall i \in \{1,2,\ldots d\}$, ${}^ty_i x_i = 1$.

---

4) $\forall i \in \{1,2,\ldots d\}$, on pose $A_i = x_i\,{}^ty_i$.

- Soit $i \neq j$ $\quad A_i A_j = x_i\,{}^ty_i x_j\,{}^ty_j = x_i 0\,{}^ty_j = 0$.
- Soit $1 \leq i \leq d$ $\quad A_i^{\,2} = x_i\,{}^ty_i x_i\,{}^ty_i = x_i 1\,{}^ty_i = x_i\,{}^ty_i = A_i$.

---

5) • Pour montrer $\sum_{i=1}^{d} A_i = I$ il faut montrer que $\sum_{i=1}^{d} A_i$ agit sur tout vecteur de la base $(x_1, x_2, \ldots x_d)$ comme le fait l'identité, c'est à dire laisse invariant chaque x_k . Or en effet

$$\left(\sum_{i=1}^{d} A_i\right)(x_k) = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i\,{}^ty_i\right)x_k = \sum_{i=1}^{d} x_i({}^ty_i x_k) = x_k \quad \text{car } {}^ty_i x_k = 0 \text{ pour } i \neq k .$$

• Pour montrer $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i A_i = A$ on procède de la même façon:

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i A_i\right)(x_k) = \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i\,{}^ty_i\right)x_k = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i({}^ty_i x_k) = \lambda_k x_k = Ax_k \quad \text{cqfd.}$$

---

6) Calcul de A^n . Les matrices A_i et A_j commutent entre elles d'après (4). Par conséquent:

$$A^2 = \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i A_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^2 A_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq d} \lambda_i \lambda_j A_i A_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^2 A_i \quad \text{en appliquant (4).}$$

Par une récurrence immédiate on montrerait que $A^n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n A_i$.

---

7) $\frac{1}{\lambda_1{}^n} A^n = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n A_i$ Or pour $i \geq 2$, $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right| < 1$, et par suite $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

<u>Conclusion:</u> $\frac{1}{\lambda_1{}^n} A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A_1$

---

8) Reprenons la formule $A^n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n A_i$.

- Si $|\lambda_1| \leq 1$ alors $|\lambda_i| < 1$ pour $i \geq 2$ et alors A^n converge vers $\begin{cases} A_1 & si \quad \lambda_1 = 1 \\ 0 & si \quad |\lambda_1| < 1 \end{cases}$

  n'a pas de limite si $\lambda_1 = -1$ car $A_1 \neq 0$

- Si $|\lambda_1| > 1$ alors A^n ne peut pas converger, car si on avait $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ on aurait $\frac{\lambda_1{}^n}{\lambda_1{}^n} A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ soit

  $\frac{B}{\lambda_1{}^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A_1$, or $\frac{B}{\lambda_1{}^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $A_1 \neq 0$ d'où la contradiction.

<u>Conclusion:</u> A^n converge pour $\lambda_1 \in \left]-1,1\right]$ vers $\begin{cases} 0 & pour \quad \lambda_1 \in \left]-1,1\right[\\ A_1 & pour \quad \lambda_1 = 1 \end{cases}$

---

9) On retrouve certains résultats des parties I et II grâce aux résultats précédents.

- <u>Pour la partie I</u>

  Les valeurs propres de A étaient $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ donc $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$ et $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, donc A^n ne converge pas, mais $\frac{A^n}{(1+\sqrt{2})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A_1$.

  -- Vecteur propre de A associé à $1+\sqrt{2}$: $-\sqrt{2}\alpha + 2\beta = 0$. On prendra $x_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

  -- Vecteur propre de ${}^tA$ associé à $1+\sqrt{2}$: $-\sqrt{2}\alpha + \beta = 0$. On prendra $y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ pour que

  ${}^t y_1 x_1 = 1$. Dès lors $A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et on a que

$$\frac{A^n}{(1+\sqrt{2})^n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})\end{pmatrix}$$ et on retrouve que

$$\frac{u_n}{v_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{2}$$

- Pour la partie II

Les valeurs propres de A étaient -1, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on a donc:

$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=-1$, et $\lambda_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comme précédemment A^n ne converge pas, mais $\dfrac{A^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}A_1$.

-- Vecteur propre de A associé à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\begin{cases}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha+\gamma=0\\ \alpha-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta+\gamma=0\end{cases}$ On prendra $x_1=\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}$

-- Vecteur propre de ${}^tA$ associé à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\begin{cases}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha+\beta+\gamma=0\\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta+\gamma=0\end{cases}$ fournit $\begin{pmatrix}3+\sqrt{5}\\1+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}$ mais alors

$$\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3+\sqrt{5}\\1+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}=(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}+3+\sqrt{5})=(3+\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})=\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})$$

et on choisira donc $y_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})}\begin{pmatrix}3+\sqrt{5}\\1+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}$ pour que ${}^ty_1x_1=1$. Dès lors on a:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})}\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} & 3+\sqrt{5}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})}\begin{pmatrix}8+4\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5}\\14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5}\\14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

Ainsi $\dfrac{A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\begin{pmatrix}o_n\\(oh)_n\\h_n\end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5})}\begin{pmatrix}8+4\sqrt{5} & 6+2\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5}\\14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5}\\14+6\sqrt{5} & 8+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

et on a donc que

$$\frac{o_n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{8+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}(14+6\sqrt{5}} = \frac{4(2+\sqrt{5})}{30+14\sqrt{5}} = \frac{2(2+\sqrt{5})}{15+7\sqrt{5}} = \frac{2(2+\sqrt{5})(15-7\sqrt{5})}{-20} = \frac{2(-5+\sqrt{5})}{-20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

c'est à dire $o_n \underset{n\to\infty}{\approx} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et on retrouve la valeur de γ , $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Partie V: Etude d'une population

Je décide de définir les choses ainsi:

a_n, b_n, c_n sont les nombres d'insectes étant respectivement dans leur $1^{ère}$ année, $2^{ème}$ année, $3^{ème}$ année de vie au cours de l'année n° n, avec $a_0 = b_0 = c_0 = 1000$.

Au cours de cette $n^{ème}$ année, c'est à dire au cours de l'année n° n :

- Les c_n insectes qui sont dans leur $3^{ème}$ année donnent naissance à c_n insectes qui seront dans leur $1^{ère}$ année au cours de l'année $n+1$, puis meurent.
- Parmi les b_n insectes qui sont dans leur $2^{ème}$ année, tous donnent naissance à un insecte qui sera donc dans sa $1^{ère}$ année au cours de l'année $n+1$, et seuls $\dfrac{b_n}{4}$ seront dans leur $3^{ème}$ année au cours de l'année $n+1$.
- Parmi a_n les insectes qui sont dans leur $1^{ère}$ année, $\dfrac{a_n}{2}$ meurent et $\dfrac{a_n}{2}$ seront dans leur $2^{ème}$ année au cours de l'année $n+1$. Par suite on a:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{1}{2}(-\lambda - \frac{1}{4}) = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{8}$$ dont les racines sont:

$\lambda_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \cong -0{,}80$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, et $\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cong 0{,}30$. Nous sommes donc dans le cas où $A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ On va donc vers l'extinction de cette vilaine espèce d'insectes....

Fin.