CORRIGE de l'épreuve MATH IIB BANQUE PT 1998

lsportis@netsysteme.net

I

1) Le plan P est orthogonal à la droite $D = P^{\perp}$ dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{K} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Soit p_D le projecteur orthogonal sur D. On a :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3, \quad p_D(u) = \left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{K}\right)\overrightarrow{K}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_D)$ de p_D dans la base $\mathcal{B}$ est définie par les composantes dans la base des images par p_D des vecteurs de la base $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_D) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Comme $p + p_D = \mathrm{Id}$, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}}$$

2) Comme $p(\overrightarrow{k})$ est orthogonal à $\overrightarrow{K}$ qui dirige $D = P^{\perp}$, $\overrightarrow{K}$ et le vecteur unitaire $\overrightarrow{J} = \dfrac{p(\overrightarrow{k})}{||p(\overrightarrow{k})||} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont orthogonaux. En posant $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{K} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, on obtient une base orthonormale directe $\mathcal{B}'$. La matrice de passage $\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est donc orthogonale, comme matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale .

$$\boxed{\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = {}^t\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$$

Ses colonnes sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 2\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}}$$

3)
– Si $\alpha < 0$, S_{α} et Σ_{α} sont l'ensemble vide.
– Si $\alpha = 0$, S_{α} et Σ_{α} sont la droite $D = P^{\perp}$ dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{K}$, d'équations $x = y = z$.
On suppose désormais $\boldsymbol{\alpha > 0}$**.**
4) Soit $M(x, y, z)_{\mathcal{B}}$ et $M'(x', y', z')_{\mathcal{B}} = p(M)$. La question I-1 permet d'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \dfrac{1}{3}(2x - y - z)\\ y' &=& \dfrac{1}{3}(-x + 2y - z)\\ z' &=& \dfrac{1}{3}(-x - y + 2z)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x' - y' &=& x - y\\ y' - z' &=& y - z\\ z' - x' &=& z - x\end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{\begin{array}{lcl} f(M) &=& f(p(M))\\ g(M) &=& g(p(M))\end{array}\right.}$$

Tout point m de la courbe intersection de S_α et du plan P est le projeté orthogonal de tout point M de la droite passant par m, de vecteur directeur $\overrightarrow{K}$. On a $f(m)=\alpha$, puisque m appartient à $_\alpha$. On a aussi, d'après ce qui vient d'être dit $f(M)=f(p(M))$ et donc $f(M)=f(m)=\alpha$, ce qui signifie que tout point M de la droite passant par m, de vecteur directeur $\overrightarrow{K}$ est sur S_α.
Le même raisonnement peut être tenu pour Σ_α.

$\boxed{S_\alpha \text{ et } \Sigma_\alpha \text{ sont des surfaces cylindriques de génératrices parallèles à } \overrightarrow{K}.}$

5) $S_\alpha \cap P$ est la courbe d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 & = & \alpha^2\\ x+y+z & = & 0\end{array}\right.$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(x^2+y^2+z^2)-(2xy+yz+zx)=2(x^2+y^2+z^2)-\big((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\big)=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2$$

Donc $S_\alpha \cap P$ est la courbe d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x^2+y^2+z^2 & = & \dfrac{\alpha^2}{3}\\ x+y+z & = & 0\end{array}\right.$$

$S_\alpha \cap P$ est donc l'intersection du plan P par la sphère de centre $O\in P$, de rayon $\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$. C'est donc le cercle du plan P, de centre O, de rayon $\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Les génératrices du cylindre S_α sont orthogonales au plan P.

$\boxed{S_\alpha \text{ est le cylindre de révolution d'axe } D=P^\perp\text{, passant par } O\text{, dirigé par } \overrightarrow{K}\text{, de rayon } \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}.}$

6) Dans la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x=y$, le point $M(x,y,z)_\mathcal{B}$ a pour image $M'(y,x,z)_\mathcal{B}$. Donc, $g(M)=g(M')$.
Σ_α est donc invariante par la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x=y$. Par permutation circulaire, Σ_α est invariante par les symétries orthogonales par rapport aux plans d'équations $y=z$, $z=x$, et donc par la symétrie orthogonale par rapport à l'intersection de ces plans, la droite $D=P^\perp$, passant par O, dirigé par $\overrightarrow{K}$.
7) Σ_α est invariante par les symétries orthogonales S_Q et S_R par rapport aux plans Q et R, d'équations respectives $x-y=0$, $y-z0$, dont l'intersection est la droite $D=P^\perp$, passant par O, dirigé par $\overrightarrow{K}$. Σ_α est donc invariante par leur composée $S_R \operatorname{o} S_Q$ qui est la rotation d'axe D, dirigé par $\overrightarrow{K}$ et d'angle l'angle de ces deux plans.
Dans la symétrie S_Q, le point $M(x,y,z)_\mathcal{B}$ a pour image $M'(y,x,z)_\mathcal{B}$. Dans la symétrie S_R, le point $M(x,y,z)_\mathcal{B}$ a pour image $M'(x,z,y)_\mathcal{B}$. Donc :

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_Q)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_R)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_R \operatorname{o} S_Q)=\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_R)\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_Q)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. Utilisons la base orthonormale $\mathcal{B}'=(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K})$. Nous avons vu, à la question I-2, que la matrice de changement de bases est la matrice orthogonale :

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 2\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(S_R \operatorname{o} S_Q)=\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_R \operatorname{o} S_Q)\,\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}={}^t\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(S_R \operatorname{o} S_Q)\,\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$S_R \operatorname{o} S_Q$ est donc la rotation $\mathcal{R}$ d'axe D, dirigé par $\overrightarrow{K}$ et d'angle θ déterminé par $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}, \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve donc $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$ à 2π près. Evidemment, Σ_α est aussi invariante par la rotation $\mathcal{R}^2$ d'axe D, dirigé par $\overrightarrow{K}$ et d'angle

$2\theta = \dfrac{8\pi}{3}$ à 2π près.

$\boxed{\Sigma_\alpha \text{ est invariante par la rotation d'axe } D\text{, dirigé par } \overrightarrow{K} \text{ et d'angle } \dfrac{2\pi}{3}.}$

8) Une partie de Σ_α est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -\alpha \\ |y-z| & \leqslant & \alpha \\ |z-x| & \leqslant & \alpha \end{array}\right.$$

C'est donc une partie du plan d'équation $x-y=\alpha$, qui est orthogonal au plan P et donc parallèle à l'axe du cylindre Σ_α.

Plaçons-nous dans le repère $(O,\mathcal{B}')$. L'équation du plan $x-y=-\alpha$ dans ce repère est donc : $\sqrt{2}X=\alpha$.

Sa trace dans le plan P est donc la droite Δ_1 d' équations $\left\{\begin{array}{rcl} X & = & \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ Z & = & 0 \end{array}\right.$.

De même, une autre partie de Σ_α est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & \alpha \\ |y-z| & \leqslant & \alpha \\ |z-x| & \leqslant & \alpha \end{array}\right.$$

C'est donc une partie du plan d'équation $x-y=\alpha$, qui est orthogonal au plan P et donc parallèle à l'axe du cylindre Σ_α.

Plaçons-nous dans le repère $(O,\mathcal{B}')$. L'équation du plan $x-y=\alpha$ dans ce repère est donc :$-\sqrt{2}X=\alpha$.

Sa trace dans le plan P est donc la droite Δ_1' d' équations $\left\{\begin{array}{rcl} X & = & -\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ Z & = & 0 \end{array}\right.$.

La droite Δ_1 coupe orthogonalement l'axe OX en $A\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}},0,0\right)_{\mathcal{B}'}=\left(-\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\alpha}{2},0\right)_{\mathcal{B}}$. Il est facile de voir que $A\in\Sigma_\alpha$.

La rotation du plan P de centre O, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ laisse la trace de Σ_α sur P globalement invariante. D'où la contruction du point B, de la droite Δ_2, image de Δ_1 par cette rotation, orthogonale en B à OB. D'où aussi la contruction du point C, de la droite Δ_3, image de Δ_2 par cette rotation, orthogonale en C à OC.

De même, la droite Δ_1' coupe orthogonalement l'axe OX en $L\left(-\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}},0,0\right)_{\mathcal{B}'}=\left(\dfrac{\alpha}{2},-\dfrac{\alpha}{2},0\right)_{\mathcal{B}}$. Il est facile de voir que $L\in\Sigma_\alpha$.

La rotation du plan P de centre O, d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ laisse la trace de Σ_α sur P globalement invariante. D'où la contruction du point M, de la droite Δ_2', image de Δ_1' par cette rotation, orthogonale en M à OM. D'où aussi la contruction du point N, de la droite Δ_3', image de Δ_2' par cette rotation, orthogonale en N à ON.

La base du cylindre Σ_α dans le plan P est donc l'hexagone régulier $PQRSTU$, dont les médiatrices des côtés sont OA, ON, OB, OL, OC, OM.

La base du cylindre S_α dans le plan P est le cercle (C) de centre O, de rayon $\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$.

On fait le dessin en prenant $\alpha=5\sqrt{2}$.

II

1) On sait que tout endomorphisme symétrique s d'un espace vectoriel euclidien est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Soit $\mathcal{B}_s=(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3})$ une telle base orthonormale de vecteurs propres et $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, les valeurs propres de s.

On a donc $\forall i\in\{1,2,3\},\quad \overrightarrow{s(V_i)}=\sigma_i\overrightarrow{V_i}$.

$$\forall\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s},\quad \overrightarrow{u}=u_1\overrightarrow{V_1}++u_2\overrightarrow{V_2}+u_3\overrightarrow{V_3}\Longrightarrow\overrightarrow{s(u)}=u_1\overrightarrow{s(V_1)}+u_2\overrightarrow{s(V_2)}+u_3\overrightarrow{s(V_3)}=\begin{pmatrix}\sigma_1u_1\\\sigma_2u_2\\\sigma_3u_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s}$$

$$\boxed{||s(\overrightarrow{u}||=\sqrt{\sigma_1^2u_1^2+\sigma_2^2u_2^2+\sigma_3^2u_3^2}}$$

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire, il dirige la droite $D=\text{Vect }\overrightarrow{u}$, et on a la décomposition :

$$\mathbb{R}^3=D\overset{\perp}{\oplus}D^\perp$$

Donc $\overrightarrow{s(u)}=\alpha.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\quad \overrightarrow{v}\in D^\perp,\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{s(u)}=\alpha\overrightarrow{u}^2+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\underset{\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}}{=}\alpha||\overrightarrow{u}||^2=\alpha$$

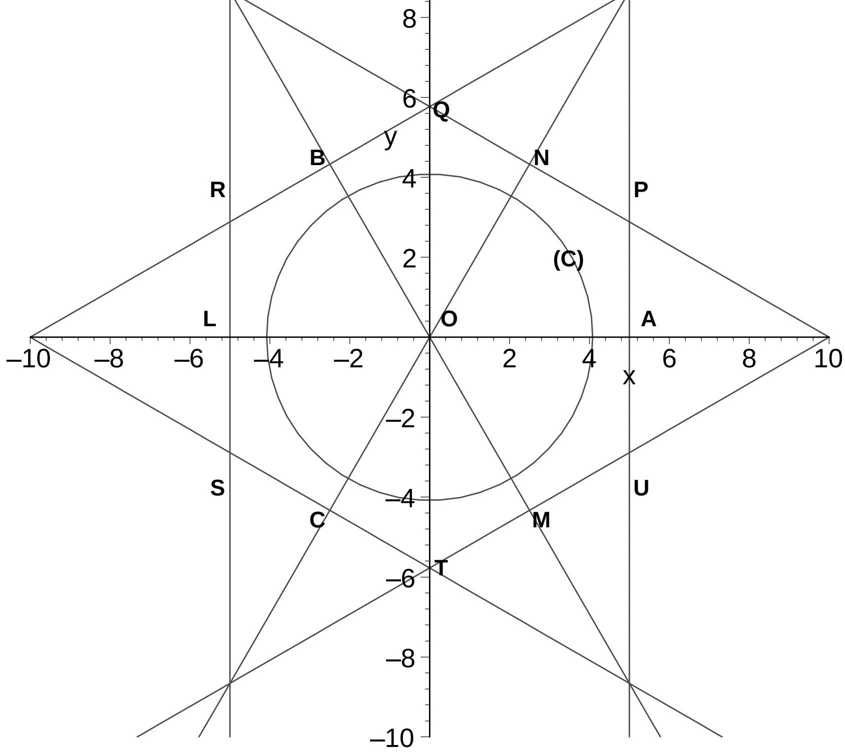


FIG. 1 – Bases dans le plan P des cylindres S_α et Σ_α

On définit ainsi les fonctions α et t qui à tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ font respectivement correspondre le réel :

$$\boxed{\alpha(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{s(u)} = \sigma_1 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + \sigma_3 u_3^2}$$

et le vecteur $t(\overrightarrow{u}) \perp \overrightarrow{u}$ tel que :

$$s(\overrightarrow{u}) = \alpha(\overrightarrow{u})\overrightarrow{u} + t(\overrightarrow{u})$$

Comme $\overrightarrow{u}$ et $t(\overrightarrow{u})$ sont orthogonaux, la relation de Pythagore donne :

$$||t(\overrightarrow{u})|| = \sqrt{||s(\overrightarrow{u})||^2 - ||\alpha(\overrightarrow{u})} = \sqrt{\sigma_1^2 u_1^2 + \sigma_2^2 u_2^2 + \sigma_3^2 u_3^2 - \left(\alpha(\overrightarrow{u})\right)^2 ||\overrightarrow{u}||^2} \underset{||\overrightarrow{u}||=1}{=} \sqrt{\sigma_1^2 u_1^2 + \sigma_2^2 u_2^2 + \sigma_3^2 u_3^2 - (\sigma_1 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + \sigma_3 u_3^2)^2}$$

$$\boxed{\left(\beta(\overrightarrow{u})\right)^2 = ||t(\overrightarrow{u})||^2 = \sigma_1^2 u_1^2 + \sigma_2^2 u_2^2 + \sigma_3^2 u_3^2 - (\sigma_1 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + \sigma_3 u_3^2)^2}$$

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}+$. S'il existe $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s} \in \mathbb{R}^3$, unitaire, tel que :

$$m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}), \beta(\overrightarrow{u})) = (x, y)$$

alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 & = & 1 \\ \sigma_1 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + \sigma_3 u_3^3 & = & x \\ \sigma_1^2 u_1^2 + \sigma_2^2 u_2^2 + \sigma_3^2 u_3^2 - (\sigma_1 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + \sigma_3 u_3^2)^2 & = & y^2 \end{array} \right.$$

Donc, s'il existe $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s} \in \mathbb{R}^3$, unitaire, tel que :

$$m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}), \beta(\overrightarrow{u})) = (x, y)$$

alors u_1^2, u_2^2, u_3^2 sont solutions du système :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} X_1+X_2+X_3 & = & 1 & \times\sigma_3 & \\ \sigma_1 X_1+\sigma_2 X_2+\sigma_3 X_3 & = & x & \times -1 & \times\sigma_3 \\ \sigma_1^2 X_1+\sigma_2^2 X_2+\sigma_3^2 X_3 & = & x^2+y^2 & & \times -1 \end{array}\right.$$

3) On est dans le cas : $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

a. Le système précédent a pour déterminant le déterminant de Vandermonde $V(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, qui est non nul, car $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont deux à deux différents. Donc, il admet une et une seule solution (X_1, X_2, X_3).
On résoud d'ailleurs « à la main »et en utilisant les permutations circulaires :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ccc} X_1 & = & \dfrac{y^2+(x-\sigma_2)(x-\sigma_3)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_1)} \\ X_2 & = & \dfrac{y^2+(x-\sigma_3)(x-\sigma_1)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_2)} \\ X_3 & = & \dfrac{y^2+(x-\sigma_1)(x-\sigma_2)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_3)} \end{array}\right.$$

b. On a vu, que s'il existe $\overrightarrow{u}$, unitaire, tel que $m(\overrightarrow{u}) = (x, y)$, nécessairement $X_1 = u_1^2, X_2 = u_2^2, X_3 = u_3^2$ sont données par les formules (2), ce qui implique, compte tenu de la positivité de X_1, X_2, x_3 et de $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ implique :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ccc} y^2+(x-\sigma_2)(x-\sigma_3) & \geqslant & 0 \\ y^2+(x-\sigma_3)(x-\sigma_1) & \leqslant & 0 \\ y^2+(x-\sigma_1)(x-\sigma_2) & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Réciproquement, quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}+$, si les conditions (3) sont vérifiées, les formules (2) permettent d'obtenir $(X_1 \geqslant 0, X_2 \geqslant 0, X_3 \geqslant 0$ et donc de choisir $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s}$, unitaire tel que $m(\overrightarrow{u}) = (x, y)$.

c. Dans le cas $\sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 4$, l'ensemble des points $m(\overrightarrow{u})$ de $\mathbb{R}^2$, lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points $m(x, y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccc} y & \geqslant & 0 \\ y^2+(x-1)(x-4) & \geqslant & 0 \\ y^2+(x+1)(x-4) & \leqslant & 0 \\ y^2+(x+1)(x-1) & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

Or $y^2+(x-a)(x-b) = 0$ représente l'équation du cercle de diamètre $A(a, 0)B(b, 0)$.
$y^2+(x-a)(x-b) \geqslant 0$ représente l'extérieur de ce cercle, et $y^2+(x-a)(x-b) \leqslant 0$ l'intérieur.
L'ensemble des points $m(\overrightarrow{u})$ de $\mathbb{R}^2$, lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points intérieurs au demi grand cercle de diamètre $A(-1, 0)B(4, 0)$ extérieurs aux deux autres cercles. En RDM, cette figure est appelée tricercle de Mohr.

4) On est dans le cas : $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$.

a. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}+$. D'après la question II-2, s'il existe $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s} \in \mathbb{R}^3$, unitaire, tel que :

$$m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}), \beta(\overrightarrow{u})) = (x, y)$$

alors $X_1 = u_1^2, X_2 + X_3 = u_2^2 + u_3^2$ sont solutions du système :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} X_1+(X_2+X_3) & = & 1 & \times\sigma_2 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 X_1+\sigma_2(X_2+X_3) & = & x & \times -1 & \times 1 \\ \sigma_1^2 X_1+\sigma_2^2(X_2+X_3) & = & x^2+y^2 & & \end{array}\right.$$

La résolution des deux premières lignes du système donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} X_1 & = & \dfrac{\sigma_2-x}{\sigma_2-\sigma_1} \\ X_2+X_3 & = & \dfrac{x-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} \end{array}\right.$$

b. Pour que le système ait des solutions, il faut alors que la troisième ligne soit vérifiée :

$$\sigma_1^2\frac{\sigma_2 - x}{\sigma_2-\sigma_1} + \sigma_2^2\frac{x-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1} = x^2+y^2 \iff x^2+y^2-x(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2 = 0 \iff y^2+(x-\sigma_1)(x-\sigma_2)=0$$

Réciproquement, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}+$ vérifiant cette relation, il est facile de vérifier qu'il existe $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s} \in \mathbb{R}^3$, unitaire, tel que :

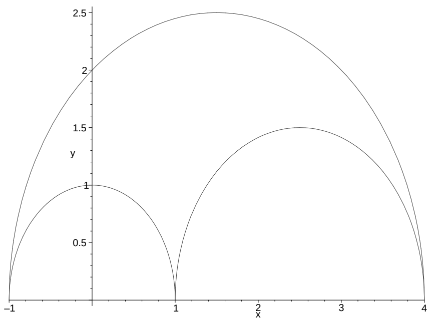
$$m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}),\beta(\overrightarrow{u})) = (x,y)$$

Ainsi, lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires, l'ensemble des points $m(\overrightarrow{u})(x,y)$ est l'ensemble des points $m(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que :

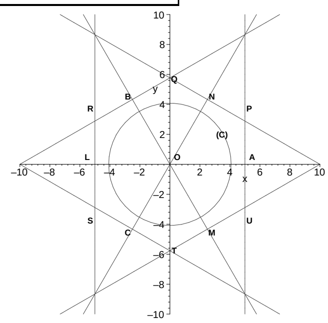
$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y & \geqslant & 0\\ y^2+(x-\sigma_1)(x-\sigma_2) & = & 0\end{array}\right.}$$

C'est donc $\boxed{\text{le demi-cercle, correspondant à } y\geqslant 0 \text{ de diamètre } A(\sigma_1,0)B(\sigma_2,0).}$

c. Cas $\sigma_1=-1, \sigma_2=4$.



II-3 $\quad \sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$.



II-4 $\quad \sigma_1<\sigma_2=\sigma_3$.

5) On est dans le cas $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}+$. D'après la question II-2, s'il existe $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s} \in \mathbb{R}^3$, unitaire, tel que :

$$m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}),\beta(\overrightarrow{u})) = (x,y)$$

alors $X_1+X_2+X_3$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_1+X_2+X_3 & = & 1\\ \sigma_1(X_1+X_2+X_3 = & = & x\\ \sigma_1^2(X_1+X_2+X_3) = & = & x^2+y^2\end{array}\right.$$

Ce qui nécessite $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sigma_1\\ x^2+y^2 & = & \sigma_1^2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sigma_1\\ y & = & 0\end{array}\right.$. Réciproquement, l est facile de vérifier qu'il existe $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s} \in \mathbb{R}^3$, unitaire, tel que :

$$m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}),\beta(\overrightarrow{u})) = (\sigma_1,0)$$

Ainsi, lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires, l'ensemble des points $m(\overrightarrow{u})(x,y)$ est $\boxed{\text{le point } A(\sigma_1,0).}$

6) $T(s)$ est la valeur maximale de $\beta(\overrightarrow{u})$ quand $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. C'est la valeur maximale de la deuxième composante de $m(\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}),\beta(\overrightarrow{u}))$. On a étudié trois cas :

- $\boxed{\text{Si } \sigma_1<\sigma_2<\sigma_3, \text{ alors } T(s) = \dfrac{\sigma_3-\sigma_1}{2}.}$
- $\boxed{\text{Si } \sigma_1<\sigma_2=\sigma_3, \text{ alors } T(s) = \dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}.}$
- $\boxed{\text{Si } \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3, \text{ alors } T(s) = 0.}$

Ainsi, dans tous les cas, en utilisant la fonction g du I :

$$\boxed{T(s) = \frac{g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2}}$$

III

1)

a. A_M est une matrice symétrique réelle : elle admet donc trois valeurs propres réelles. Le calcul du polynôme caractéristique de A_M permet de les calculer :

$$\chi_{A_M}(x) = -x(x^2 - ax - b^2)$$

donne les valeurs propres :

$$\sigma_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \leqslant \sigma_2 = 0 \leqslant \sigma_3 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$$

D'après la question II-6 :

$$\boxed{T(s_M) = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}$$

b. Dans le cas $b = 0$, et on suppose $a \neq 0$: les valeurs propres vérifient $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 < \sigma_3 = a$.

$$T(s_M) = \frac{a}{2}$$

La matrice A s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
ce qui prouve qu'une base orthonormale de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique associé s_M est $\mathcal{B}_s = (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, les vecteurs propres étant associés respectivement aux valeurs propres $0, 0, a$.
On a répondu à la question II-4 au problème suivant : quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}+$, tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_s}$ tel que $m((\overrightarrow{u}) = (\alpha(\overrightarrow{u}), \beta(\overrightarrow{u})) = (x, y)$ vérifie - en posant $X_2 = u_1^2, X_3 = u_3^2$, et en tenant compte des valeurs des σ_i - :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X_2 + X_3 & = & 1 \\ aX_3 & = & x \\ a^2 X_3 & = & x^2 + y^2 \end{array} \right.$$

A la question II-4, on a vu aussi que lorsque $\overrightarrow{u}$ décrit l'ensemeble des vecteurs unitaires de $\overset{3}{R}$, le point $m(x, y)$ décrit le demi-cercle de diamètre $A(0, 0)B(a, 0)$, correspondant à $y \geqslant 0$, de rayon égal donc à $\frac{a}{2}$.
Donc $y = \beta(\overrightarrow{u}) = T(s_M) = \frac{a}{2} \Longrightarrow x = \frac{a}{2}$.
Le système s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X_2 + X_3 & = & 1 \\ aX_3 & = & \frac{a}{2} \\ a^2 X_3 & = & \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \end{array} \right.$$

On obtient ainsi $X_3 = \frac{1}{2}, X_2 = \frac{1}{2}$.
Donc, dans le cas $b = 0, a \neq 0$, les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ du plan $(\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, tels que $\beta(\overrightarrow{u}) = T(s_M) = \frac{a}{2}$, sont donnés par :

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})}}$$

c. Dns le cas $b \neq 0$, les valeurs propres de s_M vérifient :

$$\sigma_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} < \sigma_2 = 0 < \sigma_3 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$$

Donc, dans le cas où la traction n'est pas simple, $T(s_M) = \dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$. on a vu que dans le cas de la traction simple, $T(s_M) = \dfrac{a}{2}$.

Dans les deux cas, on a donc $T(s_M) = \dfrac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}$.

Or l'effort de traction est supportable lorsque $T(s_M) \leqslant R$. Comme a est proportionnel à l'effort de traction, l'effort de traction supportable sans dommage pour le matériau est maximal lorsque $b = 0$, i.e en traction simple.

2) $s_M = -pI$. Donc $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$. La question II-6 montre que $T(s_M) = 0$. Donc $T(s_M) < R$.
Quelle que soit la profondeur où se trouve l'épave, elle n'est pas endommagée par la pression.
